গণিত

শিক্ষণ পদ্ধতি

এস, চট্টরাজ

কলিকাতা, বর্দ্ধমান, উত্তরবঙ্গ, কল্যাণী, বিশ্বভারতী, যাদবপুর প্রভৃতি বিশ্ববিদ্যালয়ের
বি. এড সিলেবাস অনুযায়ী লিখিত

গণিত শিক্ষণ পদ্ধতি

A TEXT BOOK ON THF METHODS OF TEACHING MATHEMATICS

[বাংলা ভাষায় প্রকাশিত প্রথম পূর্ণাঙ্গ পুস্তক]

শ্রীশ্যামাপ্রসাদ চট্টরাজ
এম. এস. সি. (স্বর্ণ পদক প্রাপ্ত), বি. টি. (প্রথম শ্রেণীতে প্রথম)
বিভাগীয় ভারপ্রাপ্ত অধ্যাপক, শিক্ষক শিক্ষণ বিভাগ
ফকিরচাঁদ কলেজ, ডায়মণ্ডহারবার।

—ঃ প্রাপ্তিস্থান ঃ—

জে. এন. ঘোষ এণ্ড সন্স
৬, বঙ্কিম চ্যাটার্জী ষ্ট্রীট
কলিকাতা-১২

প্রকাশক :
"শিক্ষার" পক্ষে
শৈবাল ভট্টাচার্য
৬নং বঙ্কিম চ্যাটার্জী ষ্ট্রীট
কলিকাতা-১২

(Stock-taking)

(Binding)

প্রথম প্রকাশ : জানুয়ারী, ১৯৬৯
দ্বিতীয় সংস্করণ : জুলাই, ১৯৭০

মূল্য :—দশ টাকা মাত্র

3026

মুদ্রাকর :
শ্রীক্ষীতিশ চন্দ্র সরকার
নিউ ইম্‌প্রেশন প্রেস
২০এ পটুয়াটোলা লেন
কলিকাতা-৯

গ্রন্থকারের অন্যান্য গ্রন্থ :—

মানসিক ও শিক্ষাগত মূল্যায়ন
মূল্য—এগার টাকা

উৎসর্গ

পরম পূজনীয় ৺গোপাল চন্দ্র ঠাকুরের
পুণ্য স্মৃতির উদ্দেশ্যে—

REVISED SYLLABUS FOR THE B. ED. EXAMINATION OF THE CALCUTTA UNIVERSITY.

Methods : Aims and values of teaching Mathematics in schools. General methods of approach-analytic and synthetic, inductive and deductive. Place of concretisation in Mathematics. Place of History of Mathematics in the teaching of the subject. Relation between Arithmetic, Algebra, and Geometry, Correlation of Mathematics with other in the School. Practical work and use of appliances in connection with the teaching of Mathematics, Mathematics carriculum and syllabuses. Evaluation of teaching and pupil's work. Teacher's preparation and planning.

Arithmetic : Methods of teaching ; Concept of number, the first four rules, vulgar and decimal fractions including recurring decimal, extraction of square root, ratio and proportion, metric system, checks and rough, estimates in arithmetic. Solution of problems of various arithmetical operations. Application of algebra to arithmetic.

Elements of Statistics : When and how to introduce.

Algebra : Scope and fuctions. Symbolism, generalisation, fundamental laws, and functionality. Methods of teaching ; directed numbers. Formulae factors, fractions, equation, irrational numbers, indices, surds involutions and evolutions, A.P. G.P., variations, logarithms, problems graphs, theory of quadratic equations and expressions. Purmutations and combinations, binomial theorem with positive integral index, elementary idea of some of the infinite geometric series, exponential and logarithmic series.

Geometry : Early teaching of Geometry. Place of intuition. observation and experience, Geometrical concepts. Simple practical exercises in early stages. Experimental, analytic and synthetic stages and the principles of their treatment. Standard theorems and riders.

Algebra in Geometry. Origin and development of Geometry. Euclidean and non-Euclidean Geometry.

Place of solid geometry and methods of teaching it. Methods of teachings mensuration.

Teaching of fundamental principles of Trigonometry and Co-ordinate Geometry ; how and when to introduce them in School Mathematics.

॥ **মুখবন্ধ** ॥

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের বি.টি. পাঠক্রম ১৯৬৫ সালে আমূল সংশোধিত ও পরিবর্তিত হয়েছে। কিন্তু এই পরিবর্তিত পাঠক্রম অনুযায়ী বিভিন্ন বিষয়ের পাঠ্যপুস্তক (বিশেষতঃ বাংলা ভাষায় লিখিত) বাজারে এখনও অনেক কম। গণিত সম্বন্ধে বলা যায়—এ বিষয়ে বাংলা ভাষায় লিখিত কোন পাঠ্যপুস্তকই নেই। শিক্ষক শিক্ষণ বিভাগে অধ্যাপনার অভিজ্ঞতায় শিক্ষার্থীদের এ অভাবটি প্রতিনিয়ত উপলব্ধি করেছি। এই বিষয়ের উপর বাংলায় বই রচনা করার জন্য প্রাক্তন ও বর্ত্তমান ছাত্র ছাত্রীদের নিকট থেকে বহুদিন ধরেই তাগিদ পেয়ে আসছি। কিন্তু নানাবিধ ঝামেলার জন্য এতদিন সে কাজে অগ্রসর হতে পারি নি। অনেকের সুবিধা হবে—এই ভেবে ঝামেলা ও অন্যান্য নানাবিধ সমস্যা দূরে সরিয়ে বইটি লেখার জন্য আত্মনিয়োগ করেছিলাম। প্রথমেই জানিয়ে রাখি, প্রকাশক মহাশয় এর জন্য কিন্তু বেশী সময় নিতে দেন নি।

বইটিতে পশ্চিবমঙ্গের বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের বি.টি. পাঠক্রম অনুসরণ করার চেষ্টা করা হয়েছে। বিভিন্ন সমস্যাকে বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিকোণ থেকে দেখে সেগুলিকে সহজ ও সরল ভাষায় প্রকাশ করার চেষ্টা করেছি। তবে এ ব্যাপারে পূর্বসূরী কেউ না থাকায় মাঝে মাঝে বাধাও পেতে হয়েছে। ইংরেজী বই থেকে পাঠ শিখে নিতে সময়ও যেমন বেশী লাগে, পরিশ্রমও তেমনি কম হয় না। মাতৃভাষার মাধ্যমে ভাবের আদানপ্রদান সহজ হয় এবং বিষয়বস্তু সম্বন্ধে উপলব্ধিও স্থায়ী হয়। প্রধানতঃ এই কারণেই বাংলা-ভাষায় বইটির পরিকল্পনা রূপায়ণের চেষ্টা করেছি। শিক্ষক ও শিক্ষণ-শিক্ষার্থী মহলে আমার এই ক্ষুদ্র প্রচেষ্টা আদৃত হবে বলেই আশা রাখি এবং আমার এই প্রচেষ্টা থেকে কেউ সামান্যতম উপকৃত হলেই আমার শ্রমের সার্থকতা প্রতিপন্ন হবে।

প্রাক্তন সহকর্মী অধ্যাপক বন্ধুবর মোহিত রঞ্জন বন্দ্যোপাধ্যায় ক্রমাগত উৎসাহ দিয়ে আমার প্রচেষ্টাকে নিরন্তর শক্তি জুগিয়েয়ছেন। তা ছাড়া বর্ত্তমান সহকর্মী অধ্যাপক লক্ষীকান্ত ভট্টাচার্য্যও বইটি রচনার কাজে নানাভাবে আমাকে সাহায্য করেছেন। এ ছাড়া বইটি দ্রুত প্রকাশের পশ্চাতে যাঁদের সক্রিয় সহযোগিতা আছে, তাঁরা হলেন—বর্ত্তমান বর্ষের শিক্ষণরত শিক্ষক সর্বশ্রী শান্তিময় মিত্র, কার্ত্তিক চন্দ্র দে ও অসিতকুমার মিশ্র। এঁরাও বিভিন্ন ভাবে আমাকে সাহায্য করেছেন। অনুজ প্রতিম এই সমস্ত শিক্ষকবৃন্দকে মৌখিক কৃতজ্ঞতা জ্ঞাপন করে আমার ঋণের বোঝা হাল্কা করতে চাই না।

পরম পূজনীয় পিতৃদেব শ্রীযুক্ত লক্ষণ চন্দ্র চট্টরাজ বইটির পাণ্ডুলিপি পাঠ করে তার দোষ ত্রুটি নির্দ্ধারন করাতে আমাকে সাহায্য করেছেন। অন্যান্য বারের মত এবারেও সূচীপত্র প্রণয়ণ করবার ব্যাপারে সহধর্মিনী শ্রীমতী শুক্লা চট্টরাজ যথেষ্ট সাহায্য করেছেন। এঁদের সকলের নিকট আমার ঋণ স্বীকার করছি। শ্রীশৈবাল ভট্টাচার্য্য গ্রন্থটি প্রকাশ করার ভার নিয়েছিলেন বলেই সেটি আজ আত্মপ্রকাশের আলোক রশ্মি দেখতে পেয়েছে। এ সুযোগে তাঁকেও আমার অন্তরের সমূহ ধন্যবাদ জানিয়ে রাখছি।

অনিচ্ছাসত্ত্বেও দু-একটি ছাপার ভুল অনিবার্য্য ভাবে থেকে গেল। বলা বাহুল্য সময়াভাব' মুদ্রাযন্ত্রের খামখেয়াল ইত্যাদিই তার কারণ। আশা করি পাঠক-পাঠি-কারা সহানুভূতির সঙ্গে সেগুলি বিবেচনা করে তা মার্জনা করবেন। বারান্তরে সংশোধন করার ইচ্ছা থাকল। তা ছাড়া পুস্তকটি উন্নততর করার কোন প্রস্তাব ধন্যবাদের সঙ্গে গৃহীত হবে।

বিদেশী গ্রন্থকারদের রচিত কোন কোন প্রামাণ্য পুস্তক এই পুস্তক রচনায় বিশেষ ভাবে সাহায্য করেছে। পুস্তকটির শেষে সেগুলির একটি তালিকা (গ্রন্থঋণ) সন্নিবেশিত করা হয়েছে। উক্ত লেখকদের কাছে আমি বিশেষ ভাবে কৃতজ্ঞ।

শিক্ষক-শিক্ষণ বিভাগ
ফকিরচাঁদ কলেজ।
ডায়মণ্ড হারবার, ২৪-পরগণা।
১লা জানুয়ারী, ১৯৬৯

শ্রীশ্যামাপ্রসাদ চট্টরাজ
বি. এড. বিভাগীয় ভারপ্রাপ্ত অধ্যাপক

॥ দ্বিতীয় সংস্করণের ভূমিকা ॥

আমার" গণিত শিক্ষণ পদ্ধতি" বইটি যখন প্রথম প্রকাশ করি তখন মনে অনেক দ্বিধা ছিল, সংশয় ছিল। ভেবে উঠতে পারিনি, সকলে বইটিকে কিভাবে গ্রহণ করবেন। কিন্তু মাত্র এক বৎসরের মধ্যে প্রথম সংস্করণ সম্পূর্ণ নিঃশেষিত হওয়াতে বুঝতে পারলাম আমি অগ্নি-পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয়েছি। প্রকৃত প্রস্তাবে আমারটিই বাংলা ভাষায় সর্ব-প্রথম প্রকাশিত পূর্ণাঙ্গ বই। কাজেই যথেষ্ট পরিশ্রম করতে হয়েছিল, পরীক্ষা-নিরিক্ষা করতে হয়েছিল। ...আমার পরিশ্রম সার্থক জেনে অত্যন্ত আনন্দ লাভ করেছি। কিন্তু সঙ্গে সঙ্গে দুঃখও পেয়েছি। আমার বইটি প্রকাশিত হবার পর এবং শিক্ষক মহলে এর সমাদর লক্ষ্য করে কয়েকজন লেখক আমার বই থেকেই উপাদান সংগ্রহ করে রাতারাতি বই প্রকাশ করে তাদের বইকে" সর্বপ্রথম প্রকাশিত' সর্বোৎকৃষ্ট ইত্যাদি বিশেষণে ভূষিত করেছেন। যাইহোক আমি বিশ্বাস করি, চালাকির দ্বারা কোন মহৎ কাজ হয় না। যদি সত্য সত্যই আমার বই এর কোন গুণ থাকে, তবে অন্য বই এর মিথ্যাভাষণের আড়ম্বরে সে গুণ ঢাকা পড়বেনা, তা পূর্বের মতই সমাদর লাভ করবে।

দ্বিতীয় সংস্করণে অনেক অধ্যায় নূতন করে লিখেছি,অনেক নূতন জিনিস সংযোজিত করেছি। অনেক শিক্ষানুরাগী ব্যক্তি ও শিক্ষক-শিক্ষণরত ভাইবোন বইটির উন্নতি কল্পে অনেক মূল্যবান মতামত প্রেরণ করেছেন। সকলের মতামত সাদরে গ্রহণ করেছি। সকলের নাম দেওয়া সম্ভব হল না। কিন্তু যাদের নিকট থেকে সবচেয়ে বেশী মতামত পেয়ে উপকৃত হয়েছি, তাঁরা হলেন হুগলীর জগবন্ধু মুখার্জী গার্লস হাই স্কুলের পরিচালক সমিতির সম্পাদক শ্রীপদ রঞ্জন চট্টোপাধ্যায় ও গোবরডাঙ্গা হিন্দু কলেজের অধ্যাপক পরেশ সাহা। এদের সকলকে আমার আন্তরিক কৃতজ্ঞতা জ্ঞাপন করছি।

শিক্ষক-শিক্ষণ বিভাগ
ফকির চাঁদ কলেজ
ডায়মণ্ডহারবার, ২৪-পরগণা
৫ই জুলাই, ১৯৭০

শ্রীশ্যামা প্রসাদ চট্টরাজ
বি. এড বিভাগীয় ভারপ্রাপ্ত অধ্যাপক

সূচীপত্র

গণিত শিক্ষণ পদ্ধতি

প্রথম অধ্যায়

গণিত শাস্ত্র কাকে বলে ?

(What is Mathematics ?)

* "Mathematics is the gate and key of all Sciences"—Roger Bacon,

* "The Mathematics, carried along on his flood of Symbols, dealing apparently with purely formal truths, may still reach results of endless importance for our description of the physical universe"—Karl Pearson.

অতীতে জীবনযাত্রা ছিল অত্যন্ত সহজ। মানুষের জীবনযাপন প্রণালীও ছিল সরল। সেই সময় মানুষ, হিসাব করার জন্যও যে একটা শাস্ত্রের প্রয়োজন- তা অনুভব করত না। পুরোহিতদের প্রভাব ছিল অপরিসীম। তাঁরা কিছু কিছু হিসাব-শাস্ত্র জানতেন আর তা সাধারণ লোকের উপর প্রয়োগ করে তাঁরা বিস্ময়ের সৃষ্টি করতেন। বর্তমান শতাব্দীর পূর্ব পর্যন্ত শিক্ষিত লোকেরা ভাষামূলক শাস্ত্রের উপর যতটা আগ্রহ দেখাতেন, সংখ্যামূলক শাস্ত্রের উপর ততটা দেখাতেন না। পরে তাঁরা এই সংখ্যামূলক শাস্ত্রের দিকে আগ্রহ দেখাতে সুরু করলেন। তাঁদের মাত্রাতি- রিক্ত আগ্রহ লক্ষ্য করে **Burke** মন্তব্য করেছিলেন ঃ" The age of chivalry is gone. That of Sophists, economists and calculators has succeeded, and the glory of Europe is extinguished for ever."

আগেকার দিনে গণিতশাস্ত্রকে মনে করা হ'ত, এক শ্রেণীর লোকের অবসর বিনোদনের শাস্ত্র হিসাবে। কিন্তু বর্তমানে এটিকে অত্যন্ত প্রয়োজনীয় বিষয় বলেই ধরা হয়। গণিতশাস্ত্রের অন্যান্য প্রয়োজনীয়তার সঙ্গে সামাজিক প্রয়োজনীয়তাও আছে এবং সার্থক ও সুন্দর জীবনযাপন করতে হ'লে গণিতের সাহায্য শুধু প্রয়োজনীয়ই নয়, অত্যাবশ্যক।

শিল্প-কলা বা সাহিত্য যেমন মানসিক চিন্তাধারা ও কল্পনার ফল, গণিতও তেমন। পার্থিব জগতের উপর ভিত্তি করে গণিতের বাস্তবতা নির্ণয় করা হয় না। শিল্পীর সার্থক শিল্প বা কবির রসোত্তীর্ণ কবিতা যেমন আমাদের মনের দিগন্ত বিস্তৃত করে, গণিত তেমনি উপস্থাপন (Representation) এবং সংব্যাখ্যানের (Interpretation) সাহায্যে আমাদের মনের দিগন্ত বিস্তৃত করে। গণিতকে বলা যেতে পারে পার্থিব ও অপার্থিব জগতের মধ্যে যোগসূত্র স্থাপনকারী বিজ্ঞান। তবে এই বিজ্ঞানের প্রকৃতি অত্যন্ত জটিল এবং এটি আয়ত্ত করাও খুব সহজ নয়।

গণিতের সঙ্গে দর্শনশাস্ত্রের প্রভূত সাদৃশ্য আছে। বিষয়বস্তু, পদ্ধতি প্রভৃতির ক্ষেত্রে এই সাদৃশ্য দেখা যায়। প্রাচীন যুগে গ্রীক দার্শনিকগণ প্রকৃতির রহস্য উদ্ঘাটন করার জন্য গণিতের সাহায্য নিয়েছিলেন। তখন থেকে স্থরু করে পরবর্তীযুগের দার্শনিকেরাও গণিতকে বেছে নিয়েছেন দর্শনশাস্ত্রের সহায়ক হিসাবে। গণিতের সিদ্ধান্ত অভ্রান্ত এবং অপরিবর্তনীয় বলেই তাঁরা গণিতকে এতো বেশী পছন্দ করতেন। প্লেটো, অ্যারিষ্টটল, কাণ্ট, পার্সিনান্ প্রভৃতি দার্শনিক দক্ষ গণিতজ্ঞও ছিলেন।

যদিও গণিতের অপার্থিব জগতের সঙ্গেই বেশী সংস্রব দেখা যায়, তবুও একথা বলা যায়, পার্থিব জগতের অনেক বস্তুকেই গণিতের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা সম্ভব। যে কোন নতুন আবিষ্কারের ক্ষেত্রে বা আবিষ্কারের সংব্যাখ্যানের ক্ষেত্রে গণিতের প্রয়োগ অপরিহার্য। ডারউইন বলেন, "Every new body of discovery is mathematical in form, because there is no other guidance we can have."

গণিতকে বলা হয় ভাষার সংক্ষিপ্ততম অভিব্যক্তি। চিন্তাশক্তির পরিমিত ব্যবহার বা প্রয়োগ যে কিভাবে করা সম্ভব, তা একমাত্র গণিতের সাহায্যেই জানা যায়। আমাদের চিন্তাধারাকে প্রভাবিত করে আমাদের বিভিন্ন প্রক্ষোভগুলি। কিন্তু গাণিতিক চিন্তাধারায় প্রক্ষোভের কোন স্থান নেই। Mathematics কথাটীর উদ্ভবগ্রীক্ শব্দ mathemata থেকে। কথাটির অর্থ হল—শিক্ষণীয় বিষয়সমূহ। গণিত হল—বিজ্ঞান—বিশেষ জ্ঞানের একটী ক্ষেত্র। প্রথম দিকে গণিতের পরিধি ছিল অত্যন্ত ব্যাপক। কিন্তু বর্ত্তমানে গণিতের পরিধি কিছুটা সংকীর্ণ হয়েছে। পরিধি সংকীর্ণ হয়েছে এই অর্থে—যে আগে যে সমস্ত বিষয়কে গণিত বলে মনে করা হত —এখন সেগুলিকে পৃথক পৃথক বিষয় হিসাবে ধরা হয়। কিন্তু গণিতের নিজস্ব পরিধি বা ক্ষেত্র ক্রমশঃ বেড়েই চলেছে এবং বেড়েও চলবে।

পূর্বে গণিতশাস্ত্রের চর্চা করাটা বিশেষ এক শ্রেণীর শিক্ষিত লোকের একচেটিয়া

অধিকার বলে মনে করা হত। কিন্তু বর্তমান যুগে গণিতের গবেষণা এবং শিক্ষণের ক্ষেত্র অত্যন্ত বিস্তৃত হয়েছে। বিভিন্ন বিষয়ে এখন গণিতের প্রয়োগ অপরিহার্য হয়ে পড়েছে। পদার্থবিদ্যা, যন্ত্রবিদ্যা, জীববিদ্যা, অর্থনীতি বা সমাজবিদ্যা প্রতি ক্ষেত্রেই গণিতের ব্যবহার অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। গণিতের ব্যবহার এখন জীবনের প্রতিটি স্তরে। সাধারণ ব্যবহারের জন্য হিসাব করার যন্ত্র, ওজন করার যন্ত্র ইত্যাদি আবিষ্কৃত, হয়েছে যার মূল-নীতি হল গণিত।

যাই হোক ভাবের গভীরতায় ও ভাষার অলঙ্করণে গণিতের সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব নয়। স্বর, ছন্দ, তান, লয় প্রভৃতি সম্বন্ধে ধারণা না থাকলে যেমন সংগীতের সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব নয়,' বা সংজ্ঞা দিলেও উপলব্ধি করা সম্ভব নয়, তেমনি গণিতশাস্ত্রের অন্তর্নিহিত ভাব বা বিষয়বস্তু উপলব্ধি করতে না পারলে সংজ্ঞা দেওয়া বা সংজ্ঞা উপলব্ধি করা সম্ভব নয়। বিভিন্ন সংজ্ঞার মধ্যে কয়েকটি সংজ্ঞা উল্লেখ করা হল :—

১। প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তে উপনীত হতে সাহায্য করে যে বিজ্ঞান, তার নামই গণিত।

২। সংখ্যাশাস্ত্রের (Science of Numbers) বিজ্ঞানের নামই গণিত।

৩। যে শাস্ত্রের সাহায্যে নির্ভুল সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারা যায়, তার নামই গণিত।

৪। অমূর্ত চিন্তনে সাহায্য করে যে বিজ্ঞান. তার নাম গণিত।

৫। প্রতীকমূলক ভাষাই হল গণিত (Symbolic language)

৬। অমূর্ত পদ্ধতি (গাণিতিক) ও তাদের বাস্তব প্রয়োগকেই গণিত বলে। এখানে J. W. Young অমূর্ত পদ্ধতি বলতে কিন্তু প্রতীকের কথাই বলেছেন।

গণিতের বিভিন্ন সংজ্ঞা পর্য্যালোচনা করলে দেখা যাবে, কোন সংজ্ঞাটিই স্বয়ংসম্পূর্ণ, পরিষ্কার ও প্রাঞ্জল নয়। গণিত হ'ল একটী প্রয়োজনীয় বিজ্ঞান যা দেশ, কাল বা পাত্রের সংকীর্ণ গণ্ডীর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে না; একটি এমন বিজ্ঞান যা প্রগতির সঙ্গে সমান তালে চলতে পারে এবং বিভিন্ন ধারণা সম্বন্ধে, তা সে মূর্ত্তই হোক্ আর অমূর্ত্তই হোক্ মৌলিক তথ্য পরিবেশন করে। পরিশেষে আমরা এই কথা বলতে পারি, যে সমস্ত বিজ্ঞানের মূল প্রবেশদ্বারই হ'ল গণিত ও গণিতই হল প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তের বিজ্ঞান।

দ্বিতীয় অধ্যায়

গণিত শিখণের উপযোগিতা ও উদ্দেশ্য

(Aims and Objectives of Teaching Mathematics)

স্কুলে যে সমস্ত বিষয় সাধারণতঃ পড়ানো হয়, সেগুলির উদ্দেশ্য দ্বিমুখী।—একটি হ'ল **সাধারণ উদ্দেশ্য**, আর একটি হ'ল **বিশেষ উদ্দেশ্য**। বিষয়টির পাঠের মাধ্যমে ঐ উদ্দেশ্যগুলি রূপায়িত করা হয়। সচরাচর কোন বিষয়ের পাঠদানের ফলে সেই বিষয়টি সম্বন্ধে শিক্ষার্থী জ্ঞানলাভ করে এবং কতকগুলি সু-অভ্যাস গঠন করে।

এখন দেখা যাক গণিত শিখনের উদ্দেশ্য কি? যে সমস্ত উদ্দেশ্য রূপায়িত করার জন্য গণিত পড়ানো হয়, সেগুলিকে প্রধানতঃ **তিন ভাগে** ভাগ করা হয়। যথা—

(১) গণিতের **ব্যবহারিক (Practical)** উদ্দেশ্য।

(২) **কৃষ্টিমূলক (Cultural)** উদ্দেশ্য এবং

(৩) **শৃঙ্খলামূলক (Disciplinary)** উদ্দেশ্য

১। ব্যবহারিক উদ্দেশ্য—

গণিতের ব্যবহারিক উদ্দেশ্য অত্যন্ত গভীর এবং ব্যাপক। বর্তমান যুগকে বলা হয় বিজ্ঞানের যুগ, আর বিজ্ঞান তখনই নির্ভুল হয়, যখন গণিতের ব্যবহার করা হয়। প্রত্যক্ষ ভাবে না হলেও পরোক্ষভাবে আধুনিক সভ্যতার একটা বড় অংশ গণিতের উপর নির্ভরশীল। প্রতিটি মানুষ যেন গণিতের সমুদ্রে সাতার কাটছে। ঘুম থেকে ওঠার থেকে ঘুমতে যাওয়া পর্য্যন্ত, জীবনের প্রতিটি মুহূর্ত্তে বা প্রতিটি পদক্ষেপে প্রত্যেক মানুষই জ্ঞাতসারে বা অজ্ঞাতসারে গণিত ব্যবহার করে চলেছে। অবশ্য একথা সত্য যে, হিসাব করতে গিয়ে ব্যবসায়ী বীজগণিত বা ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করছেন না বা ইন্‌জিনিয়ার, সার্ভেয়ার প্রভৃতি যন্ত্রবিদ্ যখন যান্ত্রিকভাবে কোন সূত্রের প্রয়োগ করেন, তখন সেই সূত্রের আভ্যন্তরীণ গাণিতিক তত্ত্বের কথা চিন্তা করেন না। কিন্তু তবুও একথা বেশ জোর দিয়েই বলা যেতে পারে যে, প্রতিটি লোক তার দৈনন্দিন জীবনে গণিত প্রয়োগ না করে চলতে পারে না। প্রায় প্রত্যেককে হিসেব করতে হয়, বিল তৈরী করতে হয়, বিল পরীক্ষা করতে হয় বা টাকা-পয়সা গননা করতে হয়। আবার

নাপিত, দর্জি, ছুতোর বা রাজমিস্ত্রী—এরা প্রত্যক্ষভাবে গণিতের ব্যবহার করে থাকেন। অশিক্ষিত কুলি বা মুটে মজুরও দূরত্ব অনুযায়ী ভাড়ার হিসেব করে এবং সেইভাবে ঠিক ঠিক ভাড়া আদায় করে গণনা করে। পোষ্ট অফিসে, দোকানে, ব্যাঙ্কে, রেল-ষ্টেশনে, স্কুল-কলেজে এমন কি বিয়ে বাড়ীর নিমন্ত্রণে কোথায় গণিতের ব্যবহার নেই ? আমাদের সমাজ জীবনেও গণিতের স্থান বেশ উচু। ঘর-বাড়ীর নক্সা তৈরী, আসবাবপত্রের আকৃতি, ড্রইং-রুমে সেগুলি কিভাবে সাজানো হবে, এ সমস্ত ব্যাপারেও গণিত আমাদের সাহায্য করে। গণিত না থাকলে জীবনযাত্রা অচল হয়ে পড়ত। এ ছাড়া বৈদ্যুতিক পাখা, রেফ্রিজারেটার, রেডিও, টেলিভিসান, সিনেমা—এদের আবিষ্কারের ক্ষেত্রেও গণিতের অবদান কম নয়। গণিতই হল বৈজ্ঞানিকদের শ্রেষ্ঠ হাতিয়ার।

এখন দেখা যাক্ দৈনন্দিন জীবনে গণিতের আর কি ব্যবহার আছে। অবশ্য গণিত বলতে এর বিভিন্ন শাখা—যথা বীজগণিত, ত্রিকোণমিতি, পরিমিতি, এ সমস্তকেও অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। মানুষের মনে যখন প্রথম প্রশ্ন জাগলো—কয়টি ? কতটা ? তখনই তার সমাধানের জন্য গণিতের ডাক পড়ল। পাটীগণিতের জটিল সমস্যা সমাধানের জন্য বীজগণিত ব্যবহৃত হল। গ্রহ-নক্ষত্রের অবস্থান জানার জন্য ত্রিকোণমিতি, জমি জরিপ করার জন্য পরিমিতি, ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তন জানার জন্য ক্যালকুলাস প্রভৃতির ব্যবহার অবশ্যম্ভাবী হয়ে পড়ল। আবার সমাজের তথা দেশের প্রয়োজনে তথ্য সংগ্রহের জন্য ব্যবহৃত হল পরিসংখ্যান। এক কথায় জ্ঞানের সামগ্রিক পরিমাপের জন্যই গণিতের ব্যবহার বৃদ্ধি পেতে লাগলো।

বর্তমান যুগ হল "যন্ত্রের যুগ"। এক দেশ আর এক দেশকে প্রতিযোগিতায় হারিয়ে দিয়ে এগিয়ে যেতে চায়। যে দেশ গণিতে যত বেশী উন্নত, তার শিল্প **(Industry)**, কৃষি, বাণিজ্য ও তত উন্নত হবে। কাজেই দেশের উন্নতির জন্যও গণিতের প্রয়োগ কম গুরুত্বপূর্ণ নয়।

আর কয়েকটা উদাহরণ দিলেই দৈনন্দিন জীবনে গণিতের ব্যবহারিক রূপটি স্পষ্ট হয়ে উঠবে। গণিতের ব্যবহার সকলকেই করতে হয়, যদিও ব্যবহারের মাত্রাটা সকলের এক নয়। একজন দিনমজুর তার সামান্য মাইনের হিসেব হয়তো নয়া-পয়সার সাহায্যেই করতে পারে, কিন্তু ভারতের অর্থমন্ত্রীর বাজেটের হিসেব থাকে কোটি-টাকার অংকে। তেমনি আমাদের পাড়ার পানওয়ালা তার লাভলোকসান

হিসেব করে নয়া-পয়সাতে, আবার টাটা, বিড়লা, ডালমিয়া সেই হিসেবই করেন কোটি টাকাতে। গ্রামের একজন সাধারণ লোক যখন মাটির বাড়ী তৈরী করে, তখন সে যেভাবে হিসেব করে, শহরের শ্রেষ্ঠ স্থপতি মার্বেল-প্রাসাদ তৈরী করার সময় সেইভাবেই হিসেব করে; স্কুলের ছাত্র যখন ঘুড়ি ওড়ায়, তখন সে যেভাবে ঘুড়ির ভারসাম্য বজায় রাখার চেষ্টা করে, কৃতী পাইলটও তার এরোপ্লেনের ভারসাম্য সেইভাবেই বজায় রাখে। কাজেই দেখা যাচ্ছে, প্রয়োজন অনুযায়ী প্রতিটি লোককে কিছু না কিছু গনিত ব্যবহার করতেই হয়।

দৈনন্দিন জীবন ছাড়াও আরো অন্যান্য অনেক ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়। যেমন :—

(ক) ভৌত বিজ্ঞানে গণিতের ব্যবহার করা হয়;
(খ) অন্যান্য বিজ্ঞানে গণিতের প্রয়োগ দেখা যায়;
(গ) সমাজ বিজ্ঞানে গণিতের ব্যবহার;
(ঘ) ব্যবসা-বাণিজ্য ক্ষেত্রে গণিতের প্রয়োগ;
(ঙ) স্বয়ংক্রিয় যন্ত্রে (Computing machines) গণিতের প্রয়োগ,
(চ) চিকিৎসা শাস্ত্রে গণিতের প্রয়োগ;
(ছ) যুদ্ধবিদ্যাতে গণিতের প্রয়োগ;
(জ) শিল্প কলাতে গণিতের প্রয়োগ;
(ঝ) খেলাধুলাতে গণিতের প্রয়োগ ইত্যাদি।

অর্থাৎ এক কথায় বলা যেতে পারে, আমাদের জীবনে এমন কোন দিক নেই যেখানে গণিত তার আলোকরশ্মি বিচ্ছুরিত করে নি। বর্তমান জীবনে বিজ্ঞানের প্রভাবই সবচেয়ে বেশী অনুভূত হয়; আর বিজ্ঞানের প্রাণকেন্দ্রই হ'ল গণিত। Roger Bacon এর মতে; Mathematics is the gate and key of all Scienees; আবার Comte'র মতে: All Scientific education which does not commence with mathematics is of necessity defective at its foundation, কাজেই দেখা যাচ্ছে, কোন একটি বিজ্ঞানকে সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত করতে হলে, বা প্রাকৃতিক ঘটনাসমূহের ব্যাখ্যা করতে হলে কিংবা মানব জীবনকে সুশৃঙ্খল ও নিয়মানুবর্তী করার জন্য গণিতের প্রয়োগ অপরিহার্য।

২। কৃষ্টিমূলক উদ্দেশ্য ঃ—

গণিত শিখনের কৃষ্টিমূলক উদ্দেশ্যটি তখনই পরিষ্কার হবে যখন গণিত শিখনের ফলে আমরা কি কি প্রয়োজনীয় অভ্যাস গড়ে তুলতে পারি, তার আলোচনা করব। গণিত-ই একমাত্র শাস্ত্র যাতে স্মৃতি তথা মুখস্থ করার স্থান অত্যন্ত কম এবং বিচার করণের স্থান অত্যন্ত বেশী। কাজেই গণিত শিখনের উদ্দেশ্য মুখস্থ করার চর্চ্চা নয়, অন্যান্য বিষয় উপলব্ধি করার বা বিচারকরণ ক্ষমতার চর্চ্চা করা। যিনি গণিতের অনেক তত্ত্ব মুখস্থ করে রেখেছেন, তাঁকে বড় গণিতজ্ঞ বলা চলে না। কিন্তু যিনি বুদ্ধিমানের মত গণিতের তত্ত্বের প্রয়োগ করতে পারেন, তাঁকেই বড় গণিতজ্ঞ বলা চলে। শেষোক্ত শ্রেণীতে যাঁরা আছেন, তাঁরা নতুন তত্ত্ব আবিষ্কার করতে পারেন; কোন তত্ত্ব ভুলে গেলে তা নতুন করে তৈরী করে নিতে পারে। এইজন্যই গণিত শিখনের উদ্দেশ্য কেবল নীরস তত্ত্ব আহরণ করা নয়; এর উদ্দেশ্য হল যুক্তিশক্তির যথোপযুক্ত বিকাশ সাধনে শিক্ষা দেওয়া ও সাহায্য করা। গণিত শিখনে সবচেয়ে প্রয়োজনীয় বস্তু হল—পদ্ধতি (Method)। বাস্তবিক পক্ষে যে পদ্ধতিতে গণিতের শিক্ষা দেওয়া হয়, তাতে বিচারকরণের শিক্ষাই বহুলাংশে দেওয়া হয়, যদিও কিছু কিছু তত্ত্ব ও তথ্য মুখস্থ করতে বলা হয়ে থাকে। কিন্তু গাণিতিক বিচারকরণে কতকগুলি বৈশিষ্ট্য থাকে। সেগুলি হল ঃ—

(ক) **সরলতা** (**Simplicity**) ঃ—শিখন পদ্ধতির মূল কথাই হ'ল—সরল বিষয় থেকে কঠিন বা জটিল বিষয়ের শিক্ষা দেওয়া। এতে শিখন অত্যন্ত কার্যকরী হয়। গণিত শিখনে সরলতার স্থান সর্বাগ্রে। সহজ জিনিষ, সহজ অধ্যায়, সহজ অঙ্ক না শিখলে কঠিন অংশে যাওয়া যায় না। শতকিয়া, নামতা, ইত্যাদি না জানলে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ ইত্যাদি শেখানো যায় না। তেমনি কোন একটি নিয়ম প্রথম শিখাবার সময় পরিচিত দ্রব্যের, ঘটনার বা বাস্তব অভিজ্ঞতার সাহায্য লওয়া চলতে পারে। জটিল অঙ্ক অপেক্ষা মানসাংক অধিকতর চিত্তাকর্ষক।

(খ) **যথার্থতা** (**Accuracy**) ঃ—"যথার্থ বা সঠিক চিন্তন করার ক্ষমতা অর্জন" হ'ল শিক্ষার বিভিন্ন উদ্দেশ্যের অন্যতম। সঠিক চিন্তন হল সাফল্যের চাবিকাঠি। অধিকাংশ ছাত্রেরই সঠিক চিন্তনের বা চিন্তাধারা প্রকাশ করার ক্ষমতা থাকে না। তারা সমস্যাগুলির সমাধান করে যান্ত্রিক উপায়ে এবং সমস্যাগুলির আভ্যন্তরীণ অর্থ হৃদয়ঙ্গম করার কোন চেষ্টাই করে না। কিন্তু অংকের ক্ষেত্রে যান্ত্রিক পদ্ধতি বা ভাষার

কারুকার্য্য সমস্যার সমাধানে কোন সাহায্যই করে না। অঙ্কে মিথ্যা বলার কোন সুযোগ থাকে না কেবলমাত্র সঠিক চিন্তন ও সঠিক পদ্ধতিতেই অংকের সমাধান করা সম্ভব। কাজেই অংকের অনুশীলনের ফলে সর্বক্ষেত্রে সঠিক চিন্তনের ক্ষমতা এবং অভ্যাস অর্জিত হয়।

(গ) **উত্তরের নিশ্চয়তা (Certainty of Results)** :—অংকের উত্তরের মধ্যে বিভিন্নতা বা বৈষম্য থাকবে না। 8 কে 9 দিয়ে যে ভাবেই গুণ করা যাক না কেন, উত্তর সব সময়ই 72 হবেই। এই উত্তর যে সঠিক উত্তর, তা পরীক্ষা করা যায় 8 কে পর পর 9 বার যোগ করে, 9 কে 8 দিয়ে গুণ করে, আর 9 কে পর পর 8 বার যোগ করে বা 72 কে 8 অথবা 9 দিয়ে ভাগ করে। নির্ভুল ভাবে একটি অংকের সমাধান করে ছাত্রের মনে যে আনন্দের সঞ্চার হয়, সেই আনন্দের ভাবটি চিরস্থায়ী না হলেও দীর্ঘস্থায়ী করার জন্যই সে প্রতিটি অংকের নির্ভুল উত্তর নির্ণয় করতে চেষ্টা করবে। অন্যান্য ক্ষেত্রেও সে নির্ভুল ভাবে সমস্যা সমাধানের চেষ্টা করবে।

(ঘ) **মৌলিক ক্ষমতা (Originality)** :—ছাত্রেরা স্কুলে যে সমস্ত বিষয় অধ্যয়ন করে, সেগুলি তারা ভালো করে মুখস্থ করে এবং পরে প্রয়োজন মত সেগুলি স্মরণ করে। যখন সে ইতিহাসের কোন ঘটনার পুনরুল্লেখ করে বা কোন অর্থনৈতিক তত্ত্বের ব্যাখ্যা করে, তখন সেই স্মৃতির সাহায্যই বেশী গ্রহণ করে। অর্থাৎ সেই ব্যাখ্যার মধ্যে তার মৌলিক কোন ছাপ থাকে না। কিন্তু বিভিন্ন অংকের সমাধান কোন একটি সার্বজনীন সূত্র ধরে হয় না। কাজেই এই ক্ষেত্রে ছাত্রকে তার নিজস্ব মানসিক ক্ষমতা প্রয়োগ করতে হয়। এই প্রয়োগক্ষমতাই হল তার মৌলিক ক্ষমতা। এই মৌলিক ক্ষমতার উৎকর্ষ সাধিত হলে তবেই ভবিষ্যত জীবনের বিভিন্ন সমস্যাগুলির সুষ্ঠু সমাধান সম্ভব হয়।

(ঙ) **জীবনের সঙ্গে যোগসূত্র (Similarity to life)** :—অনেক সমালোচক বলেন গণিত বিশেষ বিশেষ কয়েকটি ক্ষেত্রে কার্যকরী, যেমন-বিজ্ঞান-বিষয়ক চিন্তা বা যুক্তি-সম্মত বিচারকরণ ইত্যাদি। দৈনন্দিন জীবনেও যে গণিতের ব্যবহার থাকতে পারে এ কথা তাঁরা বিশ্বাস করেন না। গণিতের ক্ষেত্রে চিন্তা করার যে বিশেষ একটি অভ্যাস অর্জিত হয় সেটিকে দৈনন্দিন বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করা মোটেই অসম্ভব ব্যাপার নয়। অনেক সময় আমরা এই অভ্যাস প্রয়োগ করি কিন্তু সেই প্রক্রিয়াটি আমাদের সম্পূর্ণ অগোচরেই থাকে। পরিষ্কার পরিচ্ছন্নতা, চিন্তনের যাথার্থ্য ইত্যাদি গণিত শিখনের ক্ষেত্রে যেমন প্রয়োজনীয় দৈনন্দিন জীবনেও তেমন।

(চ) যুক্তির পরিমান (**Amount of Reasoning**) :—গণিতই একমাত্র বিষয় যেখানে স্মৃতির প্রভাব কম এবং যুক্তির প্রভাব বেশী। যদি এই বিষয়টি ঠিক-মতো পড়ান যায়, তাহলে দেখা যাবে সমস্ত বিষয়টি যুক্তির উপর ভিত্তি করে দাঁড়িয়ে আছে। অত্যন্ত জটিল অধ্যায় বা কঠিন সমস্যা যুক্তির সাহায্যে সহজ সরলরূপ পরিগ্রহ করে। একথা অবশ্য ঠিক যে কিছু কিছু সূত্র (formula) এবং তথ্য (theory) মুখস্থ করতে হয়। কিন্তু তাদের সংখ্যা অত্যন্ত কম। দৈনন্দিন জীবনে আমাদের বহুবিধ সমস্যার সম্মুখীন হতে হয়। কিন্তু বিভিন্ন পদ্ধতির মধ্যে কোন্ পদ্ধতি গ্রহণ করলে সমস্যার সুষ্ঠু সমাধান করা সম্ভব তা নির্ণয় করা হয় যুক্তির দ্বারা। গণিতের চর্চার পরিমান যত বেশী হয় যুক্তির পরিমানও তত বেশী হয়।

(৩) শৃঙ্খলামূলক উদ্দেশ্য :—

যে বিষয়ে যুক্তির প্রয়োগ যত বেশী থাকে সেই বিষয়ের শৃঙ্খলামূলক মূল্যও তত বেশী। অনেক মনোবিজ্ঞানী বলেন শৃঙ্খলামূলক মূল্য কোন একটি বিষয়ের মধ্যে বা একই বিষয়বস্তু সন্নিহিত বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে তা হয় না। শৃঙ্খলামূলক মূল্য ছাত্রের মনের মধ্যে এমন একটি বিশেষ পরিবর্তন ঘটায় যা চিরস্থায়ী এবং যা বিভিন্ন বিষয়ের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা সম্ভব। বাস্তবে এমন অনেক ঘটনা দেখা যায় যে, কোন একজন ছাত্রের গণিতে আসক্তি বাড়ার ফলে অন্যান্য বিষয় পাঠের আগ্রহ বৃদ্ধি পায় এবং গণিতে আসক্তি কমার ফলে আগ্রহও কম হয়।

অন্যান্য উদ্দেশ্য :—

উপরোক্ত তিনটি প্রধান উদ্দেশ্য ছাড়াও গণিত শিখনের আরও কয়েকটি অপ্রধান উদ্দেশ্য আছে। সেগুলি হল—

(১) সামাজিক উদ্দেশ্য

(২) নৈতিক উদ্দেশ্য

(৩) সৌন্দর্য্যমূলক উদ্দেশ্য

(৪) জ্ঞানমূলক উদ্দেশ্য

(৫) প্রতীকমূলক ভাষা ব্যবহার করার উদ্দেশ্য

(৬) আবিষ্কারের উদ্দেশ্য ইত্যাদি।

গণিত শিখনের ফলে ছাত্রদের মধ্যে আরও কিছু পরিবর্তন দেখা যায়। এই পরিবর্তনগুলির মধ্যে উল্লেখযোগ্য কয়েকটি পরিবর্তন হল মনোযোগদানের ক্ষমতা বৃদ্ধি, আবিষ্কার করার ক্ষমতা অর্জন, আত্মনির্ভরতা, চরিত্রগঠন, কল্পনাশক্তির সুষ্ঠু ব্যবহার ইত্যাদি।

পরিশেষে একথা বলা যেতে পারে যে, গণিত শিখন শিক্ষককেন্দ্রিক বা শিশু-কেন্দ্রিক না হয়ে গণিতকেন্দ্রিক হবে। এর জন্য শিক্ষকদের যথোপযুক্ত শিক্ষণ থাকা প্রয়োজন, গণিতের পাঠক্রমের আমূল সংস্কার প্রয়োজন এবং বিভিন্ন স্কুলের শিক্ষকদের মধ্যে একটা ঘনিষ্ঠ যোগাযোগ থাকা প্রয়োজন। গণিত শিখনের কার্যসূচী এমনভাবে প্রণয়ন করতে হবে যাতে ছাত্ররা যুক্তির ব্যবহার করতে পারে, চিন্তন এবং মুখস্থ করার পার্থক্য বুঝতে পারে, বিভিন্ন বিষয় পাঠের সময় যুক্তিসম্মত পদ্ধতি গ্রহণ করতে পারে, স্বনির্ভর হতে পারে এবং গণিত তথা অন্যান্য বিষয় পাঠে আগ্রহী হয়। গণিত যেমন বিজ্ঞানের হাতে অস্ত্র, তেমনি অন্যান্য বিষয়ের ক্ষেত্রেও একটি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় কৌশল।

তৃতীয় অধ্যায়

গণিতের সঙ্গে অন্যান্য বিজ্ঞানের সম্বন্ধ

(Relation of Mathematics with other Sciences)

বিংশ শতাব্দীকে বলা হয় বিজ্ঞানের যুগ। ঐ শতাব্দীতে বিভিন্ন দিকে বিজ্ঞানের জয়যাত্রা অব্যাহত গতিতে এগিয়ে চলেছে। বর্তমানে অধিকাংশ শিক্ষিত ব্যক্তিই এই ধারণা পোষণ করেন যে, বর্তমান সভ্যতার অগ্রগতি সম্ভব হয়েছে বিজ্ঞানের অগ্রগতির জন্যই। অবশ্য বিজ্ঞান বলতে তাঁরা পদার্থ-বিদ্যা, রসায়ণ-বিদ্যা, প্রাণীবিদ্যা, জ্যোর্তিবিদ্যা এই সমস্তকেই বুঝিয়ে থাকেন। তাঁরা কিন্তু বিভিন্ন বিজ্ঞানের অগ্রগতিতে অংকশাস্ত্রের অবদানের কথা চিন্তাই করেন না। অবশ্য এর অন্যতম কারণ হিসাবে বলা যেতে পারে, স্কুলে বা কলেজে যখন অংকশাস্ত্র পড়ানো হয়, তখন বাস্তব জগতের সঙ্গে বা দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গে তার সম্বন্ধ কতটুকু তা পরিষ্কারভাবে আলোচনা করা হয় না। কিন্তু বিজ্ঞানজগতে সবচেয়ে বেশী প্রয়োজনীয় ও কার্যকরী বিষয় হল—গণিত। গণিতের কোন সাহায্য না নিয়েই সভ্যতার অগ্রগতি সম্ভব—এ ধারণা সম্পূর্ণ ভ্রান্ত। ষ্টীম-ইঞ্জিন, মোটর-গাড়ী, এরোপ্লেন প্রভৃতি তৈরী করার আগে নক্‌সা একে নিতে হয়। আর এই নক্‌সা আঁকার জন্যই গণিতের সাহায্য নিতে হয়। যেখানেই নিখুত পরিমাপের প্রয়োজন, সেখানেই গণিত অপরিহার্য। এখন দেখা যাক গণিত কিভাবে বিভিন্ন বিজ্ঞানকে প্রভাবিত করেছে।

১। পদার্থ-বিদ্যা, রসায়ন বিদ্যা ও অন্যান্য ভৌত বিজ্ঞানে গণিতের ব্যবহার ঃ—বিজ্ঞান জগতে নিখুত ও সহজবোধ্য প্রতীকের প্রচলন সম্ভব হয়েছে গণিতের জন্যই। তাছাড়া ভৌত বিজ্ঞানগুলির মধ্যে বিভিন্ন সম্বন্ধ নির্ণায়ক সমীকরণের উদ্ভবও গণিত থেকেই। বিজ্ঞানের অনেক নিয়মাবলী, সূত্র বা প্রাকৃতিক ঘটনা গণিতের সাহায্যে বা লেখচিত্রের সাহায্যে খুব সহজ ও সুন্দর ভাবে প্রকাশ করা যায়। আবার বৈজ্ঞানিক ঘটনাবলীর সংব্যাখ্যানের ক্ষেত্রেও গণিতের সাহায্য নিতে হয়। গবেষণার ক্ষেত্রেও বিজ্ঞান জগতে অকৃত্রিম বন্ধু হ'ল গণিত। বিজ্ঞান তখনই নিখুত হয় যখন গণিতের প্রয়োগ সম্ভব হয়। আর গণিতকে বাদ দিয়ে বিজ্ঞান হয়—অসম্ভবও অবাস্তব।

২। **গণিত ও পূর্ত বিদ্যা** ঃ—প্রকৃতির শক্তির উৎস অসীম। এই শক্তিকে মানুষের সেবায় বা কল্যাণকর কাজে নিয়োজিত করাই হল পূর্তবিদ্যার উৎস। এ কথা কারো অজানা নয় যে এই পূর্তবিদ্যার ভিত্তিই হ'ল গণিত। যে কোন একটি প্রকল্পের ভার হাতে নিলেই এঞ্জিনিয়ারদের পর্যবেক্ষণ, পরিমাপ ইত্যাদি কতকগুলি সমস্যার সম্মুখীন হতে হয়। গণিতের সাহায্যে এই সমস্যাগুলির সমাধান করার পর আসল কাজটি বাস্তবে রূপায়িত করার পথে অগ্রসর হওয়া সম্ভব হয়। ধরা যাক-কোন একজন এঞ্জিনিয়ারকে নির্দিষ্ট সময়ে সেতু নির্মাণ করতে হবে। নির্মাণ করার আগে তাঁকে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা ইত্যাদি মাপ করতে হবে। প্রত্যহ কি পরিমাণ কাজ হলে নির্দিষ্ট সময়ে কাজটি শেষ হবে তা নির্ণয় করতে হবে ; ঐ পরিমাণ কাজ করতে প্রত্যহ কতজন লোক লাগবে ; তাদের বেতন কত দিতে হবে ; মোট কত খরচ হবে ইত্যাদি নির্ণয় করার ব্যাপারে গণিতের সাহায্য অপরিহার্য। কাজেই এঞ্জিনিয়ারের পক্ষে গণিতের সাহায্য না নিয়ে বেশীদূর অগ্রসর হওয়া সম্ভব নয়।

৩। **জীববিজ্ঞান ও গণিত** ঃ—জীববিজ্ঞানীরাও গণিত বিশেষতঃ পরিসংখ্যানের যথেষ্ট প্রয়োগ করে থাকেন। বিভিন্ন জীবের মধ্যে শ্রেণীবিভাগ, জন্ম-মৃত্যুর হার বা নিয়মাবলী ইত্যাদি নির্ধারণের ক্ষেত্রে গণিত অপরিহার্য। টমাস ম্যালথাস, ডারউইন, আলফ্রেড্ রাসেল ওয়ালেশ, মেণ্ডেল ইত্যাদি জীববিজ্ঞানী গণিতের সাহায্যে তাঁদের সূত্রাবলী প্রকাশ করেছেন ও সেগুলির ব্যাখ্যা করেছেন। আবার বর্তমান যুগে Bio-math নামক একটি নতুন শাস্ত্রের উদ্ভব হয়েছে। এই শাস্ত্রটির দুটি দিক। একটি হল Bio-Physics এবং অপরটি হল Bio-Chemistry। অবশ্য শেষোক্ত বিষয় দুটি এখন পৃথক পৃথক বিজ্ঞান-বিষয় হিসাবে পরিগণিত হয়। কাজেই পদার্থ বিদ্যা বা রসায়ণে যেমন গণিত প্রয়োগ করতে হয়, জীববিজ্ঞানেও ঠিক সেই-ভাবেই গণিত প্রয়োগ করতে হয়। জীববিজ্ঞানীকেও পর্যবেক্ষণ পদ্ধতির সাহায্যে বিভিন্ন জীবকে বিভিন্ন শ্রেণীতে শ্রেণীভুক্ত করতে হয় এবং তার পরিপ্রেক্ষিতে সাধারণ সূত্র নির্ণয় করতে হয়। পর্যবেক্ষণ বা পরীক্ষণের ক্ষেত্রে গণিতের সাহায্যেই নিখুঁত পরিমাপ পাওয়া সম্ভব।

৪। **চিকিৎসা বিজ্ঞান ও গণিত** ঃ—চিকিৎসা বিজ্ঞানের ক্ষেত্রেও গণিতের নিজস্ব একটি স্থান আছে। অবশ্য এখানেও পরিসংখ্যানের ব্যবহারই অধিক। চিকিৎসা বিজ্ঞানের বিভিন্ন দিকে গণিতের ব্যবহার পরিলক্ষিত হয়। একটা সহজ

উদাহরণ দেওয়া যাক। জন্মের পর নয়মাস বয়স পর্যন্ত শিশুর বৃদ্ধিকে নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়ঃ—

$$\log \frac{x}{341 \cdot 5.x} = k(t - 1 \cdot 66)$$ যখন x হ'ল আউন্সে ওজন t হ'ল মাস হিসাবে বয়স এবং k একটি ধ্রুবক।

৫। **অর্থনীতি ও গণিত** ঃ—অর্থনীতিকে একটি সামাজিক বিজ্ঞান বলা যেতে পারে। অর্থনীতির ক্ষেত্রে গণিতের পদ্ধতি ও পরিভাষার ব্যবহার অত্যন্ত বেশী। বর্ত্তমান যুগে অর্থনীতির বিভিন্ন ক্ষেত্রে গণিত ও পরিসংখ্যানের ব্যবহার যথেষ্ট বৃদ্ধি পেয়েছে। বলতে গেলে অর্থনীতির প্রায় সব সূত্রকেই গণিতের সাহায্যে প্রকাশ করা সম্ভব। একটা উদাহরণ দেওয়া যাক। কোন জিনিষের চাহিদা সেই জিনিষটির দামের উপর নির্ভরশীল। যদি D হয় চাহিদা আর P হয় দাম, তবে D = f (P)। PD হল হল বিক্রীত জিনিষের মোট দাম। P বা D সঠিক কত, তা না জানলেও এই সম্বন্ধটি যে সব সময় ঠিক, একথা বলা যেতে পারে। এই সম্বন্ধের সাহায্যেই আমরা বলতে পারি P কত হলে বিক্রেতার লাভ সবচেয়ে বেশী হবে। এ ছাড়া জীবন-বীমা, মূলধন, জাতীয় আয়, ব্যাংক ইত্যাদি ক্ষেত্রে গণিত ব্যবহার ক্রমশঃ বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হচ্ছে ব'লে অনেক বিশ্ববিদ্যালয়ে অর্থনীতি বিষয়ে 'উন্নত গণিতকে' (Advanced Mathematics) একটি আবশ্যিক বিষয় হিসাবে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে।

মনোবিজ্ঞান ও গণিত ঃ—যদিও গণিতের বিষয়বস্তু হল সংখ্যা আর মনোবিজ্ঞানের বিষয়বস্তু হল মন, তবুও এই মনোবিজ্ঞানের ক্ষেত্রে গণিতের প্রয়োগ অনেক বেশী বুদ্ধ্যঙ্ক, সহ সম্বন্ধ নির্ণয়, বুদ্ধির বণ্টন, স্মৃতির বিস্তার, মনোযোগের বিস্তার ইত্যাদি নির্ধারণের ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার করতে হয়। মনোবিজ্ঞানের পরীক্ষার ফলাফলের সংব্যাখ্যান করা হয় পরিসংখ্যানের সাহায্যে। মনোবিজ্ঞানকে সার্থক বিজ্ঞান হিসাবে গড়ে তুলতে সাহায্য করে গণিত।

তর্কশাস্ত্র ও গণিত ঃ—সঠিক চিন্তন ও কার্যকরী সিদ্ধান্তের বিজ্ঞানসম্মত পর্য্যালোচনাই হ'ল তর্কশাস্ত্র। জ্যামিতি হল ব্যবহারিক তর্কশাস্ত্র। তর্কশাস্ত্রের প্রতীকের সাহায্যে আমরা আমাদের চিন্তাধারার একটা পরিমিত ও সুসংহত গতি নির্ণয় করতে পারি। তর্কশাস্ত্রবিদ ও গণিতবিদের লক্ষ্য একই, উভয়েরই লক্ষ্য হ'ল তাঁদের নিজ নিজ বিষয়গুলি সংক্ষিপ্ত অথচ কার্যকরী ও নিখুঁত করা। কাজেই এ কথা বলা যেতে পারে তর্কশাস্ত্রের ক্ষেত্রেও গণিতের ব্যবহার অত্যন্ত ব্যাপক।

৮। **দর্শন ও গণিত**:—দর্শনের সঙ্গে গণিতের সম্বন্ধ অত্যন্ত ঘনিষ্ঠ। পৃথিবীর বিখ্যাত দার্শনিকদের মধ্যে অনেকেই খ্যাতনামা গণিতজ্ঞ ছিলেন। দর্শন আমাদের শিক্ষার লক্ষ্য স্থির করে দেয়। কিন্তু গণিতই দর্শনকে ঠিক পথে পরিচালিত করে। গণিতের সিদ্ধান্ত যেমন অমোঘ ও অপরিবর্তনীয়, দর্শনেরও তাই। এই জন্য যে সমস্ত দার্শনিক গণিতে পারদর্শী, তাঁদের মতামতগুলি বিশেষভাবে সমাদৃত হয়।

৯। **নীতিশাস্ত্র ও গণিত**:—নীতিশাস্ত্রেও গণিতের প্রচলন আছে। নীতিশাস্ত্রের কিছু কিছু উপাদান ধনাত্মক (+), আবার কিছু কিছু ঋণাত্মক (−), এই সমস্ত উপাদানকে একটি সাধারণ সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়:—$M=G$। একটা উদাহরণ দেওয়া যাক। অমল ও বিমল ঘনিষ্ঠ বন্ধু এবং দুজনে একই অফিসে একই পদমর্যাদাতে একসঙ্গে কাজ করে আসছে। এখন এই দুজনের মধ্যে একজনের (যে কোন একজন) বেতন বৃদ্ধি পেতে পারে। অমল জানতে পারল—অরুণবাবুকে যে ধরতে পারবে তার বেতনই বাড়বে। অমল কি এই খবর বিমলকে জানাবে?

অমল এই ভাবে সিদ্ধান্ত নিতে পারে:—

বেতন বৃদ্ধির ফলে যে পার্থিব লাভ—তা দু'বন্ধুর ক্ষেত্রেই সমান। অর্থাৎ

$$gA=gB=g$$

যদি অমল, বিমলকে খবরটি দেয়, তবে বিমলের অমলের সঙ্গে যে অপার্থিব (immaterial) বন্ধুত্ব f, তা রক্ষিত হয়। অর্থাৎ $M=g$

আর যদি অমল, বিমলকে খবরটি না দেয়, তবে একদিন না একদিন ঐ বন্ধুত্ব নষ্ট হবেই। অর্থাৎ

$$M=g-f.$$

এখন যেহেতু g-এর পরিমাণ $g-f$ অপেক্ষা বেশী, অতএব অমলের বিমলকে খবরটি দেওয়াই উচিত। নীতিশাস্ত্রের নতুন নতুন সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে আগমণ-মূলক পদ্ধতি (Inductive Method) ব্যবহার করাই শ্রেয়ঃ।

কাজেই দেখা যাচ্ছে প্রকৃতির দিক থেকে পৃথক হলেও বিভিন্ন বিষয়ের ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার অপরিহার্য। গণিত যেন প্রতিটি বিষয়ের কেন্দ্রে অবস্থিত হয়ে বিষয়টিকে সার্থকতা ও সাফল্যের পথে এগিয়ে নিয়ে চলেছে। এইখানেই গণিতের কৃতিত্ব।

চতুর্থ অধ্যায়

"উচ্চ বিদ্যালয়ে গণিতের স্থান"

(Place Of Mathematics At The High School Stage)

শিক্ষার এমন কোন নির্দ্দিষ্ট লক্ষ্য নেই যে লক্ষ্যে পৌঁছাবার জন্য স্কুল পাঠ্য প্রতিটি বিষয় কিছু না কিছু সাহায্য করতে পারে। শিক্ষা একটি ব্যাপক প্রক্রিয়া। শিক্ষার লক্ষ্য বিভিন্ন। প্রতিটি বিষয় পাঠের উদ্দেশ্যও বিভিন্ন। তবে এ কথা বলা যেতে পারে যে শিক্ষার বিভিন্ন লক্ষ্যে পৌঁছাবার জন্য বিভিন্ন বিষয়গুলি বিভিন্ন ভাবে চেষ্টা করে। শিক্ষার প্রধান প্রধান লক্ষ্যগুলির মধ্যে-কৃষ্টি-মূলক শিক্ষা, পরিবেশের সঙ্গে সার্থক সঙ্গতি বিধান, সু-চরিত্র ও সু-অভ্যাস গঠন, সুষম বিকাশ, সামাজিক উৎকর্ষ অর্জন, সু-নাগরিকতার শিক্ষা প্রভৃতি উল্লেখযোগ্য। কোন বিষয় পাঠক্রমে আবশ্যিক কিংবা ঐচ্ছিক কি ভাবে অন্তর্ভুক্ত হবে তা নির্ভর করে ঐ বিশেষ বিষয়টি শিক্ষার কোন্ কোন্ লক্ষ্যে উপনীত হতে সাহায্য করছে তার উপর। গণিত উচ্চ বিদ্যালয় স্তরের পাঠক্রমে আবশ্যিক হবে, না ঐচ্ছিক হবে তা নির্ণয় করার আগে দেখা যাক গনিত শিক্ষার কোন্ কোন্ লক্ষ্যে উপনীত হতে সাহায্য করছে।

গণিতে বিশেষ ভাবে ব্যুৎপত্তি অর্জন করাই গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্য নয়। পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আমরা গণিত শিখণের উদ্দেশ্য ও লক্ষ্যগুলি বিস্তারিতভাবে আলোচনা করেছি। সংক্ষেপে বলা যেতে পারে গণিত শিখনের ফলে আমরা দৈনন্দিন জীবনের সমস্যাগুলি উপলব্ধি করতে পারি, আমাদের পর্যবেক্ষণ ক্ষমতা বৃদ্ধি পায়, এবং আমরা নিখুঁত ভাবে বিচার ও চিন্তা করতে পারি। অবশ্য বিচারকরণ ও চিন্তা করার ক্ষমতা বিভিন্ন বয়সে বিভিন্ন হয়। কিন্তু গণিত এমন একটি বিষয়, যেটিকে বয়সের অনুপাতে ঠিকভাবে সাজানো সম্ভব। আমাদের দেশে বহু ছাত্র-ছাত্রীই প্রাথমিক বা মাধ্যমিক পর্যায়ের শেষে লেখাপড়া ছেড়ে দিতে বাধ্য হয়। অনেকে বলেন এই সমস্ত ছাত্রছাত্রী তো স্কুলের বাইরে আর গণিত ব্যবহার করছে না। কিন্তু সত্যই কি তাই ? আমাদের দৈনন্দিন জীবনে কোন না কোন দিকে গণিত ব্যবহার করতেই হয়। তাছাড়া অধিকাংশ বৃত্তির ক্ষেত্রেও গণিতের ব্যবহার অপরিহার্য। অবশ্য সঙ্গে সঙ্গে সমালোচক যাঁরা—তারা বলবেন স্কুলের পড়া শেষ করে সকলেই

তো আর যন্ত্রবিদ্, ইঞ্জিনিয়ার বা সার্ভেয়ার হচ্ছে না। তাহলে স্কুলে সকলকে আবশ্যিক ভাবে গণিত শেখানোর কি প্রয়োজন? কিন্তু বৃত্তিতে গণিতের ব্যবহার করতে হ'ল না বলে যে আমরা জীবন থেকে গণিতকে মুছে দিতে পারি—তা মোটেই সম্ভব নয়। সকলেই কোন না কোন প্রকারে কিছু না কিছু গণিত ব্যবহার করছেন। অবশ্য এই জন্য প্রাথমিক ও নিম্ন মাধ্যমিক স্তরের গণিত সম্বন্ধে জ্ঞান থাকলেই যথেষ্ট। এর জন্য একদল শিক্ষাবিদ্ বলেন গণিতকে প্রাথমিক ও নিম্ন মাধ্যমিক স্তরে আবশ্যিক করলেই চলবে। উচ্চ মাধ্যমিক স্তরে গণিতকে ঐচ্ছিক করতে হবে। যারা পরে গণিত নিয়ে আরো বেশী পড়াশুনা করতে চায়, কিংবা যারা এমন বৃত্তি গ্রহণ করতে ইচ্ছুক যাতে গণিত প্রযোগ করতে হবে—তারা উচ্চ মাধ্যমিক স্তরে গণিত পড়াশুনা করবে। কিন্তু যারা পরবর্তী ছাত্রজীবনে গণিত নিয়ে পড়াশুনা করতে চায় না বা গণিতযুক্ত বৃত্তি গ্রহণ করতে চায় না, তারা মাধ্যমিক স্তরে গণিত নিয়ে না পড়লেও চলবে।

কিন্তু এ প্রসঙ্গে একটি বক্তব্য থেকে যাচ্ছে। তা হ'ল উচ্চ মাধ্যমিক স্তরে উন্নীত হবার সঙ্গে সঙ্গেই আমরা ছাত্রদের ভবিষ্যত বৃত্তি সম্বন্ধে সঠিক পূর্বাভাস দিতে পারি না। বর্তমান যুগে শিক্ষার সমস্যা এতো জটিল যে ছাত্র তার নিজস্ব আগ্রহ বা সামর্থ্য অনুযায়ী বৃত্তি নির্বাচন করার সুযোগও সবসময় পায় না। তা ছাড়া স্কুলে গণিতে যে ছাত্র বেশ আগ্রহবোধ করে না সেই ছাত্রই আবার কলেজে গিয়ে গণিতে যথেষ্ট আগ্রহবোধ করতে পারে। স্কুলে ছাত্রদের সামনে ভবিষ্যত বৃত্তি সম্বন্ধে একটা পরিষ্কার ধারনা তুলে ধরতে হবে। যেহেতু অধিকাংশ বৃত্তিতেই গণিতের প্রয়োজন, সেইজন্য প্রত্যেক ছাত্রকেই মাধ্যমিক স্তরে গণিতকে আবশ্যিক বিষয় হিসাবে গ্রহণ করতে হবে। গণিতকে মাধ্যমিক স্তরে ঐচ্ছিক বিষয়ে রূপান্তরিত করলে অনেক ছাত্রকে বিভিন্ন বৃত্তিগ্রহণের সুযোগ থেকে বঞ্চিত করা হবে।

এর উত্তরে অনেকে বলেন—ছাত্রদের গণিতে প্রবণতা দেখে মাধ্যমিক স্তরে গণিত শিখনের ব্যবস্থা করলে অনেক সুবিধা হয়। এতে যাদের গণিতে ঝোঁক বা প্রবণতা নেই, তাদের গণিত শিখনে বাধ্য করা হচ্ছে না। কিন্তু আমাদের দেশে মাধ্যমিক স্তর সুরু হচ্ছে ১৫+বয়স থেকে। এতো কম বয়সে প্রবণতা ঠিকমত পরিমাপ করা যায় না। আবার বিষয়টি সম্বন্ধে পরিষ্কার ধারণা, বিজ্ঞান সম্মত শিখন পদ্ধতি, উত্তম পাঠ্যপুস্তক ইত্যাদির উপরও প্রবণতা নির্ভর করে। কাজেই কেবলমাত্র প্রবণতার উপর নির্ভর করে গণিত শিখণের ব্যবস্থা করলেও অনেক ছাত্রের প্রতি অবিচারই করা হবে।

উপরের আলোচনা থেকে দেখা যাচ্ছে গণিত আবশ্যিক হবে, না ঐচ্ছিক হবে তা নিয়ে শিক্ষাবিদ্‌গণ একমত নন। অধিকাংশ শিক্ষাবিদেরই ধারণা যে গণিতকে আবশ্যিক করলে অনেক ছাত্রকেই অসুবিধায় ফেলা হবে। বর্তমান শিক্ষা পদ্ধতিতে গণিতের স্থান বেশ পরিষ্কার নয়। নিম্নমাধ্যমিক স্তর পর্যন্ত (অষ্টম শ্রেণী) গণিত আবশ্যিক। উচ্চমাধ্যমিক স্তরে ঐচ্ছিক। আবার দশ-শ্রেণীর বিদ্যালয়ে গণিত দশম শ্রেণী পর্যন্তই আবশ্যিক। পাঞ্জাবে মাধ্যমিক স্তরে গণিত আবশ্যিক। কিন্তু বর্তমানে তা ঐচ্ছিক করার পরিকল্পনা চলছে। কিন্তু একথা সত্য যে, গণিতকে ঐচ্ছিক করলে বৃত্তি গ্রহনের সুযোগগুলি সঙ্কুচিত করা হবে। তাছাড়া কলেজ ও বিশ্ববিদ্যালয় স্তরে এমন কতকগুলি বিষয় আছে—যেখানে গণিত একান্ত প্রয়োজন। যে সমস্ত ছাত্র অর্থনীতি, জীব-বিজ্ঞান বা মনোবিজ্ঞান নিয়ে পড়াশুনা করে, তারা যদি গণিত ভালোভাবে না আয়ত্ত করে থাকে, তবে বেশ অসুবিধার সন্মুখীন হতে হয়। কাজেই আমরা এই সিদ্ধান্তেই আসতে পারি যে, মাধ্যমিক স্তরে গণিতকে আবশ্যিক করলে অধিকাংশ ছাত্রের সুবিধাই হবে। গণিত পাঠে ছাত্রদের যে বিতৃষ্ণা বা বিরক্তি, তা কিন্তু আসলে বিষয়টির জন্য নয়। গণিতের ত্রুটিযুক্ত পঠন-পদ্ধতিই এর জন্য দায়ী। বিষয় কঠিন হলেও যদি সহজ, সরল ও বিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতিতে পাঠদান করা যায়, তবে ছাত্রেরা আগ্রহ বোধ করবে। এছাড়া বিষয়টি পাঠের উপকারিতা ও তাদের নিকট পরিষ্কারভাবে বুঝিয়ে দিতে হবে। ছাত্ররা আগ্রহী হয়ে যদি গণিতে অনুরক্ত হয়, তখন আর কোন শিক্ষাবিদ বলবেন না গণিতকে ঐচ্ছিক করা হোক্।

যে সমস্ত ছাত্রছাত্রী কলেজে উচ্চশিক্ষার জন্য যাবে না, তাদের জন্য দুটি উপায় গ্রহণ করা যেতে পারে :—

১। গণিতকে ঐচ্ছিক করতে হবে, অথবা

২। আবশ্যিক গণিতে কেবল এমন অধ্যায় অন্তর্ভুক্ত করতে হবে, যেগুলি একান্ত প্রয়োজনীয়।

যখন গণিত ঐচ্ছিক হবে, তখন ছাত্ররা প্রাথমিক পর্যায়ের সহজ গণিত শিক্ষা করবে। ঐচ্ছিক গণিত মাধ্যমিক স্তরে যারা নির্বাচন করবে না, তাদের মানসিক বৃদ্ধি অবশ্য বেশ কিছুটা বাধাপ্রাপ্ত হবে। আবার পরিস্থিতির পরিবর্তনের জন্য পরবর্তী কালে যদি কোন ছাত্র কলেজে উচ্চ-শিক্ষা গ্রহণ করতে ইচ্ছুক হয়, তখন গণিত না

থাকার জন্য তার বিশেষ অসুবিধা হবে। কাজেই গণিতকে ঐচ্ছিক বিষয় হিসাবে পরিগণিত করা যুক্তিযুক্ত হবে না।

গণিত যখন আবশ্যিক হবে, তখন তার পাঠক্রম দু'ভাগে ভাগ করতে হবে। একভাগে থাকবে যারা কলেজে পড়বে না, তাদের জন্য সহজ সরল ও একান্ত প্রয়োজনীয় অধ্যায়গুলি, যেগুলি তাদের দৈনন্দিন জীবনে কাজে লাগবে। আর এক ভাগে থাকবে যারা কলেজে পড়বে, তাদের উচ্চশিক্ষার সঙ্গে সামঞ্জস্য রক্ষা করবে এমন সমস্ত কঠিন অধ্যায়।

কাজেই আমরা দুটি সম্ভাবনার কথা দেখতে পাচ্ছি। (১) গণিতকে আবশ্যিক করা, অর্থাৎ পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতি—তিনটিকেই আবশ্যিক করা। এবং (২) কেবলমাত্র পাটীগণিতকে আবশ্যিক করা-কিন্তু বীজগণিত ও জ্যামিতিকে ঐচ্ছিক করা। এই সম্ভাবনা দুটির মধ্যে দ্বিতীয় সম্ভাবনাটিই অধিকতর যুক্তিযুক্ত এবং বাঞ্ছনীয়। এই সম্ভাবনাটি গ্রহণ করলে আর গণিতকে আবশ্যিক করা হবে, না ঐচ্ছিক করা হবে এই বিতর্কের কোন প্রয়োজন থাকবে না।

পঞ্চম অধ্যায়

বিদ্যালয়ের পাঠক্রমে গণিত

(Mathematics in School Curriculum)

যে সমস্ত বিষয় স্কুল পাঠক্রমের অন্তর্ভুক্ত, তাদের দুটি গুণ থাকবেই। প্রথমটি হল বিষয়টি থেকে প্রয়োজনীয় জ্ঞান আহরণ করা যাবে। দ্বিতীয়টি হল, সুনাগরিক হবার জন্য বিষয়টি কতকগুলি সু-অভ্যাস গঠনে সহায়তা করবে। জীবনের প্রতিটি ক্ষেত্রে গণিতের প্রয়োজন। সর্বস্তরের লোকও গণিত ব্যবহার করে থাকে। গণিতই হল সমস্ত বিজ্ঞান বিষয়ের মূলভিত্তি। ভবিষ্যতে ছাত্ররা যে উচ্চশিক্ষা গ্রহণ করবে সেই উচ্চশিক্ষার জন্য বা উপযুক্ত বৃত্তি নির্বাচন করার জন্য গণিতের একান্ত প্রয়োজন। গণিতের শিক্ষাগত মূল্যের জন্যই গণিতকে বিদ্যালয়ের পাঠক্রম অন্তর্ভুক্ত করা হয়।

তাছাড়া শিক্ষার উদ্দেশ্য হল নির্দ্দিষ্ট কোন লক্ষ্যে উপনীত হওয়া। স্কুলপাঠ্য প্রতিটি বিষয় লক্ষ্যে পৌছানোর জন্য নিজ নিজ ক্ষমতানুযায়ী সাহায্য করে। কিন্তু এই লক্ষ্যে পৌছানোর ব্যাপারে গণিতই সর্বাপেক্ষা বেশী সাহায্য করে। মানব জীবনের ও মানব মনের প্রয়োজনের দিকে লক্ষ্য রেখে কোন বিষয় যদি সাহায্য করে থাকে, তবে সে বিষয় হল গণিত।

গণিতের বৈশিষ্ট্য হল শিক্ষাগত সূক্ষ্মতা ও ত্রুটিহীনতা। গণিতে সব কিছুই স্বচ্ছ, স্পষ্ট ও পরিষ্কার। কোন সমস্যার সন্মুখীন হলে শিক্ষার্থীর তা এড়িয়ে যাবার কোন উপায় থাকে না। গণিতে সূক্ষ্মতা ভাষার সূক্ষ্মতারই সমগোত্রীয়। শিখনের দিক থেকে বিচার করলে সূক্ষ্মতার মাপকাঠিতে আইনশাস্ত্রের পরই গণিতের স্থান।

সংক্ষেপে বলা যেতে পরে গণিত এমন একটি বিষয় যার থেকে আমরা কোন ফল লাভ করি এবং যা আমাদের মনে আলোক সম্পাত ক'রে অজ্ঞানতা দূরীকরণে সহায়তা করে। এইজন্যই বলা হয়ঃ Mathematics is primarily taught on account of the mental training it affords and the knowledge of fact it imparts. গণিতের **তত্ত্বগত ও ব্যবহারিক** উপযোগিতাগুলি আলোচনা করলেই স্কুলপাঠ্য বিষয় হিসাবে গণিতের গুরুত্ব আমরা উপলব্ধি করতে পারব।

তত্ত্বগত উপযোগিতা (Theoretical utility)

প্রথমে গণিতের তত্ত্বগত উপযোগিতাগুলির কথা আলোচনা করা যাক।

১। গণিত **যুক্তিসম্পন্ন চিন্তনে** সহায়তা করে। পাটীগণিতে সরল সুদকষার অঙ্ক না শিখলে চক্রবৃদ্ধির অঙ্ক করা সম্ভব নয়। তেমনি বীজগণিতে ল. সা. গু. বা গ. সা, গু যদি না জানা থাকে, তবে কঠিন উৎপাদক নির্ণয় করা সম্ভব হয় না। আবার জ্যামিতিতে যতক্ষণ পর্যন্ত ছাত্রদের জ্যামিতিক চিত্র বা ব্যবহারিক জ্যামিতির সঙ্গে পরিচয় ঘটছে, ততক্ষণ উপপাদ্যের পাঠ সুরু করা চলে না।

২। গণিত পাঠের ফলে **যুক্তিশক্তি বিকাশ** লাভ করে। অবশ্য গণিতে যে যুক্তির প্রয়োজন, সে যুক্তি উচ্চ দার্শনিক যুক্তি নয় এযুক্তি সহজ, সরল ও দৈনন্দিন জীবনে যে যুক্তির প্রয়োজন হয় তারই অনুরূপ যুক্তি। জ্যামিতি হল গণিতে যুক্তি প্রয়োগের প্রকৃষ্ট উদাহরণ।

৩। গণিত চিন্তনে **সত্যতা ও স্পষ্টতা** আনয়ন করে। ছাত্র যখন $5+3=8$, এই সম্বন্ধটি শিখে, তখন সে অন্য কোন সম্বন্ধ আর স্বীকার করতে চাইবে না। $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ বা ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি যে দুই সমকোণ এ সমস্ত নিয়মের কোন ব্যতিক্রম হয় না।

৪। গণিত শিখনে **মনোযোগের একাগ্রতা** বৃদ্ধি পায়। মনোযোগের অভাব ঘটলে কখনও গণিতে শুদ্ধ ও সঠিক ফল পাওয়া যায় না। যে ছাত্র মনোযোগের অভাবের জন্য ভুল করে 30 টাকাকে 300 টাকা পড়ে বা লিখে বা যে ছাত্র x^3 কে x^2 পড়ে বা লিখে তার পক্ষে সঠিক উত্তর পাওয়া কখনও সম্ভব নয়। জ্যামিতিতেও তুচ্ছ ভুল বা দৃষ্টি এড়ানো তুচ্ছ ঘটনার জন্য প্রতিপাদ্য বিষয়টি প্রতিপন্ন করা একটা অসম্ভব ব্যাপার হয়ে দাঁড়ায়।

৫। গণিত শিখনে ছাত্রদের **আবিষ্কার ও সৃজনী স্পৃহা** বৃদ্ধি পায়। অন্যান্য বিষয় পাঠেও আবিষ্কার ও সৃজনী প্রতিভার উন্মেষ বা বৃদ্ধি ঘটতে পারে। কিন্তু গণিত পাঠের ফলেই চরম ফল পাওয়া সম্ভব। এই সুফল আবার অনেকটা শিখন পদ্ধতির উপর নির্ভরশীল। কোন্ পদ্ধতি অবলম্বন করলে আবিষ্কার ও সৃজনী প্রতিভার চরম উন্মেষ সাধিত হয়, তা শিক্ষকমহাশয়কে জানতে হবে। এর জন্য আবিষ্কারক পদ্ধতি, আরোহ ও অবরোহ পদ্ধতি, সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ পদ্ধতি, পরীক্ষাগার পদ্ধতি প্রভৃতিই অধিক কার্যকরী হয়।

৬। **সহসম্বন্ধ নির্ণয়ে** গণিত সহায়তা করে। গণিতের বিভিন্ন শাখার

মধ্যে অর্থাৎ পাটীগণিত, বীজগণিতাও জ্যামিতির মধ্যে, গণিতের সঙ্গে অন্যান্য বিষয়ের এবং গণিতের সঙ্গে জীবনের সহসম্বন্ধ (correlation) আছে। এইজন্যই স্কুলপাঠ্য বিষয়গুলির মধ্যে গণিতের গুরুত্ব সবচেয়ে বেশী।

ব্যবহারিক উপযোগিতা (Practical utility):

এবার আসা যাক্ ব্যবহারিক উপযোগিতার প্রসঙ্গে। গণিতের ব্যবহারিক উপযোগিতাও অন্যান্য বিষয়ের তুলনায় অধিক। কোন্ কোন্ দিকে গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায় সে সম্বন্ধে কিছু আলোচনা করা হল :—

(১) আধুনিক যুগ হল বিজ্ঞান তথা গণিতের যুগ। যুগের সঙ্গে তাল রাখতে হলে গণিত শিখন প্রয়োজন।

(২) গণিত আমাদের প্রত্যেকের জীবনে প্রয়োজনীয়। শুধু শিক্ষিত ব্যক্তিই নয়, অশিক্ষিত ব্যক্তিদেরও গণিত ব্যবহার করতে হয়।

(৩) গণিত শিখনের ফলে অন্যান্য বিষয়গুলি শেখা সহজ হয়। জ্যামিতির সাহায্য নিয়েই ভূগোল ও ইতিহাসের মানচিত্র অঙ্কন করা সম্ভব হয়। তাছাড়া কৃষি, বিজ্ঞান, দারুশিল্প অর্থনীতি, সমাজবিজ্ঞান, মনোবিজ্ঞান, প্রভৃতিতে গণিত ব্যবহার করা হয়। শুধু বিজ্ঞান বিষয়ই নয়, সুকুমার শিল্প, সাহিত্য প্রভৃতিতেও গণিত ব্যবহার করা হয়। সাহিত্যে ছন্দ নির্ণয়ে গণিত একান্ত প্রয়োজনীয়। মেয়েদের ছুঁচের কাজ, রান্নার কাজ প্রভৃতি ক্ষেত্রেও গণিতের ব্যবহার করা হয়।

সকল গুরুত্বপূর্ণ বিষয়গুলির মধ্যে গণিতই একমাত্র বিষয় যার সাহায্য ব্যতীত বিজ্ঞানের জ্ঞান সম্পূর্ণ হয় না। পদার্থবিদ্যা, রসায়নবিদ্যা, জীববিদ্যা—প্রভৃতি বিজ্ঞানগুলিতে গণিতের যথেষ্ট প্রয়োগ দেখা যায়। ভৌতবিজ্ঞানের এবং পদার্থের ধর্মের গুণগত দিকটিই দেখলে চলবে না; পরিমানগত দিক্টাও দেখতে হবে। জল কেবলমাত্র হাইড্রোজেন ও অক্সিজেনের মিশ্রণের ফলে উদ্ভূত হয়—শুধু এ জ্ঞানই যথেষ্ট নয়। ঐ গ্যাস দুটি কি অনুপাতে মিশ্রিত হয়ে জলের সৃষ্টি হয় তা জানা প্রয়োজন। তখনই আমাদের জ্ঞান সম্পূর্ণ ও কার্যকরী হয়।

উপসংহার :—

তাহলে দেখা যাচ্ছে কেবলমাত্র অমূর্ত বা দার্শনিক মূল্যের জন্য নয়, শিক্ষাগত ও ব্যবহারিক মূল্যের জন্যও গণিতকে স্কুলপাঠ্য বিষয় হিসাবে নির্বাচিত করা হয়। গণিত চর্চ্চার ফলেই ছাত্রের চিন্তা, যুক্তি ও বিচার শক্তির বিকাশ সাধন হয় ও মনোযোগের একাগ্রতা ও পরিসর বৃদ্ধি পায়। সৃজনমূলক বা গঠনমূলক কল্পনাশক্তি ও

সৃজনীপ্রতিভা গণিত চর্চ্চার ফলেই উন্নত হয়। ছাত্রের আত্মশক্তি ও আত্মপ্রত্যয়ও বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয়। এ সমস্তের ফলেই ছাত্রদের মধ্যে কতকগুলি সুসংবদ্ধ অভ্যাস গড়ে উঠে। তারা সত্যবাদী ও সৎ হয়। তাদের সু-চরিত্র গঠিত হয়।

গণিত বিষয়টি একটি অমূর্ত বিষয়। এর জন্য এমন পদ্ধতির প্রয়োজন যার ফলে ছাত্রের পরিশ্রম লাঘব হয় এবং গণিতের সঙ্গে দৈনন্দিন জীবনের যোগসূত্রটি তার নিকট পরিষ্কার হয়। প্রয়োগধর্মী গণিত (Applied Mathematics) তার প্রাকৃতিক বিজ্ঞানের সঙ্গে ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধের জন্য প্রভূত গুরুত্ব অর্জন করেছে। তাছাড়া অন্যান্য বিষয়ের সঙ্গে গণিতের সম্বন্ধের কথা তো আগেই বলা হয়েছে।

মাধ্যমিক শিক্ষাকে এখন আর বিশ্ববিদ্যালয়ের উচ্চ শিক্ষার প্রারম্ভিক স্তর বলা হয় না। মাধমিক শিক্ষাকে বর্তমানে নির্দিষ্ট লক্ষ্যবিশিষ্ট একটি স্বয়ংসম্পূর্ণ স্তর হিসাবেই ধরা হয়। মাধ্যমিক শিক্ষাকে এখন বিভিন্ন বৃত্তিতে নিযুক্ত হবার একটি সর্ত হিসাবে ধরা হয়। কাজেই মাধ্যমিক শিক্ষাস্তরে গণিতের পাঠক্রমটি কোন একটি উচ্চশিক্ষার ক্ষেত্রে প্রবেশের উপযোগী করে তৈরী করা চলবে না। এর পাঠক্রমটি জীবনের দিকে লক্ষ্য রেখেই নির্বাচিত করতে হবে। **গণিত শিখনের মূল কথা জ্ঞান অর্জন নয়, ক্ষমতা অর্জন।**

ছাত্ররা নিজেদের পরিবেশে যে সমস্ত পরিমাণগত ও স্থানগত সমস্যার সম্মুখীন হয় তার সমাধান করার জন্য যাতে তারা গণিত প্রয়োগ করতে পারে তার শিক্ষা দিতে হবে। এর জন্য প্রাথমিক ও মাধ্যমিক স্তরে তাদের সাহায্য করতে হবে।

অনেকে বলেন যে প্রত্যেক ছাত্রই তো আর যন্ত্রবিদ্ বা ইঞ্জিনিয়ার বা গণিতজ্ঞ হতে যাচ্ছে না। তাহলে সব ছাত্রকে গণিত শিখতে বাধ্য করার কি প্রয়োজনীয়তা আছে? কথাটা সত্য! কিন্তু কোন্ ছাত্র ভবিষ্যতে কি হবে, বা কোন্ বৃত্তি অবলম্বন করবে—তা আগের থেকে বলা যায় না, ভবিষ্যতে সে যে কোন বৃত্তিই গ্রহণ করুক না কেন, যাতে তার কোন অসুবিধা না হয় তার, জন্য তাকে গণিতে মৌল নীতিগুলির শিক্ষা দেওয়া হয়। গণিত সম্পূর্ণ বাদ দিলে ছাত্রের নিকট অনেক বিষয় ও বৃত্তির দরজা সম্পূর্ণ বন্ধ হয়ে যাবে।

সাধারণ শিক্ষিত ব্যক্তির দৈনন্দিন জীবনে গণিতের অনেক তথ্যই কাজে লাগে না। কাজেই ঐ সমস্ত তথ্য বাদ দিয়ে স্কুলে গণিতের পাঠক্রম স্থির করা হোক্—এ রকম মনোভাব অনেকেরই আছে দৈনন্দিন জীবনে যা কার্যকরী করা এই মুহূর্তে সম্ভব

হল না—তা যে অপ্রয়োজনীয় বা নিরর্থক, এমন চিন্তা করা সমীচিন নয়। কোন একটি তথ্য কতবার প্রয়োগ করা সম্ভব—তা বিচার করে গণিতের গুরুত্ব বা প্রয়োজনীয়তা উপলব্ধি করলে চলবে না। দেখতে হবে গণিত প্রয়োগের ফলে কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে ও কি পরিমাণে সময়, অর্থ ও পরিশ্রম কম লাগছে। কাজেই গণিতের গুরুত্ব উপলব্ধি করার সময় এ সমস্তও চিন্তা করতে হবে।

অতএব দেখা যাচ্ছে গণিতকে কেন স্কুলপাঠ্য বিষয় হিসাবে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে, তার দুটি কারণ রয়েছে। প্রথমতঃ বিষয়টি পাঠে দৈনন্দিন জীবনে বাস্তব উপযোগিতা এবং দ্বিতীয়তঃ মানসিক শিক্ষণ। অতীতে কেবলমাত্র গণিতের শৃঙ্খলা-মূলক মূল্যের জন্য গণিতের পাঠ দেওয়া হত। কিন্তু শৃঙ্খলামূলক মূল্য ছাড়াও প্রয়োজনীয় আরো অনেক মূল্য গণিতের আছে। বর্তমান যুগে বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিদ্যার প্রভূত উন্নতির ফলে গণিতের অন্যান্য মূল্যগুলিরও যথার্থ মর্য্যাদা দেওয়া হচ্ছে। কাজেই জ্ঞান অর্জন এবং বিশেষ বিশেষ বিশেষ ক্ষমতা অর্জন—দুটিকেই সমান গুরুত্ব দেওয়া হচ্ছে।

একদল গণিতবিদ্ আছেন যাঁরা উপরের মতবাদে আস্থাশীল নন। তাঁরা বলেন—সাধারণ নাগরিকদের গণিতের তত্ত্ব ব্যবহার করার খুব বেশী প্রয়োজন হয় না। যেটুকুও বা হয়—তা হল পাটিগণিতের খুব সহজ সাধারণ সূত্রগুলির। আবার অধিকাংশ বৃত্তিমূলক বা পেশাগত কলেজে বীজগণিত, ত্রিকোণমিতি বা জ্যামিতি ব্যবহার করা হয় না। ইঞ্জিনিয়ার, যন্ত্রবিদ বা নাবিকেরা গণিতের ব্যবহার করেন বটে—কিন্তু সম্পূর্ণ যান্ত্রিকভাবে। কেবলমাত্র যাঁরা মৌলিক চিন্তা করেন, নূতন নূতন ডিজাইন তৈরী করেন বা যাঁরা গণিত নিয়ে গবেষণা করেন, তাঁরাই স্বাধীন ভাবে গণিতের ব্যবহার করেন এবং এদের নিকট গণিত অপরিহার্য। কাজেই সকলের জন্য গণিত শিখনের সমান সুযোগের ব্যবস্থা না করলেও চলবে।

আবার এ কথাও সত্য, জ্ঞান চিরকাল অপরিবর্তনীয় থাকে না। একজন ছাত্র আজ যা শিখল, আগামী কাল তার কোন গুরুত্ব না থাকতেও পারে। কাজেই কোন একটি বিশেষ জ্ঞান আয়ত্ত করে না রেখে বিশেষ জ্ঞানটি আয়ত্ত করার ক্ষমতা অর্জন করতে হবে। ভবিষ্যতে ছাত্রের কোন্ কোন্ বিষয়ের প্রয়োজন হতে পারে স্কুলে তা সঠিকভাবে নির্ণয় করা যায় না। সেইজন্য ভবিষ্যতের দিকে লক্ষ্য রেখে বিশেষ বিশেষ বিষয়ের জ্ঞান আয়ত্ত করার ব্যপোরে তাদের সাহায্য করা যায় না। কিন্তু কোন বিষয়ের জ্ঞান কিভাবে আয়ত্ত করা যেতে পারে সেই কৌশল বা ক্ষমতাটি যদি

ছাত্রদের আয়ত্তাধীন করে দেওয়া যায় তবে ভবিষ্যতে তাদের আর কোন অসুবিধাই হবে না। কাজেই গণিত শিক্ষকের প্রধান কাজ হবে ছাত্রদের এমন ভাবে শিক্ষা দেওয়া যাতে তারা স্বাধীনভাবে শিখতে পারে, চিন্তা করতে পারে, তাদের বুদ্ধিমত্তার যথোপযুক্ত প্রয়োগ করতে পারে, পরিষ্কার পরিচ্ছন্নতার ভাব অর্জন ক'রে এবং চিন্তা ও তার প্রকাশে মিতব্যয়ী হতে পারে।

কাজেই প্রয়োজনীয় তত্ত্বের জ্ঞান অর্জন এবং শৃঙ্খলামূলক মূল্য এই দুটিকেই গণিতে সমান গুরুত্ব দিতে হবে। অবশ্য প্রয়োজনীয় তত্ত্বগুলি সকলের নিকট সমান প্রয়োজনীয় নাও হতে পারে। কিন্তু তবুও গণিত মানব-জাতির সেবায় কিভাবে সাহায্য করে চলেছে তা জানবার জন্য প্রত্যেককেই প্রয়োজনীয় তত্ত্বগুলি জানতে হবে। শিক্ষকের কর্তব্য হবে ছাত্রকে দুভাবে শিক্ষিত করে তোলা। এক মানসিক শিক্ষনের দিক দিয়ে এবং অপরটি হল প্রয়োজনীয় জ্ঞান আহরণ করার দিক দিয়ে। আর এই দু রকম শিখনের জন্য একই পাঠক্রম বা তত্ত্ব ব্যবহার করতে হবে। দুটির জন্য দু রকম পাঠক্রম ব্যবহার করা মোটেই যুক্তিযুক্ত হবে না। বিখ্যাত মনোবিজ্ঞানী থর্নডাইকের (Thorndike) মতে : **Teach nothing because of its disciplinary value, but everythihg so as to get what disciplinary value it does have.**

ষষ্ঠ অধ্যায়

গণিতে ত্রুটী কোথায় ?

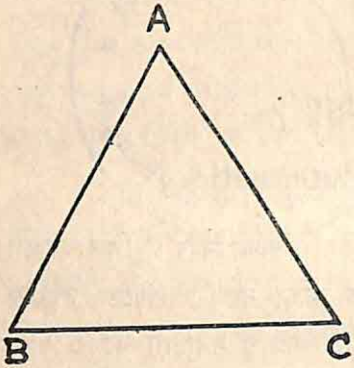
(What is wrong with Mathematics)

অধিকাংশ লোকেরই ধারণা গণিত একটি নীরস ও কঠিন বিষয়। কিন্তু আসলে বিষয়টিকে যত কঠিন বলে মনে হয়, এটি তত কঠিন নয়। গণিতে ছাত্রকে স্বাধীন চিন্তা প্রয়োগ করতে হয় ও এককভাবে কোন সমস্যার সমাধান করতে হয়। কিন্তু দেখা যায় সমস্যার সমাধান করতে গিয়ে ছাত্ররা প্রায়ই অকৃতককার্য হয়ে গণিতের উপর দোষারোপ করছে। কিন্তু ছাত্ররা অকৃতকার্য হয় কেন? এর কারণ হিসাবে বলা যেতে পারে সে সমস্যাটির স্বরূপ সম্পূর্ণ উপলব্ধি করতে পারে নি, কিংবা সমস্যাটির সমাধান কিভাবে সম্ভব, তা তাকে শিক্ষা দেওয়া হয় নি, কিংবা সমস্যাটির সমাধানের উপযুক্ত পূর্বজ্ঞান তার নেই।

একটা কথা আছে; "আবৃত্তি সর্বশাস্ত্রানাং বোধাদপি গরিয়সী" একথাটা অন্ততঃ গণিতের ক্ষেত্রে চলে না। অন্যান্য বিষয় (যেমন ইতিহাস, দর্শন, সমাজবিদ্যা) উপলব্ধি না করে মুখস্থ করলেও চলে। কিন্তু গণিতে মুখস্থ করার সুযোগ খুবই কম। তবুও দেখা যায় ছাত্ররা বীজগণিতের সূত্র, অভেদ বা জ্যামিতির উপপাদ্য, সংজ্ঞা না বুঝে মুখস্থ করছে।

যাই হোক্ গণিত শিক্ষণের ত্রুটির জন্য গণিত শিক্ষকই প্রধানতঃ দায়ী। গণিতের ক্লাশে ছাত্রদের মধ্যে যে ব্যক্তিগত পার্থক্য আছে সেই পার্থক্য অনুযায়ী পৃথক পৃথক শিক্ষণের ব্যবস্থা করা হয় না। সব ছেলের জন্য একই পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়। তা ছাড়া গণিতের পাঠ্যপুস্তকে যে নিয়মে সমস্যাগুলির সমাধান করা হয়ে থাকে, তিনি কেবল মাত্র সেই নিয়মটিরই অনুসরণ করেন। তার থেকে সহজ কোন নিয়মও যে থাকতে পারে তা যেন তিনি ভাবতেই পারেন না। একটা উদাহরণ দেওয়া যাক :— জ্যামিতির একটি উপপাদ্য হল ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। এটি শ্রেণীতে প্রমাণ করার সময় পাঠ্য পুস্তকের দীর্ঘ নিয়মটিই অনুসরণ করা হয়। কিন্তু এটি আরো সহজে প্রমাণ করা সম্ভব। যেমন,

ABC ত্রিভুজের দুইটি বাহু AB এবং AC যোগ করলে আমরা একটি বক্ররেখা BAC পাই। অপর বাহু BC একটি সরলরেখা। স্পষ্টতঃই কোন বক্ররেখা সরলরেখা হতে দীর্ঘতর। ∵ $BAC > BC$ অথবা $AB + AC > BC$.



প্রমাণটি খুবই সহজ এবং যে কোন ছেলের পক্ষেই উপলব্ধি করা সহজ। এ ছাড়া শ্রেণীতে ছাত্রদের স্বাধীন ভাবে চিন্তা করতে উৎসাহ দেওয়া হয় না। বরং তাদের পাঠ্য পুস্তকের নির্দিষ্ট নিয়মগুলি অনুসরণ করতে বাধ্য করা হয়। স্বাধীন ভাবে চিন্তা করা ও বিচার করার চেয়ে মুখস্থ করা সহজ। ছাত্ররাও মুখস্থ করার সহজ পথটি বেছে নেয় বলে গণিতের সমস্যা সমাধানের যে আনন্দ, সে আনন্দ থেকে তারা বঞ্চিত হয়। এর জন্যই ছাত্রদের নিকট গণিত এত নীরস ও কঠিন বলে মনে হয়।

এ ছাড়া আরও কতকগুলি কারণের উল্লেখ করা যেতে পারে যে জন্য গণিত শাস্ত্রটিকে এতো কঠিন ও নীরস বলে মনে হয়। প্রধান প্রধান কারণগুলি হল :—

১। **ব্যক্তিগত দৃষ্টিদানের সুযোগের অভাব :**—অধিকাংশ শ্রেণীতেই ছাত্রসংখ্যা 40 থেকে বেশী। আবার ক্লাশের সব ছেলে বুদ্ধির দিক থেকেও একজাতীয় হয় না। কেউ বেশী বুদ্ধিমান, আবার কেউ বা স্বল্পবুদ্ধি সম্পন্ন। ক্লাশে সাধারণ ছেলেদের প্রতি দৃষ্টি রেখে পড়ানো হয়। ফলে যারা স্বল্পবুদ্ধিসম্পন্ন তারা ক্লাশের পাঠ ঠিকমত অনুসরণ করতে পারে না। তা ছাড়া 40 মিনিটের পিরিয়ডে প্রতি ছাত্রের প্রতি ব্যক্তিগতভাবে মনোযোগ দেওয়া শিক্ষকের পক্ষে সম্ভব হয় না।

২। **শ্রেণীতে অনিয়মিত উপস্থিতি বা দীর্ঘ অনুপস্থিতি :**—গণিত একটি একটি ধারাবাহিক বিষয়। পূর্ববর্তী অধ্যায়ের সঙ্গে একটা ঘনিষ্ঠ যোগসূত্র আছে। স্কুলে প্রায়ই অনুপস্থিত থাকলে ছাত্রের পক্ষে যে সমস্ত অধ্যায়গুলি পড়ানো হয়ে গেছে সেগুলি অনুসরণ করতে কষ্ট হয়। তাছাড়া কঠিন অধ্যায়গুলি শিক্ষকের সাহায্য না নিয়ে সে বাড়ীতে পড়া তৈরী করে উঠতে পারে না। শ্রেণীর নূতন পাঠও দ্রুত অগ্রসর হয় বলে পুরাতন পাঠ তৈরী করার মতো সময়ও সে পায় না, আর শিক্ষক মহাশয়ও ছাত্র পুরাতন পাঠ ভালোভাবে তৈরী করতে পারল কি না তা যাচাই করার সুযোগ পান না।

৩। **উদ্দেশ্যের অভাব :**—অধিকাংশ গণিত শিক্ষকেরই গণিত কেন শেখান হচ্ছে এ সম্বন্ধে কোন পরিষ্কার ধারণা থাকে না। তাদের ধারণা কেবলমাত্র পরীক্ষায় পাশ করার উদ্দেশ্যেই গণিত শেখানো হয় এবং গণিত শেখানোর ফলে ছাত্ররা কোন নতুন ক্ষমতা অর্জন করে না। তারা যা লাভ করে তা হ'ল গণিত সম্বন্ধীয় জ্ঞান। কিন্তু, বলা বাহুল্য, এ ধারণা সম্পূর্ণ ভ্রান্ত। ছাত্রদের নিকটেও গণিত পাঠের উদ্দেশ্যটি ব্যক্ত করা হয় না। আর সবচেয়ে বড় কথা হ'ল গণিতের বিষয়বস্তুগুলিকে দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত করে নির্বাচন করা হয় না বা গণিতের অধীত অধ্যায়গুলিকে যে দৈনন্দিন জীবনে প্রয়োগ করা যায়, এ ধারণাও ছাত্রদের মনে গড়ে উঠে না। ফলে যে ছাত্র গণিতে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বা পরিসীমা নির্ণয় করেছে, সে খেলার মাঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারে না। ছাত্রও জানে সে গণিত অধ্যয়ণ করছে কেবলমাত্র পরীক্ষায় পাশ করার জন্য। গণিত শিক্ষকও চান তাঁর বিষয়ে যেন কৃতকার্য ছাত্রের সংখ্যা বেশী হয়। আর এইজন্যই গণিতে স্বাধীন চিন্তন, গবেষণা বা বাস্তব অভিজ্ঞতার মাধ্যমে শিক্ষাদানের পরিবর্তে শিক্ষক মহাশয় গতানুগতিক পদ্ধতিতে পাঠদানের মাধ্যমে পরীক্ষায় কৃতকার্য ছাত্রের সংখ্যাবৃদ্ধির চেষ্টা করেন।

৪। **শিখনের ভুল পদ্ধতি :**—অনেক ক্ষেত্রে শিক্ষক মহাশয় গণিত শিক্ষা দেন ভুল পদ্ধতিতে। প্রায়ই দেখা যায় শিক্ষক মহাশয় সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে জ্যামিতি শেখান এবং অবরোহী পদ্ধতিতে পাটীগণিত ও বীজগণিত শেখান। এতে ছাত্রদের স্বাধীন চিন্তার গতিপথ রুদ্ধ হয়ে যায়। ছাত্রদের বিচারশক্তি প্রয়োগ করতেও কোন প্রকার উৎসাহ দেওয়া হয় না। সবচেয়ে বড় কথা শ্রেণীতে শিক্ষকমহাশয়ই একমাত্র বক্তা এবং ছাত্ররা নীরব শ্রোতা মাত্র। শ্রেণীর মধ্যে ছাত্রদের সক্রিয় অংশ গ্রহণের কোনপ্রকার সুযোগই দেওয়া হয় না। শিখন পদ্ধতি ছাত্র-কেন্দ্রিক না হয়ে হয় বিষয়-কেন্দ্রিক।

৫। **পরীক্ষা শাসিত শিখন :**—আর একটি কারণ হল পরীক্ষার প্রভাব। বর্তমানের শিখন-পদ্ধতি পরীক্ষার দ্বারা নিয়ন্ত্রিত। শিক্ষক মহাশয় শিখনের সময় পরীক্ষাতে পাশ করার লক্ষ্যটিতেই তাঁর মনোযোগ কেন্দ্রীভূত করে থাকেন। আবার পরীক্ষার প্রয়োজনের দিকে লক্ষ্য রেখেই প্রত্যক্ষভাবে এবং পরোক্ষভাবে শিখন পদ্ধতি এবং পাঠক্রম নির্দ্ধারিত হয়ে থাকে। পরীক্ষা পাশের লক্ষ্য সরিয়ে রেখে গণিত সম্বন্ধে নূতন দৃষ্টিভঙ্গী গড়ে তোলার কোন প্রচেষ্টাই দেখা যায় না। কাজেই আমরা এ কথা বলতে পারি শিখন পদ্ধতি ও বিষয়বস্তু নির্বাচনে শিক্ষকের প্রভাব যতটা, পরীক্ষকের বা স্কুল পরিদর্শকের প্রভাব তার চেয়ে অনেক বেশী।

৬। **অতিদীর্ঘ পাঠক্রম ঃ**—স্কুলপাঠ্য গণিতের পাঠক্রমটি অযথা অত্যন্ত দীর্ঘ করা হয়েছে। কম সময়ের মধ্যে অত্যন্ত দীর্ঘ পাঠক্রম শেষ করতে হয় বলে শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের প্রতি ব্যক্তিগত মনোযোগ দেবার কোন সুযোগই পান না। আবার পঠনের গতি অত্যন্ত দ্রুত ব'লে ছাত্ররা অধীত বিষয় সম্বন্ধে চিন্তা করার বা বিষয়টি আয়ত্ত করার কোন সময় পায় না। আবার অনেক অধ্যায়ে এমন বিষয় সন্নিবিষ্ট আছে যেগুলির বাস্তব কোন মূল্যই নেই।

৭। **পাঠাগার ও পাঠ্যপুস্তকের অভাব ঃ**—গণিতের পাঠ্যপুস্তক বা প্রাসঙ্গিক পুস্তক সমন্বিত পাঠাগার পৃথক ভাবে কোন স্কুলে আছে বলে জানা যায় নি। আর গণিতের পরীক্ষাগার গড়ে তোলা আমাদের দেশে এখনও কল্পনামাত্র। যে সমস্ত পাঠ্যপুস্তক বাজারে প্রচলিত আছে, সেগুলি বেশ উচ্চমানের নয়। অনেক পাঠ্য-পুস্তকে মুদ্রনের ভুল তো আছেই, যথেষ্ট সংখ্যক উদাহরণও থাকে না। আবার অনেক পুস্তকে উদাহরণে একটি কি দুটি অঙ্কের সমাধান করেই উদাহরণ শেষ হয়ে যায়। কি ভাবে সমাধান করা হ'ল এবং তার প্রতিটি স্তরের ব্যাখ্যা প্রায়ই থাকে না। ফলে কোন একটি বিশেষ সমাধান হৃদয়ঙ্গম করতে হলে ছাত্রদের শিক্ষকের সাহায্য নেওয়া ছাড়া কোন উপায় থাকে না। ফলে কোন একটি বিশেষ সমাধান হৃদয়ঙ্গম করতে হলে ছাত্রদের শিক্ষকের সাহায্য নেওয়া ছাড়া কোন উপায় থাকে না। অথচ পাঠ্য-পুস্তক হওয়া উচিত "লিপিবদ্ধ শিক্ষক"। শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীতে যে যে ভাবে পাঠ দেন, ঠিক সেই ভাবেই সমস্যাগুলির সমাধান পাঠ্যপুস্তকে লিপিবদ্ধ থাকবে যাতে ছাত্ররা শিক্ষকের সাহায্য না নিয়েও কেবলমাত্র পাঠ্যপুস্তকের সাহায্যেই কোন বিশেষ সমস্যার বিভিন্ন অংশগুলি সম্পূর্ণরূপে হৃদয়ঙ্গম করতে পারে।

প্রতিকার (Remedies)—গণিতের নীরস ও একঘেয়ে পাঠকেও সরস ও চিত্তাকর্ষক করা সম্ভব। অবশ্য এইজন্য শিক্ষক মহাশয়কেও কিছুটা কষ্ট স্বীকার করতে হবে ও পরিশ্রমী হতে হবে। সঠিক পদ্ধতি অবলম্বন করলেই গণিত পাঠের একঘেয়েমী অনেকাংশে দূর করা যায়। নিম্নলিখিত পদ্ধতিগুলি অবলম্বন করলে অনেক সুফল পাওয়া যেতে পারে।

(১) শিক্ষককে গণিতে উপযুক্ত শিক্ষণ-প্রাপ্ত হতে হবে এবং তাঁর কাজের প্রকৃতি সঠিক ভাবে জানতে হবে। প্রাত্যহিক পাঠদানের পূর্বে মনোবিজ্ঞান সম্মত-ভাবে পাঠটীকা তৈরী করে যেতে হবে। ছাত্রদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে নূতন পাঠ দিতে হবে। যেখানেই সুযোগ পাওয়া যাবে, সেখানেই গণিতকে দৈনন্দিন কার্যাবলীর

সঙ্গে যুক্ত করে দিতে হবে। আবার ছাত্ররা যাতে গণিতের জ্ঞান পরবর্তী কালে দৈনন্দিন জীবনে প্রয়োগ করতে পারে তার শিক্ষা দিতে হবে। তত্ত্বগত জ্ঞানের চেয়ে ব্যবহারিক জ্ঞানের দিকেই বেশী জোর দিতে হবে। যতদূর সম্ভব যান্ত্রিক পদ্ধতিতে পাঠদান বন্ধ করতে হবে।

(২) প্রতিটি ছেলের প্রতি ব্যক্তিগত মনোযোগ দিতে পারলে ভালো হয়। তা সম্ভব না হ'লে—অন্ততঃ স্বল্পবুদ্ধিবিশিষ্ট ছাত্রদের প্রতি ব্যক্তিগত মনোযোগ দিতে হবে। পাঠদান পদ্ধতি বিভিন্ন শ্রেণীতে এবং বিভিন্ন ছাত্রদের ক্ষেত্রে বিভিন্ন হবে। কোন একটি সমস্যার কেবলমাত্র একটি নির্দিষ্ট পদ্ধতিতে সমাধান করলে চলবে না। ছাত্রদের বুদ্ধির পরিবর্তনের সঙ্গে সমাধানের পদ্ধতিও পরিবর্তিত হবে। যারা খুব দ্রুত পাঠগ্রহণ করে, যারা সাধারণ ছাত্র এবং যারা খুব ধীরে পাঠগ্রহণ করে—তাদের প্রত্যেকের জন্য সমস্যাসমূহের প্রকৃতি ভিন্ন হবে। ছাত্র ও ছাত্রীদের পাঠক্রম বিভিন্ন হবে।

(৩) শিখন পদ্ধতিতে ছাত্রেরা নিষ্ক্রিয় না থেকে সক্রিয় অংশ গ্রহণ করবে। কোন নূতন শিখনের পূর্বে সেই সূত্র সম্বন্ধীয় সহজ প্রশ্ন নির্বাচন করতে হবে। ছাত্ররা যাতে ব্ল্যাক-বোর্ডে লিখতে উৎসাহ বোধ করে তার ব্যবস্থা করতে হবে।

(৪) বিষয়বস্তুটি চিত্তাকর্ষক করে তুলতে হবে। যাই পড়ানো হোক না কেন, ভালোভাবে পড়াতে হবে। কঠিন বা নীরস বিষয়বস্তু এড়িয়ে গেলে চলবে না। সমস্যার গতানুগতিক ভাষা ছাত্রদের নিকট পরিষ্কারভাবে বুঝিয়ে দিতে হবে। ছাত্ররা যাতে যান্ত্রিক পদ্ধতিতে সমস্যার সমাধান না করে তাদের বুদ্ধি প্রয়োগ করে, তার জন্য তাদের উৎসাহ দিতে হবে। শিক্ষক মহাশয় যে পদ্ধতিতে সমাধান করেন, ছাত্র যদি ঠিক সেইভাবে সমাধান না ক'রে নিজস্ব পদ্ধতিতে সমাধান করে, তবে তাকে প্রশংসাই করা উচিত। খুব দ্রুত সমাধান করা থেকে ছাত্রদের বিরত করতে হবে কারণ তাতে ভুল হওয়ার সম্ভাবনাই থাকে। সঠিক পদ্ধতিতে, স্তরে স্তরে কিভাবে সমাধান করতে হয়—তা ছাত্রদের বুঝিয়ে দিতে হবে। অংকের সঠিক উত্তরটাই বড় কথা নয়। সঠিক পদ্ধতিতে সমাধান করা, যথার্থতা, পরিষ্কার পরিচ্ছন্নতা, নির্ভুল উত্তর—সব গুলিই সমান প্রয়োজনীয়।

(৫) অভ্যাসের ফলেই সিদ্ধিলাভ হয়। গণিতে অভ্যাস বা পুনরাবৃত্তি একান্ত প্রয়োজন। স্মৃতির উপর খুব বেশী নির্ভর করলে চলবে না। ছাত্ররা শ্রেণীতে যা বুঝতে পেরেছে তা যেন পুনরাবৃত্তির সাহায্যে সঠিকভাবে মনে রাখতে পারে। একবার মাত্র শুনেই যদি তাঁরা ভাবে যে পাঠটি তাদের মুখস্থ হয়ে গেছে তা হলে খুব

ভুল হবে। অনেক ভালো ছেলে স্মৃতির উপর বেশী নির্ভর করে পরীক্ষা গৃহে (Examination Hall) সব কিছু ভুল করে আসে।

(৬) গণিত পাঠের একটা আদর্শ পরিবেশ আছে। এর জন্য চাই শান্ত ও নীরব একটি পরিবেশ। ছাত্ররা যেন শ্রেণীতে গোলমাল না করে।

(৭) ছাত্রদের যে সমস্ত গৃহকাজ দেওয়া হয়, সেগুলি যথাযথভাবে পরীক্ষা করতে হবে। ভুলগুলি সংশোধন করে দিতে হবে। 'রাফ-কাজ' বন্ধ করতে হবে। অনেক সময় ছাত্ররা শ্রেণীতে রাফ্ করে ও পরে বাড়ীতে সেগুলি ভালোভাবে লিখে থাকে। এ অভ্যাসটি আসলে কু-অভ্যাস। এতে সময় যেমন বেশী লাগে, তেমনি শ্রেণীতে নিয়ম মাফিক কাজ করার অভ্যাসটিও ছাত্রদের মধ্যে গড়ে ওঠে না।

(৮) গণিতের পাঠক্রমটি অনড় ও অপরিবর্তনীয় হওয়া চলবে না। এটি যাতে নমনীয় ও পরিবর্তনশীল হয় সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে।

(৯) গণিতের যে সমস্ত অধ্যায়ে দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গে কোনপ্রকার যোগ আছে সেই সমস্ত অধ্যায়ের উপর অধিক গুরুত্ব অরোপ করতে হবে। ছাত্ররা যেন বুঝতে পারে গণিত শিখন হচ্ছে ভবিষ্যৎ জীবনের প্রস্তুতি এবং এর শিখনের ফলে অন্যান্য বিষয়গুলির শিখনও সহজ হয়। পাটীগণিত শিখনকে নাগরিকতার শিক্ষা বলা যেতে পারে। এই জন্য গণিতের পাঠক্রমকে কিছুটা তত্ত্বগত এবং কিছুটা "হিসাব-সম্বন্ধীয়" বা ব্যবহারগত করতে হবে।

(১০) গণিতের সমস্যাগুলি যেন সম্পূর্ণ কাল্পনিক না হয়। সমস্যাগুলি যাতে বাস্তব জীবনের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত হয়, সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে।

(১১) ছাত্রদের প্রতি শিক্ষকের মনোভাব হবে বন্ধুসুলভ এবং সহানুভূতি সম্পন্ন। যাদের বুঝতে একটু বেশী সময় লাগে, তাদের প্রতি নির্দয় হলে ফল আরো খারাপ হতে পারে।

(১২) শিখন-পদ্ধতিতে পরীক্ষা-নিরীক্ষার প্রতি যেন শিক্ষক মহাশয় আগ্রহী হন। শিক্ষণ-পদ্ধতি যেন স্থিতিশীল না হয়ে গতিশীল হয়।

(১৩) গণিত-শিখনে পাঠ্যপুস্তকটি যে সম্পূর্ণ অন্ধভাবে অনুসরণ করে চলতে হবে এমন কোন কথা নেই। পাঠ্যপুস্তকটি লক্ষ্যে পৌছানোর একটি উপায়মাত্র। এটি নিজে কিন্তু একটি লক্ষ্য নয়। আবার বৎসরের প্রথমে পাঠ্যপুস্তক নির্বাচনের সময়ও বিশেষ যত্ন নিতে হবে। পাঠ্যপুস্তকের আকার যেন অতি বৃহৎ না হয়। যতটুকু প্রয়োজন, সেইটুকু পাঠ্যপুস্তকের মধ্যে থাকলেই চলবে। আবার পাঠ্যপুস্তকে যেন সমস্ত সমস্যার সমাধান না করা থাকে বা প্রতি সমস্যার সমাধানের ইঙ্গিত না

দেওয়া থাকে। কারণ সে ক্ষেত্রে ছাত্রদের স্বাধীন ও মৌলিক চিন্তাধারা ব্যাহত হবে।

(১৪) শিক্ষকের পাঠদান-পদ্ধতি কতদূর সফল হয়েছে এবং ছাত্ররা কতটা বুঝতে পেরেছে তা জানবার জন্য সাপ্তাহিক পরীক্ষার ব্যবস্থা করতে হবে। নম্বর দানের সময় ছাত্রদের প্রতিটী ভুল নির্দেশ করে দিতে হবে। ছাত্ররা যেন তাদের উত্তরপত্রে ভুলগুলি সংশোধন করে নেয়।

(১৫) গণিতে আগ্রহ সৃষ্টি করার উদ্দেশ্যে "গাণিতিক সমাজ" (Mathematical Society) গড়ে তোলা যেতে পারে। স্থানীয় এবং দূরবর্তী স্থানের গণিত শিক্ষকদের আমন্ত্রণ করে এনে বক্তৃতা দেওয়ার ব্যবস্থা করা যেতে পারে। ভারতীয় ও বৈদেশিক খ্যাতনামা গণিতবিদ্‌দের জীবনী ও পুস্তক সম্বন্ধে আলোচনা করা যেতে পারে।

(১৬) ছাত্ররা যাতে গণিত সম্বন্ধীয় চার্ট, মডেল প্রভৃতি তৈরী করে—তার শিক্ষা দিতে হবে। "গাণিতিক খেলনা" (Mathematical Toy) তৈরী করারও ব্যবস্থা করতে হবে। গুরুত্বপূর্ণ সূত্র, সম্পাদ্য—উপপাদ্য প্রভৃতির উদাহরণ কার্ডবোর্ডের উপর সুন্দরভাবে প্রকাশ করা যায়।

(১৭) স্কুলের লাইব্রেরীতে যেন গণিতসম্বন্ধীয় ভালো ভালো পাঠ্যপুস্তক থাকে তার ব্যবস্থা করতে হবে। স্কুলের নির্বাচিত পাঠ্যপুস্তক ছাড়াও যেন অন্যান্য পাঠ্যপুস্তকও থাকে।

(১৮) গণিতে নম্বরদানের পদ্ধতির পরিবর্তন করতে হবে। মূল্যায়ন সংখ্যাবাচক মূল্যে না করে প্রতীক চিহ্নের সাহায্যে করাই সুবিধাজনক। যেমন: A – খুব ভালো, B – ভালো, C – মাঝারী, D – খারাপ এবং E – খুব খারাপ।

(১৯) গণিতের ধাঁধা বা মজার উদাহরণের সাহায্যে ছাত্রদের আগ্রহ সৃষ্ট করা যায়। যেমন:—

$1\times9+2=11$	$1\times8+1=9$
$12\times9+3=111$	$12\times8+2=98$
বা	
$123\times9+4=1111$	$123\times8+3=987$
$1234\times9+5=11111$	$1234\times8+4=9876$

আরো কতকগুলি প্রয়োজনীয় প্রস্তাব:—

(১) ছাত্ররা অনেক সময় গণিতের প্রয়োজনীয় অংশগুলির দিকে বিশেষ দৃষ্টি না দিয়ে সমস্ত পাঠটিই মুখস্থ করে। কিন্তু গণিত বুঝতে হয়—মুখস্থ করা যায় না

গণিতের প্রতিটি স্তর উত্তমরূপে হৃদয়ঙ্গম করা উচিত। কোন একটি স্তর কেন হল ; তার জন্য আর কি হতে পারে' (Why and wherefore) এ সমস্ত ভালভাবে জানা উচিত। এক কথায় বলা যেতে পারে, অন্তর্দৃষ্টির সাহায্যে গণিত শিক্ষা করলে কখনও ভুল হবার সম্ভাবনা থাকে না।

(২) সহজ পদ্ধতির অংক বা যে সমস্ত অংকের মুখে মুখে উত্তর দিতে বলা হয় সেগুলি বাদ দিলে চলবে না। তেমনি জ্যামিতির কোন সমস্যার (Rider) সমাধান করতে পারবে এই বিশ্বাসে সন্তুষ্ট হয়ে সেটি ফেলে রাখলে চলবে না। প্রতিটি সমস্যার সমাধান যেন ছাত্ররা স্বাধীনভাবে করতে পারে। তাছাড়া তাদের সঞ্চিত বা আহরিত জ্ঞানের যাতে সার্থক প্রয়োগ ঘটে, সেদিকেও লক্ষ্য রাখতে হবে।

(৩) ছাত্রদের অধীত অংশ বার বার পুনরাবৃত্তি করতে হবে। জানা আছে এ ধারণা নিয়ে বসে থাকলে পুনরাবৃত্তির অভাবে জানা জিনিসের ভুল হতে পারে।

(৪) প্রতিটি জ্ঞান বা জ্ঞানের অংশ যেন ছাত্ররা সঞ্চিত করে রাখে। সমস্ত জ্ঞানই তারা সবসময় ব্যবহার করবে না ঠিকই, কিন্তু জ্ঞান আহরণ ও সঞ্চয় করতে গিয়েই তাদের সত্যের সঙ্গে পরিচয় হবে (Right is right and to follow right is wisdom.)

(৫) ছাত্ররা যেন গণিতকে ভালবাসতে শেখে। গণিত শিখনে তাদের যেন মনোযোগ বৃদ্ধি পায় সেদিকেও লক্ষ্য রাখতে হবে।

(৬) বিশ্লেষণে দক্ষতা ও নির্ভুল উত্তরদানের ক্ষমতা বৃদ্ধির জন্য মানসিক হিসাব করার পদ্ধতিটি বেশ ভালোভাবে আয়ত্ত করে নিতে হবে। গণিতের চর্চার ফলে যে রকম মনোযোগ বৃদ্ধি পায়, এমনটি আর কোন বিষয়েই হয় না। গণিত চর্চার ফলে বিচারকরণের ক্ষমতাও বৃদ্ধি পায়।

নূতন পদ্ধতির প্রয়োজনীয়তা :—

গণিতশাস্ত্রটি দিন দিন যেমন প্রয়োজনীয় হচ্ছে, তেমনি জনপ্রিয়ও হচ্ছে। বিংশ শতাব্দীর বিজ্ঞানের যুগে গণিত একটি অপরিহার্য বিষয় হিসাবে পরিগণিত হয়েছে এবং এখনও হচ্ছে। জীবনের প্রতিটি পদক্ষেপে গণিত বন্ধুর মতো এগিয়ে আসছে। কৃষি-শিল্প-বাণিজ্য-সর্বত্রই গণিতের জয় জয়কার। ইলেকট্রনিক যন্ত্র, কম্প্যুটার, অটোমেশন ইত্যাদির ফলে দিন দিন গণিতজ্ঞের চাহিদা বেড়েই চলেছে। এর একটা প্রতিফলন যে স্কুল পাঠ্য গণিতেও আসবে সে বিষয়ে কোন সন্দেহ নেই।

কৃষি, শিল্প ও বাণিজ্যের ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার অত্যন্ত বৃদ্ধি পেয়েছে। এগুলির যথাযথ উন্নতির জন্য গণিতের সার্থক ব্যবহার প্রয়োজন বলে এই সমস্ত বিভাগের কর্মকর্তাদের গণিত সম্বন্ধে উত্তম জ্ঞান অর্জন করার প্রয়োজন অনুভূত হচ্ছে। গণিতের চিন্তাধারাই হল সুশৃঙ্খল চিন্তাধারা। এখানে অবাস্তব ও অসংলগ্ন চিন্তাধারার কোন স্থানই নেই। বাস্তব জগতে এমন অনেক সমস্যার সম্মুখীন হতে হয়, যেগুলি সম্বন্ধে চিন্তা করতে, তাদের স্বরূপ ও প্রকৃতি নির্ণয় করতে এবং সেগুলির সমাধানের পন্থা অবলম্বন করতে হলে গণিতের সাহায্য প্রয়োজন। কাজেই সমস্যাগুলির সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণের ব্যাপারে গণিতই সাহায্য করে।

গণিতে কি শেখান হচ্ছে সেটা বড় কথা নয়, বড় কথা হল—গণিত কিভাবে শেখানো হচ্ছে। ছাত্রদের কৌতূহল প্রবৃত্তির দিকে লক্ষ্য রেখেই পঠন-পাঠন ও পরীক্ষা গ্রহণের ব্যবস্থা করা হয়। কিন্তু এই প্রবৃত্তির জন্যই আবার ছাত্র অনেক সময় সমস্যাটি সম্পূর্ণরূপে হৃদয়ঙ্গম না করে সঠিক ও নির্ভুল উত্তর দেবার জন্য উঠে পড়ে লাগে। এটি বন্ধ করতেই হবে।

ছাত্রদের মনে অতি শৈশব থেকেই এই ধারণা জন্মিয়ে দেওয়া হয় যে গণিত মানেই হ'ল অবাস্তব ও অপার্থিব একটা বিষয়। বাস্তবের সঙ্গে এর কোন সম্বন্ধই নেই। তাছাড়া বিভিন্ন অংশগুলির পরিচয়ও তারা সঠিকভাবে গ্রহণ করে না। ফলে অনেকেই Pythagoras এর প্রথম Pটি লিখেন ছোট হাতে। কারণ **Pythagoras** যে একজন লোক এ ধারণাই তাদের থাকে না। কিংবা কোন ছাত্রকে যখন জিজ্ঞাসা করা হয় "1 2" ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত? তখন ছাত্র উত্তর দেয়ঃ—

ক্ষেত্রফল $=\pi r^2$, $r=1\cdot2''$ $\therefore r^2=1\cdot44,''$ তারপর সে **log table** থেকে π এর মান নির্ণয় করে, $\pi=3\cdot142$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=3\,142\times1\cdot44.$

এখানে ছাত্র ভেবে দেখে না যে π মানটি আসন্নমানে নেওয়া হয়েছে এবং দশমিকের দুই স্থানের পর থেকে আর তার উত্তরটি নির্ভুল হয় নি। সচরাচর স্কুলে এমন প্রশ্ন দেওয়া হয় যার সঠিক উত্তর নির্ণয় করাই সম্ভব। কিন্তু এগুলির তত্ত্বগত এবং ব্যবহারিক উভয় প্রকার মূল্যই অত্যন্ত কম। এর ফলে বিভিন্ন মাত্রাবিশিষ্ট আসন্ন মানের সঙ্গে ছাত্রদের পরিচয় ঘটে না।

অনেক সময় কৃত্রিম উপায়ে বা পাঠ্যপুস্তক প্রদর্শিত উপায়ে গণিত শেখানো হয়ে থাকে। এতে অনেক সময় প্রতীক চিহ্নও ব্যবহার করা হয়। কিন্তু এ পদ্ধতি

যান্ত্রিক ও গতানুগতিক। শিল্পক্ষেত্রে যে গণিতের প্রয়োজন তাতে বাস্তবের সঙ্গে ঘনিষ্ঠ যোগাযোগ রাখা উচিত।

স্কুলে লেখচিত্রের কোন প্রকার প্রয়োগ নেই বললেই চলে। কিন্তু বর্তমানে অধিকাংশ বিষয়েই লেখচিত্রের বহুল প্রচলন দেখা যায়। অনেক সংখ্যার সাহায্যে যে তত্ত্বটি প্রকাশ করা কঠিন, লেখচিত্রের সাহায্যে সেই তত্ত্বকে অনেক সহজেই প্রকাশ করা সম্ভব। এই জন্যই বর্তমানে অর্থনীতি, সমাজবিদ্যা—মনোবিজ্ঞান প্রভৃতি বিষয়ে লেখচিত্র অধিক সংখ্যায় ব্যবহার করা হচ্ছে।

এইজন্যই গতানুগতিক পদ্ধতি বাতিল করে নূতন পদ্ধতিতে গণিত শিক্ষা দেওয়ার প্রয়োজনীয়তা এত ব্যাপক ভাবে অনুভূত হচ্ছে।

সপ্তম অধ্যায়

গণিত শিক্ষণে প্রতিষেধমূলক ব্যবস্থা

(Remidial Teaching in Mathematics)

অধিকাংশ গণিত শিক্ষকেরই এই অভিযোগ যে ছাত্ররা গণিতে বিশেষ আগ্রহী হয় না, গণিতে তাদের ফল আশানুরূপ নয় এবং গণিত পরীক্ষাতে তারা যে নম্বর পায় তা অন্যান্য বিষয়ের নম্বরের তুলনায় কম। গণিত একটি অমূর্ত (abstract) বিষয়, সে বিষয়ে কোন সন্দেহ নেই। কিন্তু অন্যান্য অমূর্ত বিষয় যেমন চিত্তাকর্ষক করা সম্ভব, গণিতকেও তেমনি চিত্তাকর্ষক করা যায়। কোন একজন ছাত্রকে গণিত শিক্ষণের পক্ষে অযোগ্য বিবেচনা করা—মনস্তত্ত্ব ও শিক্ষাতত্ত্ব—উভয় তত্ত্বের দিক থেকেই অত্যন্ত ভুল। যে কোন স্বাভাবিক বুদ্ধিসম্পন্ন ছাত্র উত্তমরূপে গণিত শিখতে পারে। কিন্তু তাঁর জন্য বিশেষ কতকগুলি সর্ত থাকা প্রয়োজন। যেমন, শিক্ষককে দক্ষ হতে হবে, তার ধৈর্য্য থাকা একান্ত প্রয়োজন, তিনি মনোবিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতিতে পাঠদান করবেন এবং ছাত্রের নিকট ভীতির কারণ না হয়ে তার বন্ধু, দার্শনিক ও পথ-প্রদর্শকের ভূমিকা গ্রহণ করবেন। বুদ্ধিহীনতা বা স্বল্পবুদ্ধিই গণিতে অনগ্রসরতার কারণ—এ কথা কোন কোন ক্ষেত্রে প্রযোজ্য, সর্বক্ষেত্রে নয়।

বুদ্ধিহীনতা ছাড়াও আরো অন্যান্য অনেক কারণ আছে যেগুলি গণিতে অনগ্রসরতার কারণ হিসাবে পরিগণিত হতে পারে। শিক্ষক মহাশয়কে প্রতি ক্ষেত্রে অনগ্রসরতার কারণগুলি খুঁজে বের করতে হবে। কেবলমাত্র কারণগুলি খুঁজে বের করেই শিক্ষকের কাজ শেষ হয় না। কারণগুলি দূরীভূত করা অর্থাৎ অনগ্রসরতা দূর করার উপায়ও তাঁকে খুঁজে বের করতে হবে। এর জন্যই বিভিন্ন প্রতিষেধমূলক ব্যবস্থা অবলম্বন করা প্রয়োজন।

এখন দেখা যাক—অনগ্রসরতার কারণগুলি কি কি হতে পারে? কারণগুলি **প্রধানত চার** ভাগে ভাগ করা যায়। যথা:—

(১) ছাত্র-সম্বন্ধীয়, (২) শিক্ষক-সম্বন্ধীয়, (৩) পরিচালন-সম্বন্ধীয়, এবং (৪) অন্যান্য। এখন প্রত্যেকটি সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক।

(১) **ছাত্র-সম্বন্ধীয় (Concerning the pupils) :—**

(ক) বিষম শ্রেণী (Heterogeneous class) :—ক্লাসের সব ছাত্র সবদিক

দিয়ে একেবারে এক হয না। বুদ্ধির দিক থেকেই এই পার্থক্য সবচেয়ে বেশী প্রকট হয়ে থাকে। সাধারণতঃ সাধারণ বুদ্ধিবিশিষ্ট ছাত্রদের দিকে নজর রেখেই পাঠ পরিচালনা করা হয়ে থাকে। এতে স্বল্পবুদ্ধি বিশিষ্ট ছাত্রেরা উপকৃত হয় না। তারা কিছু দিনের মধ্যে গণিতে আগ্রহ হারিয়ে ফেলে। অপর ছাত্রদের সঙ্গে তুলনা ক'রে তারা নিজেদের মধ্যে একটা অনগ্রসরতার মনোভাব গড়ে তোলে এবং তার ফলে শ্রেণীর সুস্থ পরিবেশটিও নষ্ট হয়ে যায়। এদের পৃথক দলে রেখে শিক্ষার ব্যবস্থা করলে ফল ভালো হয়।

(খ) **শারীরিক, পারিবেশিক ও প্রাক্ষোভিক কারণ :**—অন্যান্য বিষয়ের তুলনায় গণিতে খুব সহজেই শারীরিক ও মানসিক ক্লান্তি এসে যায়। গণিতের 'ক্লান্তি-মূল্য' (fatigue-value) অত্যন্ত বেশী। তা ছাড়া গণিত শিক্ষণে অখণ্ড মনোযোগের প্রয়োজন। শরীর দুর্বল বা রুগ্ন থাকলে, পরিবেশ প্রতিকূল থাকলে এবং প্রক্ষোভের মাত্রা অত্যধিক হলে গণিত-শিক্ষণ সম্ভব হয় না। ক্রমাগত ভাবে এইরূপ চললেই গণিত সম্বন্ধে একটা মনোভাব গড়ে উঠবেই।

(গ) **শারীরিক ত্রুটী :**—শারীরিক ত্রুটীও গণিতে অনগ্রসরতার অন্যতম কারণ। যে সমস্ত ছাত্রের দৃষ্টি শক্তির কোন ত্রুটী আছে, বা যারা কানে খাটো, তারা শ্রেণীকক্ষে ঠিকমত মনোযোগ দিতে পারে না। এরা খুব সহজেই গণিতে অনগ্রসর হয়ে পড়ে।

(ঘ) **দীর্ঘ অনুপস্থিতি :**—ছাত্র যদি দীর্ঘদিন কোন শ্রেণীতে অনুপস্থিত থাকে, তাহলে পাঠক্রমের ধারাটির সঙ্গে তার যোগাযোগ বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়। পূর্বেকার পাঠগুলির সঙ্গে পরিচয় না থাকার জন্য নূতন পাঠগুলি আয়ত্ত করা তার পক্ষে অত্যন্ত অসুবিধা হয়।

(ঙ) **প্রচেষ্টার অভাব :**—অনেক সময় ছাত্ররা গভীর আগ্রহের সঙ্গে গণিতের পাঠ আরম্ভ করে। কিন্তু এই আগ্রহ ক্ষণস্থায়ী প্রকৃতির হয়। ফলে কিছুক্ষণ পরেই আগ্রহের অভাবে গণিত তার নিকট নীরস বিষয় বলে প্রতিভাত হয়।

(২) **শিক্ষক-সম্বন্ধীয় (Concerning the teacher) :**—

(ক) অনেক সময় শিক্ষক মহাশয়রা গণিত-শিক্ষণের উদ্দেশ্য ঠিকমত বুঝতে পারেন না। উদ্দেশ্যহীণতার ফলে বাস্তব অভিজ্ঞতার সঙ্গে গণিতের যোগসূত্রটি নষ্ট হয়ে যায়। তাছাড়া নির্দিষ্ট সময়ে পাঠক্রম (syllabus) শেষ করার জন্য শিক্ষক মহাশয়রা অত্যন্ত দ্রুত গতিতে এগিয়ে যান। ফলে ছাত্রদের নিকট গণিত একটি নীরস ও অর্থহীন বিষয়ে পর্যবসিত হয়।

(খ) গণিত একটি অমূর্ত বিষয় হলেও এর অনেকখানিই মূর্ত বস্তুর সাহায্যে প্রকাশ করা সম্ভব। কিন্তু শিক্ষক মহাশয় এ ব্যাপারে কোন পরীক্ষা-নিরীক্ষা করার প্রচেষ্টাই করেন না। গণিতের যে একটা ব্যবহারিক রূপ আছে সে দিকটা সম্পূর্ণ অবহেলা করে শিক্ষক মহাশয় কেবলমাত্র তাত্ত্বিক দিকটাই তুলে ধরেন। অপ্রিয় হলেও বলতে হয়, গণিত সম্বন্ধে অনেক ধারণার (concept) সুস্পষ্ট জ্ঞানও অনেক শিক্ষক মহাশয়ের নাই।

(গ) অনেক সময় শিক্ষক মহাশয় প্রয়োজনীয় অধ্যায়গুলিতে সময় কম দিয়ে অপ্রয়োজনীয় অধ্যায়গুলিতে অনর্থক বেশী সময় দিয়ে থাকেন। এ অভ্যাসটি অত্যন্ত ক্ষতিকর।

(ঘ) বিভিন্ন শ্রেণীর পক্ষে উপযুক্ত করে সিলেবাসটি তৈরী করা হয় না। আবার সিলেবাস তৈরী করা থাকলেও শিক্ষাদানের সময় শিক্ষক মহাশয় ঠিক ধারাটি অনুসরণ করেন না। ফলে নীচু শ্রেণীতে কঠিন বিষয় এবং উঁচু শ্রেণীতে সহজ বিষয় পাঠের ব্যবস্থা হয়ে যায়।

(ঙ) পরীক্ষা, পর্যালোচনা, পুনরালোচনা ইত্যাদির জন্য অযথা বেশী সময় দেবার একটা প্রবণতাও শিক্ষক মহাশয়দের থেকে যায়।

(চ) ব্যক্তিগত মনোযোগ দেওয়া শিক্ষকমহাশয়ের পক্ষে সম্পূর্ণ অসম্ভব হয়ে পড়ে। অনেক সময় শ্রেণীতেই অনেক ছাত্র তাদের অসুবিধার কথা শিক্ষক মহাশয়কে জানায়। কিন্তু শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীতে সে অসুবিধা দূর করার কোন চেষ্টা করেন না। অনেকে আবার বিরক্ত হন। এর ফলে ছাত্ররা নিরুৎসাহ হয়ে পড়ে এবং তাদের অসুবিধাটি থেকেই যায়।

(৩) **পরিচালন সম্বন্ধীয় (Concerning the Administration) :—**

(ক) পরীক্ষার ফলাফলের ভিত্তিতে প্রমোশন দেওয়ার পদ্ধতিটি অত্যন্ত ত্রুটীপূর্ণ। অনেক সময় গণিতে ফল খারাপ করা সত্ত্বেও স্কুলের ছাত্রসংখ্যা ঠিক রাখার জন্য ছাত্রকে উঁচুশ্রেণীতে তুলে দেওয়া হয়। আবার বর্তমানে বহুমূখী শিক্ষা ব্যবস্থাতে যে সমস্ত ছাত্র কলা বিভাগে (Humanities Stream) ভর্তি হয়, তাদের গণিতে ভালো ফল করাটা একটা প্রয়োজনীয় ব্যাপারই নয়। তারা গণিতে ৩০% নম্বর পেলেই উত্তীর্ণ হয়ে যায়।

(খ) স্কুলে ছাত্র ভর্তি করার আগে অনেক সময় একটা এ্যাডমিশন টেষ্ট নেওয়া হয়। এটা অত্যন্ত মামুলী ব্যাপার হয়ে দাঁড়িয়েছে। ছাত্রসংখ্যা বাড়াবার জন্য টেষ্ট নেওয়া হয় ঠিকই, কিন্তু তার ফলাফলের কোন মর্যাদাই দেওয়া হয় না।

(৪) **অন্যান্য কারণ (Other Causes)** :—

(ক) স্কুলের বিভিন্ন শ্রেণীর গণিত শিক্ষকদের মধ্যে পরস্পর একটা বোঝাপড়া নেই। কোন একজন শিক্ষক যদি তাঁর শ্রেণীর পাঠক্রম সমাপ্ত করতে না পারেন, তবে তার পরবর্তী শ্রেণীর শিক্ষক আর বাকী অংশটুকু শেষ করার চেষ্টা করেন না। তিনি তাঁর শ্রেণীর নূতন পাঠক্রম অনুসরণ করতে আরম্ভ করেন। ফলে একটা বৃহৎ অংশ তাদের অজানাই থেকে যায়।

(খ) শাস্তি, নিন্দা বা শিক্ষকের সহানুভূতিহীন মনোভাব ছাত্রদের মনে বিরূপ প্রতিক্রিয়ার সৃষ্টি করে।

(গ) পরীক্ষার প্রশ্নপত্র ও নম্বরদানের পদ্ধতিও অনগ্রসরতার জন্য কম দায়ী নয়। শিক্ষক মহাশয়রা সাধারণতঃ প্রশ্নপত্রে অত্যন্ত কঠিন ও চাতুর্য্যপূর্ণ প্রশ্ন দিয়ে থাকেন। আবার কোন প্রশ্নের উত্তর ভুল হলে শূন্য নম্বর দেওয়া হয়। কিন্তু এ পদ্ধতি অত্যন্ত ত্রুটীপূর্ণ। শূন্য নম্বর পেলে ছাত্রের মনে অত্যন্ত হীনমন্যতার ভাব জন্মে। কোন প্রশ্নের সঠিক পদ্ধতির জন্য (উত্তর যদি ভুল হয়, তবুও) কিছু নম্বর অন্ততঃ দিতেই হবে। সে ক্ষেত্রে সবচেয়ে কম বুদ্ধিসম্পন্ন বা সবচেয়ে ধীরগতি সম্পন্ন ছাত্রও কিছুটা কৃতিত্ব প্রদর্শনেরও সুযোগ পায়।

(ঘ) অনেক ছাত্র নীচুক্লাসে গণিতের মৌলিক নীতিগুলি ভালো করে আয়ত্ত করে না। যেমন নামতা মুখস্থ করা, গণিতের বিভিন্ন অধ্যায়ের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় করা ইত্যাদি ব্যাপারে তারা সম্পূর্ণ অজ্ঞই থেকে যায়।

(ঙ) কতকগুলি সাধারণ ভুল, মৌলিক দক্ষতার অভাব, শিক্ষণের হার, পূর্বজ্ঞান প্রয়োগে অক্ষমতা এ সমস্তও গণিতে অনগ্রসরতার কারণ। অনেক সময় ছাত্ররা কতকগুলি মৌলিক নীতির মধ্যে পার্থক্য পরিষ্কার বুঝতে পারে না। যেমন $2x$ এবং x^2 বা $3x$ এবং x^3 এর মধ্যে পার্থক্য পরিষ্কারভাবে জানতে হবে। তাছাড়া অধিকাংশ ছাত্রই কোণের সঠিক সংজ্ঞা জানে না। আবার কোণের চিত্র থেকে তার নাম বলা বা কোনও ত্রিভুজের কোণগুলি নির্দেশ করার ব্যাপারে তারা অনেক সময় অক্ষমতা প্রকাশ করে থাকে। সে ক্ষেত্রে ছাত্রদের জন্য পৃথক পদ্ধতির ব্যবস্থা করতে হবে। আবার তাড়াতাড়ি করার জন্য অনেক সময় ছাত্ররা $4 \times 4 = 8$ লিখে থাকে। সেইজন্য প্রথমেই ছাত্রদের তাড়াতাড়ি না করার অভ্যাসটি আয়ত্ত করিয়ে দিতে হবে। মোটামুটিভাবে বলতে গেলে এ সমস্তই হল গণিতে অনগ্রসরতার কারণ। এর পরের করণীয় বিষয় হ'ল—ছাত্রদের দুর্বলতা বা অনগ্রসরতা নির্ণয় করা এবং সেই অনুযায়ী প্রতিষেধমূলক ব্যবস্থা অবলম্বন করা।

দুর্বলতা নির্ণয় :—

নিম্নোক্ত পদ্ধতিগুলির সাহায্যে ছাত্রদের গণিতে দুর্বলতা নির্ণয় করা সম্ভব :—

১। শিক্ষকমহাশয় প্রতিটি ছাত্রের সঙ্গে পরিচিত হয়ে তার বিশেষ সমস্যা বা চাহিদাগুলির খবর নেবেন।

২। প্রতিটি পরীক্ষার পর ছাত্রদের গণিতের নম্বরগুলি পর্যালোচনা করতে হবে।

৩। প্রতিটি ছাত্রের ভুল কোথায় এবং ছাত্রের কোন্ জায়গায় অসুবিধা হচ্ছে তার প্রতি সবিশেষ লক্ষ্য রাখতে হবে।

৪। স্বল্পবুদ্ধিসম্পন্ন এবং ধীরগতিবিশিষ্ট ছাত্রদের পৃথক করে ডেকে নিয়ে এসে তারা কতদূর শিখেছে তার হিসেব নিতে হবে।

৫। বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে সমস্যা অনুযায়ী দুর্বলতা নির্ণায়ক অভীক্ষা করে ছাত্রদের দুর্বলতা জেনে নিতে হবে।

৬। ছাত্রদের সর্বাত্মক পরিচয় লিপি (Cumulative Record Card) রাখতে হবে এবং প্রয়োজন হলেই ঐ লিপি পর্যালোচনা করে সেই অনুযায়ী দুর্বলতা নির্ণায়ক অভীক্ষা (Diagnosis Test) প্রয়োগ করতে হবে।

প্রতিষেধমূলক শিখন (Remedial Teaching) :—

প্রতিষেধমূলক শিখনের ব্যবস্থা করলে গণিতে ছাত্রদের দুর্বলতা বা আগ্রহের অভাব বহুলাংশে দূর করা সম্ভব। নিম্নোক্ত কতকগুলি উপায়ের সাহায্যে প্রতিষেধমূলক শিখনের ব্যবস্থা করা সম্ভব।

(১) গণিত-শিক্ষনে গণিতের ধারনা, মূলতত্ত্ব ও পদ্ধতিগুলির পুনরাবৃত্তি করতে হবে। একই জিনিস বার বার ছাত্রদের সামনে উপস্থাপিত করলে সবচেয়ে কম বুদ্ধিবিশিষ্ট ছাত্রও সেটী হৃদয়ঙ্গম করতে সক্ষম হয়।

(২) গণিত একটী অমূর্ত বিষয়। কিন্তু অনেক মূর্ত জিনিসের সাহায্যে গণিত শিখনকে সহজ করা সম্ভব। এর জন্য চিত্র, মডেল, বাস্তব কোন ঘটনা বা লেখচিত্র প্রভৃতির সাহায্য নেওয়া চলতে পারে।

(৩) একঘেয়ে ও একটানা বক্তৃতার বদলে প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে পাঠ এগিয়ে নিয়ে যেতে হবে। 'ক্রমবিকাশমূলক প্রশ্ন' (Developmental question) এবং অনুসন্ধানী প্রশ্নই গণিত শিখনে সবচেয়ে বেশী কার্য্যকরী হয়।

(৪) কঠিন অধ্যায়গুলিতে শিক্ষকমহাশয়কে অধিক মনোযোগ দিতে হবে।

(৫) ছাত্রদের মধ্যে আত্মবিশ্বাস জাগিয়ে তুলতে হবে। আত্মবিশ্বাস আবার নিম্নোক্ত উপায়গুলির সাহায্যে জাগানো সম্ভব।

(ক) গণিতের সমস্যাগুলি যাতে ছাত্ররা স্বাধীনভাবে সমাধান করতে পারে তার জন্য তাদের উৎসাহিত করতে হবে। একান্ত প্রয়োজন না হলে শিক্ষকমহাশয় ছাত্রদের সাহায্য করবেন না।

(খ) অনগ্রসর ছাত্রদের জন্য তাদের উপযোগী পদ্ধতি অবলম্বন করতে হবে। তাদের সমস্যাগুলির প্রকৃতি অপেক্ষাকৃত সহজ হবে।

(গ) ছাত্রদের ছোট ছোট দলে ভাগ করে পৃথকভাবে কাজ দিতে হবে। এতে যেমন দলপ্রীতি গড়ে উঠে, তেমনি সুস্থ প্রতিযোগিতার ভাবও গড়ে উঠে।

(৬) গ্রীষ্মের ছুটি বা অন্য কোন ছুটিতে অনগ্রসর ছাত্রদের জন্য বিশেষ পাঠের ব্যবস্থা করতে হবে। এতে তাদের দুর্বলতা অনেকটা দূর করা সম্ভব।

(৭) কোন একটী বিশেষ অধ্যায় সকল ছাত্র ভালভাবে আয়ত্ত না করা পর্য্যন্ত নতুন কোন অধ্যায়ের পাঠ শুরু করা চলবে না।

(৮) পাঠের ফাঁকে ফাঁকে পুরাতন পাঠের আলোচনা একান্ত প্রয়োজনীয়। অনেক স্কুলে 'সাপ্তাহিক পরীক্ষার' ব্যবস্থা আছে। এতে ছাত্রদের অনগ্রসরতার বা তারা কতটা ভুলে গেছে—তার একটা পরিচয় পাওয়া যায়।

(৯) অনগ্রসর ছাত্ররা গণিতে উন্নতির ভাব দেখালে তাদের স্বীকৃতি দিতে হবে। এতে তাদের প্রেষণা উদ্বুদ্ধ হয়।

(১০) নতুন পাঠ সুরু করার আগে ছাত্রদের পূর্বজ্ঞানের পরিচয় নিতে হবে।

(১১) বাড়ীর কাজ খুব বেশী পরিমাণে দিলে চলবে না। যেটুকু দেওয়া হবে সেটুকু যাতে যথাযথ ভাবে পরীক্ষা করা হয় এবং ভুলগুলি শুদ্ধ করে দেওয়া হয় তার ব্যবস্থা করতে হবে।

(১২) অনগ্রসর ছাত্রদের প্রতি শিক্ষকমহাশয় বিশেষ মনোযোগ দেবেন। এ ব্যাপারে কয়েকটী কথা মনে রাখতে হবে।

(ক) অনগ্রসর ছাত্রদের জন্য যে প্রতিষেধমূলক শিখনের ব্যবস্থা করা হয়, তাতে ছাত্রদের অবিরাম সাহায্যের প্রয়োজন হয়। শিক্ষকমহাশয়কে এর জন্য যথেষ্ট সময়ের ব্যবস্থা করতে হবে।

(খ) অনগ্রসর ছাত্রদের অনগ্রসরতার জন্য তিরস্কার বা নিন্দা করলে চলবে না। তাদের প্রতি বন্ধুসুলভ ও সহানুভূতিসূচক মনোভাব পোষণ করতে হবে।

(গ) প্রতিষেধমূলক শিখন ঠিক সেই জায়গা থেকে শুরু করতে হবে—যেখানে ছাত্রদের অনগ্রসরতাও শুরু হচ্ছে। তারপর ক্রমপর্য্যায়ে পাঠ এগিয়ে চলবে।

(ঘ) এক একটী অধ্যায়ের অনগ্রসরতা এক এক দিনের শিখনে দূর করা সম্ভবও নয় আবার উচিতও নয়। প্রতিষেধমূলক শিখনের মাত্রা অপেক্ষাকৃত কম হবে।

(ঙ) অনগ্রসর ছাত্রদের উপযুক্ত প্রশ্ন তৈরী করতে হবে।

এ সমস্ত পদ্ধতি অবলম্বন করলে অনগ্রসরতা যে বেশ কিছু পরিমানে দূরীভুত হবে, সে বিষয়ে কোন সন্দেহই নেই। আবার যারা সাধারণ ছাত্র, এ পদ্ধতিতে তারাও কিছুটা উপকৃত হবে। শিক্ষক মহাশয়কেও এর জন্য কিছুটা অতিরিক্ত পরিশ্রম করতে হবে। বিষয়টিতে অনগ্রসরতার কারণ অনুসন্ধান করে তা দূরীভুত করার সঠিক পদ্ধতি তাঁকে নির্ণয় করতে হবে। অনগ্রসর ছাত্রদের প্রতিদিন সম্ভব না হলেও, সপ্তাহে অন্ততঃ ২।৩ দিন পৃথক ভাবে পাঠ দিতে হবে। একই পদ্ধতি শ্রেণীর সকল ছাত্রের পক্ষে সমানভাবে কার্য্যকরী হয় না বলেই অনগ্রসর ছাত্রদের পৃথক পদ্ধতিতে পাঠদানের ব্যবস্থা করলে সুফল পাওয়া যেতে পারে। তাছাড়া বিদ্যালয়ের ও শ্রেণীর পরিবেশটী সুনিয়ন্ত্রিত করে এবং শিক্ষক-ছাত্রের মধ্যে একটা মধুর সম্পর্ক (Rapport) গড়ে তুলে বেশ ভালো ফল পাওয়া যায়।

অষ্টম অধ্যায়

"গণিত শিক্ষার পদ্ধতি"

(Methods Of Teaching Mathematics)

গণিতে বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় করা হয়। কিন্তু এই সমস্ত সম্বন্ধ প্রকাশ করার সময় ভাষার বহুল ব্যবহার করা হয় না। গণিতের সম্বন্ধ প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। প্রতীকগুলি কোন শব্দ, সংখ্যা, অক্ষর, চিত্র বা গ্রাফ জাতীয় হয়। এই সম্বন্ধ নির্ণয় করার সময় ছাত্র আবিষ্কারের আনন্দ অনুভব করে। Whitehead এর কথায় "Every child should experience the joy of discovery."

গণিত শিখনের উদ্দেশ্যগুলির কথা আগেই আলোচনা করা হয়েছে। সচরাচর দুটি প্রধান লক্ষ্যের দিকে সবসময় নজর রাখা হয়। সে দুটি হল :—(১) বিষয়টির উপলব্ধি সম্বন্ধে নিশ্চিত হওয়া এবং (২) হিসাব ও গণনাতে দক্ষ হওয়া।

গণিত শিখনে দুটি কথা প্রায়ই ব্যবহৃত হয়। একটি হল পদ্ধতি (Method) এবং অপরটি হল :—প্রণালী (Mode)। পদ্ধতি হল—যে ভাবে বিষয়বস্তুটি সাজানো হয় এবং সেটিকে সমাপ্তির দিকে এগিয়ে নিয়ে যাওয়া হয়। আর প্রণালী হল বিষয়বস্তুটিকে যে ভাবে ছাত্রদের নিকট উপস্থাপিত করা হয়[১]। অবশ্য পদ্ধতি ও প্রণালীর মধ্যে পার্থক্যটী সবসময় খুব সহজে নির্ণয় করা যায় না। কখনও কখনও পদ্ধতি ও প্রণালীকে পৃথক করাই যায় না। অনেক সময় প্রণালীকে পদ্ধতির মধ্যেই অন্তর্ভুক্ত করা হয়।

আবার গণিত শিখনে যে সমস্ত পদ্ধতির ব্যবহার দেখা যায়, সেগুলিও সম্পূর্ণ পৃথক বা স্বয়ং-সম্পূর্ণ পদ্ধতি নয়। অনেক সময় কোন একটি পদ্ধতির ছাপ অপর একটি পদ্ধতির মধ্যেও দেখা যায়। আবার একই জিনিস শেখাবার সময়ও বিভিন্ন পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয়ে থাকে। অবশ্য প্রত্যেকটি পদ্ধতিরই একটা নিজস্ব বৈশিষ্ট্য আছে এবং বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে বিশেষভাবে প্রযুক্ত হবার মত ক্ষমতা আছে।

---

(১) In the study of the pedagogy of mathematics, the point of view is sometimes that of the manner in which the subject matter is arranged and developed; at others that of the manner in which it is presented to the pupils * * * The former has sometimes been called method and the latter mode.

The teaching of mathematics—J. W. A. Young Pp. 53.

গণিত শিক্ষনেও মনোবিজ্ঞানের প্রভাব যথেষ্ট পরিলক্ষিত হয়। তবে মনোবিজ্ঞানের সব শাখাগুলিরই ব্যবহার দেখা যায় না। অনুষঙ্গবাদ (Association Theory) ও গেষ্টাল্ট (Gestalt) মতবাদ—এই দুই শ্রেণীর মতবাদের প্রভাবই বেশী দেখা যায়। অনুষঙ্গবাদীরা শিখনে উদ্দীপক ও তার প্রতিক্রিয়ার উপর বেশী জোর দিয়ে থাকেন। এই জন্য এঁরা law of exercise এর law of effect এই দুটি শিখনের নিয়ম বা সর্ত্তের উপর বেশী জোর দিয়ে থাকেন। Gestalt বাদীরা গণিতকে বিচ্ছিন্ন ভাবে না দেখে সামগ্রিক ভাবে বুঝবার ও জানবার উপর জোর দিয়ে থাকেন। এঁরা যে কেবলমাত্র চর্চ্চার ফলে শিখন হয়, এ কথা বিশ্বাস করেন না। এঁদের মতে শিখনের জন্য যে জিনিসটী একান্ত প্রয়োজনীয়, তা হ'ল অন্তর্দৃষ্টি (Insight).

গণিত শিখনে যে সমস্ত পদ্ধতি ও প্রণালী ব্যবহৃত হয়, তার একটা তালিকা নীচে দেওয়া হল।

পদ্ধতি ঃ—

১। **বিশ্লেষণ ও সংশ্লেষণ পদ্ধতি** (**Analytic & Synthetic Method**)

২। **আরোহী ও অবরোহী পদ্ধতি** (**Inductive & Deductive Method**)

৩। **আবিষ্কারকের পদ্ধতি** (**Heuristic Method**)

৪। **বক্তৃতা পদ্ধতি** (**Lecture Method**)

৫। **পরীক্ষাগার পদ্ধতি** (**Laboratory Method**)

৬। **ঐতিহাসিক পদ্ধতি** (**Historical Method**)

৭। **একরোখা পদ্ধতি** (**Dogmatic Method**)

৮। **নির্দেশমূলক পদ্ধতি** (**Assignment Method**) **প্রভৃতি।**

প্রণালী ঃ—

১। **পরীক্ষা,** ২। **আবৃত্তি,** ৩। **বক্তৃতা,** ৪। **ব্যক্তিগত,** ৫। **দলগত প্রভৃতি।**

এবার পদ্ধতিগুলির সম্বন্ধে কিছু আলোচনা করা যাক্—প্রথমে ধরা যাক্—**বিশ্লেষণ ও সংশ্লেষণ পদ্ধতির** কথা।

বিশ্লেষণ কথাটীর আসল অর্থ হল—যে সমস্ত জিনিস একত্রে আছে, তাদের খণ্ড বা অংশগুলিকে পৃথক বা বিশ্লিষ্ট করা। আবার সংশ্লেষণ কথাটীর অর্থ হল খণ্ড অংশগুলিকে একত্র জুড়ে সম্পূর্ণ জিনিসটী প্রস্তুত করা।

বিশ্লেষণ হল সমগ্র সমস্যাটিকে এমন ভাবে খণ্ড বা অংশে ভাগ করা যাতে অংশগুলিকে পরে আবার জুড়ে সমগ্র সমস্যাটিকেই ফিরে পাওয়া যায়। সংশ্লেষণ হল সমস্যার বিশিষ্ট অংশগুলিকে পুনরায় জুড়ে দিয়ে সমস্যাটি পুনর্গঠিত করা যাতে সমস্যাটির যথার্থতা প্রমাণিত হয়। গণিতে আমরা বিশ্লেষণ পদ্ধতি প্রয়োগ করি যাতে আমরা বিভিন্ন বিচ্ছিন্ন অংশ একত্রিত করে সম্পূর্ণ সমস্যাটি উপলব্ধি করতে পারি ; অর্থাৎ সম্পূর্ণ সমস্যা যে বিচ্ছিন্ন অংশের সমষ্টি এবং সম্পূর্ণ সমস্যার সঙ্গে বিচ্ছিন্ন অংশগুলির একটা নির্দিষ্ট সম্বন্ধ আছে তা উপলব্ধি করার জন্য। সেইজন্যই সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে বিচ্ছিন্ন অংশগুলিকে আবার সংযুক্ত করে সম্পূর্ণ সমস্যাটী প্রস্তুত করা হয়। বিশ্লেষণের থেকেই সংশ্লেষণে যাওয়া যায় ; আবার সংশ্লেষণ থেকেই বিশ্লেষণের উদ্দেশ্য ও নিয়মাবলী ব্যাখ্যা করা যায়। এই জন্যই এ কথা বলা যেতে পারে সংশ্লেষণ ছাড়া বিশ্লেষণ সম্পূর্ণ হয় না। বিশ্লেষণকে যদি চিন্তন প্রক্রিয়া বলা যায়, তবে সংশ্লেষণকে বলা যেতে পারে চিন্তন প্রক্রিয়ার ফল। প্রকৃতপক্ষে সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ একই পদ্ধতির দুটি অবিচ্ছেদ্য অংশ।

বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে আমরা অজানা জিনিসের সহায়তায় জানা জিনিসে পৌছাই। আর সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে জানা জিনিসের সহায়তায় অজানা জিনিসে পৌছাই। কোনও জানা তথ্য দেওয়া আছে। তার উপর ভিত্তি করে একটী অজানা সিদ্ধান্ত প্রমাণ করতে হবে। সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে ঐ জানা তথ্যকে ভিত্তি করে অগ্রসর হতে হয়। বিভিন্ন দিক থেকে বিচার করে বা বিভিন্ন জিনিসের সাহায্য নিয়ে পরীক্ষা করে দেখতে হয় যতক্ষণ না অজানা সিদ্ধান্তটি প্রমাণিত হয়। সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে প্রমাণ শুরু হয় প্রদত্ত সত্য তত্ব থেকে (hypothesis) এবং শেষ হয় সিদ্ধান্তে (conclusion)। কিন্তু বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে অজানা সিদ্ধান্ত থেকে প্রমাণ শুরু করতে হয়। অজানা সিদ্ধান্তটিকে বিশ্লেষণ করে দেখতে হয় সেটি অন্য কোনও সত্যতার উপর নির্ভর করে কি না। যদি করে, তা হলে দেখতে হবে ঐ সত্যতা আবার অন্য কোন সত্যতার উপর নির্ভরশীল কি না! এইভাবে বিশ্লেষণ করে যেতে যেতে জানা তথ্যটিতে পৌছাতে হয় এবং শেষে দেখা যায় অজানা সিদ্ধান্তটির সত্যতা প্রকৃতপক্ষে জানা তথ্যটীর সত্যতার উপর নির্ভরশীল। কিন্তু জানা তথ্যটি যে সত্য—তা আগেই প্রমাণিত হয়ে গেছে। সুতরাং অজানা সিদ্ধান্তটিও যে সত্য-তা প্রমাণিত হয়ে যায়। সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে বলা যায় ঃ A-সত্য বলে B সত্য, আবার B সত্য বলে C ও সত্য। কিন্তু বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে বলা যায় ঃ

C সত্য হয়, যখন B সত্য। আবার B সত্য হয়, যখন A সত্য। কিন্তু A

সত্য বলে আগেই বলা হয়েছে। অতএব C সত্য হবেই।

এখন দুটি পদ্ধতির উদাহরণ দেওয়া যাক্।

উদা: ১ যদি $a : b = c : d$ হয়, তবে প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$ac+2b^2 : bc = c^2+2bd : dc$$

সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে প্রমাণ :— $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

উভয় পক্ষে $\frac{2b}{c}$ যোগ করিয়া

$$\frac{a}{b}+\frac{2b}{c}=\frac{c}{d}+\frac{2b}{c}$$

বা, $\frac{ac+2b^2}{bc}=\frac{c^2+2bd}{dc}$

বা, $ac+2b^2 : bc = c^2+2bd : dc$ (প্রমাণিত)

বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে প্রমাণ :—

$\frac{ac+2b^2}{bc}=\frac{c^2+2bd}{dc}$ এই অভেদটি তখনই সত্য হয়, যখন

$(ac+2b^2)dc=(c^2+2bd)bc$ হয়,

উপরের অভেদটি সত্য হয়, যখন

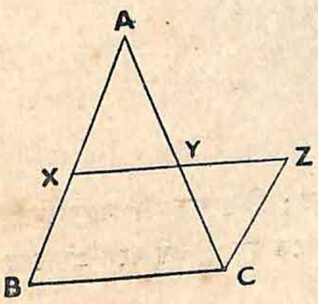
$ac^2d+2b^2cd=bc^3+2b^2cd$ হয়,

বা, যদি $ac^2d=bc^3$ হয়,

বা যদি $ad=bc$ হয়।

কিন্তু $ad=bc$ দেওয়া আছে। সুতরাং

$ac+2b^2 : bc=c^2+2bd : dc$ এই অভেদটি প্রমাণিত হল।



উদা: ২ প্রমাণ করিতে হইবে যে ত্রিভুজের দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

বিশ্লেষণ পদ্ধতি: কোন একটি রেখাকে অপর একটি রেখার অর্ধেক

প্রমাণ করতে হলে ছোট রেখাটিকে দ্বিগুণ করা হয়। সেইজন্য XY কে Z পর্য্যন্ত বাড়ানো হয় যাতে $XY = YZ$ হয়।

এখন প্রমাণ করতে হবে $XZ = BC$ এবং $XZ \parallel BC$ একই সঙ্গে সমান ও সমান্তরাল প্রমাণ করতে হলে BCZX যে একটী সামান্তরিক, তা প্রমাণ করলেই চলবে। BCZX যে একটি সামন্তরিক, তা বিভিন্ন ভাবে প্রমাণ করা যায়। BX এবং CZকে সমান ও সমান্তরাল প্রমাণ করতে পারলেই BCZX যে একটি সামন্তরিক তা প্রমাণ করা যাবে। BX ও CZ যে সমান্তরাল তা প্রমাণ করা যায় যদি $\angle XAY = \angle YCZ$ প্রমাণ করা যায়। আবার $\angle XAY = \angle YCZ$ প্রমাণ করা যায় যদি $\triangle XAY \equiv \triangle YCZ$ প্রমাণ করা যায়। $\triangle XAY \equiv \triangle YCZ$. অতএব ‖ BX CZ.

আবার $BX = AX$, এর সাহায্যে প্রমাণ করা যায় $BX = CZ$ এবং $BX \parallel CZ$.

সংশ্লেষণ পদ্ধতি ঃ ABC ত্রিভুজে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X এবং Y। প্রমাণ করতে হবে $XY \parallel BC$ এবং $2XY = BC$ বা $XY = \frac{1}{2}BC$.

অঙ্কন ঃ—XY কে Z পর্য্যন্ত বাড়ানো হল যেন $XY = YZ$ হয়। CZ যোগ করা হল। এখন XAY এবং YCZ ত্রিভুজ দুটিতে

$$XY = YZ,\ AY = YC \text{ এবং } \angle AYX = \angle CYZ.$$

∴ ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

∴ $CZ = AX = BX$ এবং $\angle XAY = \angle YCZ$

∴ BX এবং CZ পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

সুতরাং XZ এবং BC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

কিন্তু $XZ = 2XY = BC$

XY, BCর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

সংশ্লেষণ পদ্ধতির প্রমাণ সংক্ষিপ্ত ও মার্জিত ; কিন্তু কতকটা অনুমানের উপর ভিত্তি করে চেষ্টা ও ভুল পদ্ধতির মধ্য দিয়ে অগ্রসর হতে হয়। এর ফলে প্রমাণের সব

স্তরের ব্যাখ্যা খুঁজে পাওয়া যায় না। যেমন প্রথম উদাহরণে কেন $\frac{2b}{c}$ যোগ করা হল তার কোন সঙ্গত কারণ বা ব্যাখ্যা খুঁজে পাওয়া যায় না। বিশ্লেষণ পদ্ধতি একটু দীর্ঘ ও ক্লান্তিকর, সে বিষয়ে কোন সন্দেহ নেই। কিন্তু এখানে প্রমাণের প্রতিটি স্তর বেশ স্পষ্ট। সংশ্লেষণ পদ্ধতিকে একটি বিশেষ পদ্ধতি বলা যেতে পারে। কিন্তু বিশ্লেষণ পদ্ধতি সার্বজনীন ও সাধারণ নিয়মের উপর ভিত্তি করে গঠিত। কোন একটি স্তর যদি ছাত্র ভুলে যায়, তবে বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে সে ভুলটি সংশোধন করার সুযোগ পায়, কিন্তু সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে পায় না। বিশ্লেষণ পদ্ধতি কঠিন হতে পারে কিন্তু এতে সবগুলি ধাপই বোঝা যায়। প্রত্যেকটি ধাপের একটী যুক্তিও পাওয়া যায়। কিন্তু সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে যে ধাপগুলি দেখা যায়, সেগুলির সত্যতা বোঝা যায় ; ব্যাখ্যা করা যায় না। এখানে কতকগুলি জানা সত্যকে একত্র করে সেগুলির সাহায্যে অজানা সিদ্ধান্তটিকে সত্য বলে প্রমাণ করা হয়। কিন্তু বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে অজানা সিদ্ধান্তকে বিশ্লেষণ করে কতকগুলি খণ্ডে ভাগ করে সেই খণ্ডগুলির সত্যতা প্রমাণিত করে অজানা সিদ্ধান্তটির সত্যতা প্রমাণ করা হয়। Young এর মতে : The Synthetic method seeks a needle in a haystack but in the analytic method the needle seeks to get out the haystack. বিশ্লেষণ পদ্ধতিই হচ্ছে সত্যকার গণিতজ্ঞের পদ্ধতি। কোন সিদ্ধান্তের সত্যতা আবিষ্কার ও পুনঃ আবিষ্কারের জন্য বিশ্লেষণ পদ্ধতিই প্রশস্ত। আবার প্রমাণটিকে সংক্ষেপে ও সুন্দর ভাবে উপস্থিত করতে হলে সংশ্লেষণ পদ্ধতিই ভালো। এইজন্য পাঠ্যপুস্তকগুলি সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে লিখিত হয়।

বিশ্লেষণ পদ্ধতি যখন সংশ্লেষণ পদ্ধতির চেয়ে ভালো তখন, আমরা কি একথা বলতে পারি যে শ্রেণীকক্ষে কেবল বিশ্লেষণ পদ্ধতিরই ব্যবহার করা হবে? উত্তরে বলা যাবে—না। সংশ্লেষণ পদ্ধতিরও শ্রেণীকক্ষে একটা গুরুত্বপূর্ণ ও প্রয়োজনীয় স্থান আছে। ছাত্ররা প্রথমে বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে প্রমাণের প্রত্যেকটি ধাপ বুঝে নেবে। তারপর সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে সেই প্রমাণ সুন্দর ও সংক্ষিপ্ত ভাবে লিখে রাখবে। বিশ্লেষণ হল আবিষ্কারকের পদ্ধতি আর সংশ্লেষণ হল সেই আবিষ্কারের ফলকে সুন্দর ও সংক্ষিপ্ত ভাবে লিপিবদ্ধ করে রাখার পদ্ধতি।

এখন সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ পদ্ধতির একটা তুলনামূলক আলোচনা করা যাক :—

আরোহী ও অবরোহী পদ্ধতি (Inductive and Deductive Method)

কতকগুলি বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্ত থেকে একটা সাধারণ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার পদ্ধতিকে আরোহী পদ্ধতি বলে। যে বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্ত দেওয়া থাকে, সেগুলি সাধারণতঃ মূর্ত জিনিস ঘিরে হয়। তারপর মূর্ত থেকে অমূর্ত সাধারণ সিদ্ধান্তে পৌছাতে হয়। (Particular to general and concrete to the abstract)। কিন্তু অবরোহী পদ্ধতি ঠিক এর বিপরীত। এ পদ্ধতিতে একটি সাধারণ তথ্যকে স্বীকার করে নিয়ে বিশেষ ক্ষেত্রের সত্যতা প্রমাণ করা হয়। অমূর্ত জিনিস থেকে মূর্ত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় এ পদ্ধতিতে। (General to particular and abstract to concrete)। আমরা অভিজ্ঞতা থেকে যে সমস্ত সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি, সে সমস্ত সিদ্ধান্ত প্রায়ই আরোহী পদ্ধতির সাহায্যে নির্ণীত হয়। আরোহী পদ্ধতির অনুমান পরীক্ষাপ্রসূত। এই পদ্ধতিতে যে সমস্ত সিদ্ধান্ত পাওয়া যায়-সেগুলি যে সব একেবারে সঠিক তা নয়। তবে সেগুলি সঠিক হবার সম্ভাবনা যথেষ্ট। এইজন্য গণিতের তথ্য আবিষ্কারের পথ দেখাবার জন্য এই পদ্ধতি অত্যন্ত কার্য্যকরী। এটিকে বলা হয় সঠিক গণিতের পদ্ধতি (Mathematical type—Young)। আরোহী পদ্ধতিতে লব্ধ সিদ্ধান্তের একটী আদর্শ উদাহরণ :—

পূর্বের যে সমস্ত দিনের কথা মনে পড়েছে-সেই সমস্ত দিনে সকালবেলাতে সূর্য্য উঠেছিল। আজও উঠেছে। অতএব এ কথা বলা যায়-সূর্য্য প্রত্যহই উঠে। অবরোহী পদ্ধতির শ্রেষ্ঠ উদাহরণ হল—ন্যায়শাস্ত্রের যুক্তিধারা। যেমন :—

সকল মানুষ মরণশীল,

রবীন্দ্রনাথও একজন মানুষ,

অতএব তিনিও মরণশীল।

অথবা

শীর্ষকোণগুলি সবসময় সমান

$\angle A$ এবং $\angle B$ শীর্ষ কোণ

অতএব $\angle A = \angle B$.

ঃ সংশ্লেষণ পদ্ধতি ঃ	ঃ বিশ্লেষণ পদ্ধতি ঃ
১। জানা তথ্য (বা সত্য) থেকে অজানা সিদ্ধান্তে যাওয়া হয়। তত্ত্ব (hypothesis) থেকে সিদ্ধান্তে (conclusion) পৌছানো হয়।	১। অজানা সিদ্ধান্ত থেকে শুরু করে জানা সত্যে পৌছানো হয়। সিদ্ধান্ত থেকে তত্ত্বে যাওয়া হয়।
২। বিভিন্ন জানা সত্য একত্রিত করে সেগুলির সাহায্যে অজানা সিদ্ধান্তটির সত্যতা প্রমাণ করা হয়।	২। অজানা সিদ্ধান্তকে বিশ্লেষণ করে ছোট ছোট ভাগ করে সেই ভাগ গুলির সত্যতা প্রমাণ করে তার সাহায্যে অজানার সত্যতা প্রমাণ করা হয়।
৩। প্রতিটি স্তর বা ধাপ যে নির্ভু'ল তা বোঝা যায়। কিন্তু কোন একটি স্তর কেন নেওয়া হল তার ব্যাখ্যা করা হয় না। স্তরগুলি প্রায় যান্ত্রিক ভাবে একে অপরকে অনুসরণ করে থাকে।	৩। প্রতিটি স্তরের একটা কারণ ও উদ্দেশ্য আছে। প্রত্যেকটী ধাপেরই একটা যুক্তি পাওয়া যায়। এ পদ্ধতি আবিষ্কারের পদ্ধতি যদিও কিছুটা দীর্ঘ এবং ক্লান্তিকর।
৪। একবার ভুলে গেলে স্তরগুলি আর সহজে পুনরাবিষ্কার করা যায় না।	৪। ভুলে গেলেও স্তরগুলি সহজেই পুনরায় আবিষ্কার করা যায়।
৫। সংশ্লেষণ পদ্ধতি যুক্তিসম্মত প্রকাশের পদ্ধতি। কোন বিশেষ বক্তব্য যে সত্য তা প্রমাণ করার জন্য খুব বেশী বুদ্ধির প্রয়োজন হয় না। বুদ্ধির ব্যবহার এতে অত্যন্ত কম।	৫। এতে যথেষ্ট মানসিক শক্তির প্রয়োজন। এই পদ্ধতির চর্চ্চার ফলে মনের যথেষ্ট উন্নতি হয়।
৬। স্থায়ী ভাবে কোন কিছু লিপিবদ্ধ করে রাখতে হ'লে এ পদ্ধতি শ্রেয়ঃ। খুব সংক্ষেপে সুন্দর ও মার্জিত ভাবে আবিষ্কারের ফলগুলি লিপিবদ্ধ করা সম্ভব। সেইজন্য পাঠ্য পুস্তক এই পদ্ধতিতে লিখিত হয়।	৬। পদ্ধতিটি লম্বা ও বিরক্তিজনক বলে স্থায়ীভাবে কিছু লিপিবদ্ধ করার জন্য এর ব্যবহার নেই। পাঠ্যপুস্তক এ পদ্ধতিতে লিখিত হবে কি না এ সম্বন্ধে এখনও কোন নিশ্চিত সিদ্ধান্ত নেওয়া সম্ভব হয় নি।

এখন আরোহী ও অবরোহী পদ্ধতিতে সমস্যা সমাধানের দৃষ্টান্ত দেওয়া যাক। ধরা যাক্ সমস্যাটি হ'ল—3% হারে 600 টাকার 5 বৎসরের সরল সুদ কত হবে? প্রথমে **আরোহী পদ্ধতিতে** সমাধান করা যাক:—

100 টাকার 1 বৎসরের সরল সুদ = 3 টাকা

1 ,, 1 ,, ,, ,, $= \frac{3}{100}$,,

600 ,, 1 ,, ,, ,, $= \frac{3}{100} \times 600$

600 ,, 5 ,, ,, ,, $= \frac{3}{100} \times 600 \times 5$

$= 90$ টাকা

অবরোহী পদ্ধতি

সরল সুদ নির্ণয় করার সূত্র হল:—

$$S.I = \frac{P \times R \times T}{100}$$

যখন P. = আসল টাকা,

R. = সুদের হার এবং

T. = নির্দিষ্ট সময়।

$$\therefore \quad S.I = \frac{600 \times 3 \times 5}{100} = 90 \text{ টাকা}$$

শিক্ষাগত মূল্যায়ন

গণিতে কোন নিয়ম তৈরী করতে হলে আরোহী পদ্ধতি অবলম্বন করাই শ্রেয়ঃ। শিক্ষার্থী এই পদ্ধতি অনুসরণ করলে লাভবানই হয়। অবশ্য পূর্ব নির্ধারিত কোন সূত্রের সাহায্যে গণিতের সমস্যার সমাধান করা খুবই সংক্ষিপ্ত এবং সহজ ব্যাপার। ত্রিভুজের মধ্যমা কাকে বলে, তা জানতে গিয়ে যদি প্রতিবারই মধ্যমার সংখ্যামূলক পরিমাপ গ্রহণ করতে হয়, তবে খুবই অসুবিধা হয়। তার চেয়ে মধ্যমার সংজ্ঞা মুখস্থ করে রাখা অনেক সহজ। এইজন্যই শিক্ষকমহাশয়েরা অবরোহী পদ্ধতির আশ্রয় গ্রহণ করেন এবং পাঠ্যপুস্তকেও একই পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়। ফলে আরোহী পদ্ধতি স্বাভাবিক ভাবেই অবহেলিত হয়।

আবার গণিতের মতো অমূর্ত বিষয় শিক্ষা দেবার আগে মূর্ত বিষয় সম্বন্ধে কিছু জ্ঞান এবং কিছু বাস্তব অভিজ্ঞতারও প্রয়োজন। মূর্ত অভিজ্ঞতার ফলই হ'ল অর্তমূ

ভাব এবং বেশ কিছু সংখ্যক বাস্তব অভিজ্ঞতার মাধ্যমেই অমূর্ত কোন সূত্র বা নিয়ম গঠন করা সম্ভব।

তাছাড়া বিশুদ্ধ অবরোহী পদ্ধতির একটা বড় অসুবিধা আছে। বিভিন্ন ধরণের সমস্যা সমাধানের জন্য বিভিন্ন জাতীয় সূত্র মুখস্থ রাখতে হয়। ফলে যদি ছাত্র কোন একটি সূত্র ভুলে যায়, তবে তার পক্ষে আর সমস্যার সমাধান করা সম্ভব হয় না। অবশ্য এর অর্থ এই নয় যে, এ পদ্ধতি সব সময় পরিত্যাগ করতে হবে। এমন অনেক সমস্যা আছে যেখানে আরোহী পদ্ধতি অপেক্ষা অবরোহী পদ্ধতি অধিক কার্যকরী। কিন্তু কোন সূত্র প্রথম গঠন করার সময় আরোহী পদ্ধতি অনুসরণ করাই শ্রেয়ঃ। প্রমাণিত তথ্যগুলির ক্ষেত্রে অবরোহী পদ্ধতি অবলম্বন করা যেতে পারে।

এই প্রসঙ্গে কয়েকটি মূল্যবান নির্দেশনা মনে রাখলে ভালো হয়ঃ

☐ সুযোগ পেলেই আরোহী পদ্ধতি অবলম্বন করা উচিত।

☐ অবরোহী পদ্ধতি যদি ব্যবহার করতেই হয়, তবে তা আরোহী পদ্ধতি ব্যবহার করার পর করা উচিত।

☐ একান্ত প্রয়োজন না হলে অবরোহী পদ্ধতি ব্যবহার করা চলবে না।

সাধারণতঃ বীজগণিত ও পাটীগণিতে "আরোহী-অবরোহী" পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়। একটা উদাহরণ দিলেই ব্যাপারটা পরিষ্কার হবে।

ধরা যাক্ ছাত্ররা $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$, এই সূত্রটি জানতে চায়।

আরোহী পদ্ধতিতে ঃ—

বিশেষ ঘটনা ঃ—

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+b^2+2ab \end{array} \qquad \begin{array}{r} l+m \\ l+m \\ \hline l^2+m^2+2lm \end{array}$$

সাধারণ সূত্র ঃ $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy.$

অবরোহী পদ্ধতিতে ঃ—

প্রথমে ধরে নেওয়া হয় যে $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$. অতঃপর এই সূত্রের সাহায্যে আরো অন্যান্য সমস্যার সমাধান করে সূত্রটির সত্যতা প্রমাণ করা হয়।

একটা প্রশ্ন কিন্তু থেকেই যায়। আরোহী পদ্ধতিতে এবং আরোহী পদ্ধতির যুক্তি দ্বারা যে :সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়, সেই সিদ্ধান্তকে সব সময়

সত্য বলে মেনে নেওয়া যুক্তিযুক্ত হবে কিনা? এর উত্তরে বলা যেতে পারে যে আরোহী পদ্ধতির যুক্তির সম্ভাব্যতা থেকে অবরোহী পদ্ধতির যুক্তির নিশ্চয়তাতে চলে যাওয়া যায়। আপাতদৃষ্টিতে যদিও মনে হয় গণিত অবরোহী পদ্ধতির যুক্তিধারার উপরই প্রতিষ্ঠিত, তবুও আরোহী পদ্ধতির যুক্তিধারারও গণিতে যথেষ্ট স্থান আছে। পরিশেষে একথা বলা যেতে পারে যে, গণিতে নিশ্চিত ও অপরিবর্তনীয় সিদ্ধান্তে উপনীত হতে হ'লে অবরোহী পদ্ধতির যুক্তিধারার উপর তা প্রতিষ্ঠিত করা দরকার।

আবিষ্কারকের পদ্ধতি (Heuristic Method)

Heuristic কথাটি এসেছে এমন একটি গ্রীক শব্দ থেকে (Heurises)। যার অর্থ হল ঃ আমি আবিষ্কার করি (I find out)। এই অর্থ থেকেই পদ্ধতির মূল কথাটি বোঝা যায়। সেটি হল, শিক্ষার্থীর মনোভাব হবে যেন সে আবিষ্কারকের স্থান নিয়েছে। সে স্বাধীনভাবে আবিষ্কার করবে। সে শ্রেণীতে কেবলমাত্র নিষ্ক্রিয় ও নীরব একজন শ্রোতা হয়ে থাকবে না। অভিজ্ঞতা ছাড়া জ্ঞানলাভ সম্পূর্ণ হয় না। জ্ঞান এবং তত্ত্ব দুটিকেই যদি মনে রাখতে হয় এবং ঠিকমত ব্যবহার করতে হয়, তবে সেগুলির সম্বন্ধে গভীরভাবে চিন্তা করতে হবে ও আত্মা দিয়ে সেগুলিকে উপলব্ধি করতে হবে। ছাত্রকে কেবলমাত্র সক্রিয় হলেই চলবে না, তার কাজের ও চিন্তাধারার ক্রমবিকাশের ফলে নতুন নতুন সমস্যার উদ্ভব হবে। আবিষ্কারক পদ্ধতির সাহায্যে নিষ্ক্রিয় দর্শক (ছাত্র) সক্রিয় অনুসন্ধানকারীতে পরিণত হয়। ডিউই এর মতে "—Passivity is the opposite of thought ; it is not only a sign of failure to call out Judgement and personal understanding, but it also dulls curiosity, generates mind-wandering and causes learning to be a task instead of delight.'

তবে এর অর্থ এই নয় যে শিক্ষক সবসময় নিষ্ক্রিয় থাকবেন। শিক্ষক বা শিক্ষয়িত্রী উপস্থিত থাকবেন এবং তিনি মৃদু হাস্যে, মিষ্ট কথায়, ছোট ছোট প্রশ্নের সাহায্যে শিক্ষার্থীকে আবিষ্কারে সাহায্য করবেন। যখনই প্রয়োজন, তখনই তিনি ছাত্রদের নির্দেশনা দেবেন। খুব সামান্য সাহায্য বা নির্দেশনার ফলে ছাত্রদের মনে হতাশা আসতে পারে। আবার খুব বেশী সাহায্য বা নির্দেশনার ফলে ছাত্রদের স্বাধীন চিন্তাধারাটি সম্পূর্ণ বিনষ্ট হয়ে যেতে পারে। শিক্ষকের কাজ সমস্যাটির সমাধান করা নয়, সমস্যা সমাধানের কার্য্যকরী পথটির নির্দেশ দেওয়া।

আবিষ্কারক পদ্ধতিতে শিক্ষার নিষ্ক্রিয় প্রকৃতির যথেষ্ট পরিবর্তন সাধিত হয়। 'অভ্যাসের ফলেই মানুষ সম্পূর্ণতা লাভ করে', বা 'কাজের মাধ্যমে শিক্ষা' এই নীতিগুলি কেবলমাত্র শারীরিক ক্রিয়াকলাপের মধ্যেই সীমাবদ্ধ থাকে না; বুদ্ধিগত কাজের মধ্যে এই নীতিগুলি প্রতিফলিত হয়। ছাত্রকে স্বাধীনভাবে চিন্তা করতে শিক্ষা দেওয়াটাই যদি লক্ষ্য হয়, তবে কেমন করে চিন্তা করতে হয়, তাকে তা-ই শেখাতে হবে, চিন্তাধারার ফলটি তার হাতে তুলে দিলে চলবে না।

এই পদ্ধতিটি ঠিকমত দক্ষতার সঙ্গে প্রয়োগ করতে পারলে এটি গণিতের পদ্ধতিগুলির মধ্যে সর্বশ্রেষ্ঠ বলে পরিগণিত হতে পারে। এতে কেবল ছাত্রদের স্বাধীনভাবে চিন্তা করার ক্ষমতাই জন্মায় না, তারা স্বাধীন ভাবে জ্ঞান অর্জনও করে থাকে। তাছাড়া এই পদ্ধতিতে যে জ্ঞান অর্জিত হয়, তা বাস্তব ও বৈশিষ্ট্যপূর্ণ।

অন্যদিক থেকে বিচার করলে কিন্তু এই পদ্ধতিকে পৃথক কোন পদ্ধতি বলা যায় না। এটিকে একটি বিশেষ প্রয়োগ কৌশল (ঢঙ বা ভঙ্গী) বলা যেতে পারে। বলতে গেলে এই কৌশলটি সব পদ্ধতির মধ্যেই থাকা উচিত। যে পদ্ধতিতে ছাত্ররা নিজেরা কিছু করে, কিছু চিন্তা করে বা কিছু আবিষ্কার করে, সেই পদ্ধতিতেই এই কৌশলটি অবলম্বন করা হচ্ছে বলা যেতে পারে। সেক্ষেত্রে বিশ্লেষণ পদ্ধতিকেও আবিষ্কারক পদ্ধতি বলা যেতে পারে। কিন্তু বিশ্লেষণ পদ্ধতির উদ্দেশ্যই হ'ল বিশ্লেষণ করা। নির্দেশনার ভার ও বিশ্লেষণের ভার শিক্ষক নিজেও নিতে পারেন। কিন্তু আবিষ্কারক পদ্ধতিতে শিক্ষক উপযুক্ত প্রশ্ন দ্বারা নির্দেশ দেবেন। সমাধানের পথ খুজে বার করবে শিক্ষার্থী নিজে।

পদ্ধতিটি প্রথমে **H. E. Armstrong** বিজ্ঞান শিক্ষার ক্ষেত্রে প্রয়োগ করেন। কিন্তু কালক্রমে দেখা গেল অল্প বয়স্ক শিক্ষার্থীদের পক্ষে বিজ্ঞানে স্বাধীন আবিষ্কারকের ভূমিকা গ্রহণ করাতে বিস্তর অসুবিধা আছে। অপরদিকে দেখা গেল গণিত-শিক্ষণের ক্ষেত্রে পদ্ধতিটি অত্যন্ত কার্য্যকরী ও ফলপ্রদ। সেইজন্য গণিত শিক্ষণের ক্ষেত্রে পদ্ধতিটির মূল্য এত বেশী।

এখন পদ্ধতির সুবিধা-অসুবিধাগুলির কথা আলোচনা করা যাক :—

সুবিধা :—

১। ছাত্ররা স্বাধীনভাবে চিন্তা করে। সে এখানে নিষ্ক্রিয় দর্শক নয়, সক্রিয় আবিষ্কারক।

২। ছাত্ররা সম্যক ও বাস্তব জ্ঞান অর্জন করে।

৩। ছাত্ররা নিজেদের কাজে নিজেরাই আগ্রহ অনুভব করবে।

৪। শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীর ছাত্রদের সঙ্গে ঘনিষ্ঠ যোগাযোগ রক্ষা করতে পারেন।

৫। গৃহকাজের চাপ মোটেই থাকে না।

৬। যে জ্ঞান অর্জিত হয়, তা ফলদায়ক কারণ সেই জ্ঞানের অর্থ ছাত্ররা পরিপূর্ণভাবে উপলব্ধি করে।

৭। তত্ত্ব ও তথ্য সহজেই মনে রাখা যায়।

৮। এই পদ্ধতিতে ছাত্র স্বাধীন ও সক্রিয় আবিষ্কারকের ভূমিকা গ্রহণ করে।

৯। 'কাজের মাধ্যমে শিক্ষার' সব সুবিধাগুলিই এই পদ্ধতিতে পাওয়া যায়।

১০। ছাত্র স্বচেষ্টাতে জ্ঞান অর্জন করে বলে প্রতি ক্ষেত্রে জ্ঞান বাস্তব ও বৈশিষ্ট্যপূর্ণ হয়।

১১। পদ্ধতিটিকে সমস্ত পদ্ধতির মূলগত কৌশল বলা যেতে পারে।

১২। গণিত শিক্ষণের সমস্ত পদ্ধতির মধ্যে এই পদ্ধতিটিকেই সর্বশ্রেষ্ঠ বলা যেতে পারে। অবশ্য এর জন্য সুনির্দিষ্ট প্রয়োগকৌশল ও দক্ষ শিক্ষকের প্রয়োজন।

অসুবিধা :—

১। নূতন শিক্ষার্থীদের পক্ষে পদ্ধতিটি মোটেই সুবিধাজনক নয়।

২। বাস্তব ক্ষেত্রে দেখা যায়, এ পদ্ধতিতে সময় অনেক বেশী লাগে।

৩। শিক্ষকের পক্ষেও পদ্ধতিটি যথেষ্ট অসুবিধাজনক। বিশেষ ভাবে প্রস্তুত না হলে এ পদ্ধতিতে নির্দেশনা দেওয়া খুব শক্ত হয়ে পড়ে।

৪। নির্দেশনা বলতে যে কেবলমাত্র "চিন্তা কর," "মাথা খাটাও", এ সমস্ত নির্দেশ দেওয়া, তা নয়। সমাধানের ঠিক পথটি খুঁজে নিতে সাহায্য করবে এই নির্দেশনা।

৫। সকল ছাত্রই যে নির্দেশনাগুলি সম্পূর্ণ ভাবে হৃদয়ঙ্গম করতে পারে, তা নয়। প্রত্যেক ছাত্রই যে এক একজন দ্বিতীয় 'ইউক্লিড' হয়ে উঠবে—এ রকম আশা করা যায় না।

৬। এই পদ্ধতিতে নির্দিষ্ট একটি পাঠ্যপুস্তক অনুসরণ করা চলে না।

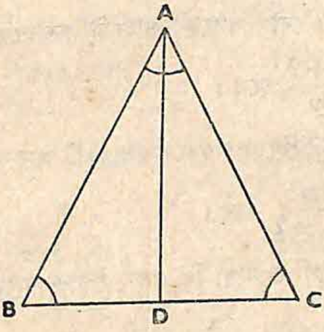
৭। অনেক শিক্ষক তাঁর ছাত্রদের নিকট অনেক বেশী সক্রিয়তা প্রত্যাশা করেন, আবার অনেকে মোটেই তা করেন না। সেক্ষেত্রে তাঁদের নির্দেশনা ভিন্ন হতে বাধ্য।

৮। ছাত্ররা সব সময় যুক্তি দেখাতে পারে না। ফলে তাদের অগ্রগতি রুদ্ধ হয়ে যেতে পারে।

আবিষ্কারক পদ্ধতির একটি উদাহরণ।

উদাঃ ১ সমস্যা ঃ ABC ত্রিভুজে AB বাহু = AC বাহু। ∠ABC ও ∠ACB কোণের সম্বন্ধ নির্ণয় করতে হবে।

শিক্ষক ঃ ছবিটি আঁক। চোখে দেখে (মাপ না করে) ∠ABC ও ∠ACB কোণকে কি রকম বলে মনে হচ্ছে।



ছাত্র ঃ কোণ দুটি সমান বলে মনে হচ্ছে।

শিঃ আচ্ছা, এবার মাপ করে দেখো তো।

ছাঃ (মাপ করিয়া) কোণগুলি সমান।

শিঃ আচ্ছা, এবার যুক্তিসঙ্গত প্রমাণ দাও। দুটি কোণ যে সমান তা কিভাবে প্রমাণ করা যেতে পারে ?

ছা ঃ দুটি সর্বসম ত্রিভুজের কোণ হিসাবে দেখাতে পারলে।

শি ঃ কি করে দুটি সর্বসম ত্রিভুজ পাওয়া যেতে পারে ?

ছা ঃ দুটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলি যদি ত্রিভুজ দু'টিতে সমান হয়।

শি ঃ এ ক্ষেত্রে আমরা সে রকম ত্রিভুজ কি করে পেতে পারি ?

ছাঃ $\angle BAC$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করলে $AB = AC$, AD সাধারণ বাহু এবং $\angle BAD = \angle CAD$ অতএব ত্রিভুজ দুটি, ABD ও ACD সর্বসম হওয়াতে $\angle ABD = \angle ACD$ বা $\angle ABC = \angle ACB$

শিঃ হ্যাঁ ঠিক আছে। এবার প্রমাণটি লিখে দাও।

উদাঃ ২

সমস্যা :—কোন ভগ্নাংশের লবের সহিত 7 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি 2 হয় এবং হর হইতে 2 বিয়োগ করিলে ভগ্নাংশটি 1 হয়। ভগ্নাংশটি কত?

শিঃ বীজগণিতে অজানা ভগ্নাংশ কি ভাবে লেখা হয়?

ছাঃ লব x ও হর y ধরিলে ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$ হবে।

শিঃ লবের সঙ্গে 7 যোগ করলে ভগ্নাংশটি কত হবে?

ছাঃ ভগ্নাংশটি $\frac{x+7}{y}$ হবে।

শিঃ হরের থেকে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি কত হবে?

ছাঃ ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y-2}$ হবে।

শিঃ এই ভগ্নাংশ গুলির মধ্যে কি রকম সম্পর্ক আছে?

ছাঃ $\frac{x+7}{y} = 2$ এবং $\frac{x}{y-2} = 1$

শিঃ এখন x ও y এর মান কি ভাবে নির্ণয় করা যেতে পারে?

ছাঃ সমাধানের সাহায্যে।

শিঃ হ্যাঁ, ঠিক আছে, এগিয়ে যাও।

অনেক সময় আবিষ্কারক পদ্ধতিতে শিক্ষক মহাশয় এমন সমস্ত প্রশ্ন করেন যার উত্তর দিতে শিক্ষার্থীকে মোটেই চিন্তা করতে হয় না। এ পদ্ধতিকে ঠিক আবিষ্কারকের পদ্ধতি বলা চলে না। এটিকে ভুল আবিষ্কারকের পদ্ধতি বলা হয়।

উদাহরণ : সমস্যা : একজন ব্যবসায়ী 20 বস্তা চাউল ক্রয় করে। প্রতি বস্তাতে 50 কিলো চাউল থাকে এবং প্রতি বস্তার ক্রয়মূল্য 30 টাকা। রেলে আমদানী করতে মোট খরচ পড়ে 400 টাকা। এখন প্রতি কিলো চাউল 1·50 টাকা দরে বিক্রয় করলে ব্যবসায়ীর শতকরা কত লাভ হবে?

প্রশ্ন	উত্তর
এক বস্তা চাউলের মূল্য কত ?	30 টাকা
মোট কত বস্তা চাউল কেনা হয় ?	20 বস্তা।
20 বস্তার মোট মূল্য কত ?	20×30 বা 600 টাকা।
অন্যান্য খরচ কত ?	400 টাকা।
তাহ'লে মোট খরচ কত ?	$600 + 400 = 1000$ টাকা
এক বস্তাতে কত কিলো চাউল থাকে ?	50 কিলো।
কত বস্তা চাউল বিক্রি করা হবে ?	20 বস্তা
20 বস্তাতে কত চাউল থাকে ?	20×50 বা 1000 কিলো।
এক কিলো চাউলের বিক্রয় মূল্য কত ?	1·50 টাকা
1000 কিলো চাউলের বিক্রয় মূল্য কত ?	$1{\cdot}50 \times 1000$ বা 1500 টাকা।
ক্রয়মূল্য ও অন্যান্য খরচ কত ছিল ?	1000 টাকা।
তাহলে মোট লাভ কত হয় ?	$1500 - 1000$ বা 500 টাকা।
1000 টাকাতে যদি 500 টাকা লাভ হয়। তবে 100 টাকাতে লাভ কত হয় ?	$\frac{500}{1000} \times 100$ বা 50 টাকা।
তাহলে শতকরা লাভ কত হল ?	লাভ 50%

পদ্ধতিটি অবলম্বনে সতর্কতা :

এই পদ্ধতিতে পড়াতে হ'লে আগে শিক্ষককে পদ্ধতিটি আয়ত্ত করে নিতে হবে। এই পদ্ধতির অর্থ এই নয় যে শিক্ষা পুস্তকবিহীন হবে। প্রথমে শিক্ষক কখনও বই-এর ব্যবহার ছাড়বেন না। তিনি নিজের মনে আগে আবিষ্কারকের ভাবটি ফুটিয়ে তুলবেন। ছাত্রদের সাহায্য করা হবে উপযুক্ত প্রশ্ন বা নির্দেশের মাধ্যমে। কখনও

কখনও সমাধানের কোন একটি প্রত্যক্ষ স্তর বলে দেওয়া যেতে পারে। ছাত্র নিজে যা আবিষ্কার করতে পারবে তা বলে দেবার কোন প্রয়োজন নেই। একেবারে সোজাসুজি প্রশ্ন (অর্থাৎ যা সমস্যার সমাধানটিকে যান্ত্রিক করে তুলতে পারে) করা চলবে না। চিন্তা-উদ্দীপক প্রশ্ন করতে হবে। আবার এ কথাও মনে রাখতে হবে যে শিক্ষক মহাশয় যদি খুব কম সাহায্য করেন তবে ছাত্ররা নিরুৎসাহ হয়ে পড়বে। আবার খুব বেশী সাহায্য করলে তারা এই পদ্ধতির মর্ম অনুভব করতে পারবে না।

বক্তৃতা পদ্ধতিঃ (Lecture Method) ঃ বক্তৃতা পদ্ধতি অনেকটা আবিষ্কারক পদ্ধতির ঠিক বিপরীত। কম সময়ের মধ্যে পাঠক্রম শেষ করার পক্ষে পদ্ধতিটি খুবই কার্যকরী। এই পদ্ধতিতে শিক্ষক সক্রিয় অংশ গ্রহণ করেন এবং ছাত্ররা নিষ্ক্রিয় দর্শকের ভূমিকা গ্রহণ করে। পাঠের বিষয়বস্তুটি শিক্ষক মহাশয় বক্তৃতার মাধ্যমে প্রকাশ করেন। তবে গণিত শিক্ষাদানে কেবলমাত্র বক্তৃতার সাহায্যে উপজীব্য বিষয়টি উপস্থাপন করা খুবই শক্ত। তবুও এমন বহু শিক্ষক দেখা যায় যাঁরা বক্তৃতা পদ্ধতির সাহায্যে গণিতের পাঠ দিয়ে যাচ্ছেন। এরা মাঝে মাঝে অবশ্য ব্ল্যাকবোর্ড ব্যবহার করেন, তবে তা প্রয়োজনের তুলনায় অকিঞ্চিৎকর। যাই হোক্ পদ্ধতিটির সুবিধা এবং অসুবিধা দুই-ই আছে। সেগুলি এবার আলোচনা করা যাক্ :—

সুবিধা ঃ (১) কম সময়ে বিষয়বস্তুর অনেকখানি উপস্থাপিত করা সম্ভব।

(২) ছাত্রসংখ্যা অনেক বেশী হলে ব্যক্তিগত মনোযোগ দেওয়া সম্পূর্ণ অসম্ভব হয়ে পড়ে। সেখানে বক্তৃতা পদ্ধতি ব্যবহার করলে সুফল পাওয়া যেতে পারে।

(৩) শিক্ষকের কাজ খুব সহজ হয়। এই পদ্ধতিতে কোন ছাত্রকে প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করার কোন সুযোগই দেওয়া হয় না। কাজেই শিক্ষকের চিন্তাধারা বা বক্তৃতা কোন প্রকারে বাধা প্রাপ্ত হয় না।

(৪) ছাত্রদের 'যুক্তি বা বিচার শক্তি' প্রয়োগ করার কোন প্রয়োজনই হয় না। শিক্ষক 'সব কিছু ব্যাখ্যা করে দেন। কাজেই ছাত্ররা শিক্ষকের কাছ থেকে "তৈরী জিনিস" পায় বলে তাদের উপর কোন চাপও পড়ে না।

(৫) পদ্ধতিটি সহজ, সংক্ষিপ্ত ও আকর্ষণীয়।

(৬) শিক্ষক এবং ছাত্র উভয়ের মধ্যেই একটা পরিতৃপ্তির ভাব থাকে। শিক্ষক মহাশয় ভাবেন, তিনি সব বুঝিয়ে দিয়েছেন ; আর ছাত্র ভাবে, সে সব কিছু বুঝে ফেলেছে !

(৭) শ্রেণীর জন্য নির্দ্দিষ্ট পাঠ্যপুস্তক স্বচ্ছন্দে ব্যবহার করা যেতে পারে।

অবশ্য এই সমস্ত সুবিধা কোন কলা-বিষয় (Arts Subject) পড়ানোর কাজে পুরোপুরি পাওয়া সম্ভব। বিজ্ঞান বিষয় বিশেষতঃ গণিত শিক্ষণে ততটা সম্ভব হয় না।

অসুবিধা ঃ—

(১) গণিত এমন একটি বিষয় যেখানে একাগ্র মনোযোগের প্রয়োজন। কিন্তু এই পদ্ধতিতে মনোযোগ বিক্ষিপ্ত হতে পারে।

(২) গণিতের ভাবধারা খুব দৃঢ় সংবদ্ধ। নীরস বক্তৃতার ফলে এই ভাবধারার প্রবাহ বিচ্ছিন্ন হলে বিষয়টি সম্বন্ধে আগ্রহ নষ্ট হয়ে যায়।

(৩) বক্তৃতাতে একটি ভাবের পর আর একটি ভাব খুব দ্রুত আসে। ফলে এর সকল অংশ সকলের পক্ষে সমানভাবে গ্রহণযোগ্য হয় না। তা ছাড়া এতে বাড়ীর কাজের চাপ খুবই বেশী পড়ে।

(৪) স্কুলে নিম্নশ্রেণীতে এই পদ্ধতি মোটেই কার্য্যকরী নয়। বিশ্ববিদ্যালয় স্তরে পদ্ধতিটি কিছু পরিমানে কার্য্যকরী হতে পারে।

(৫) ব্ল্যাকবোর্ডের ব্যবহার এই পদ্ধতিতে খুবই কম। কিন্তু যে কোন শিখন পদ্ধতিতে ব্ল্যাকবোর্ডের ব্যবহার অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।

(৬) প্রশ্নোত্তরের কোন সুযোগ না থাকায় শিক্ষক ও ছাত্রের মধ্যে প্রত্যক্ষ সংস্পর্শ থাকে না। ফলে শিক্ষক মহাশয়ও বুঝতে পারেন না কতজন ছাত্র তাঁকে অনুসরণ করতে পারছে আর কতজনই বা পারছে না।

(৭) কেবলমাত্র বক্তৃতার সাহায্যে গণিতের মত দুরূহ ও আপাত নীরস বিষয় ছাত্রদের নিকট বোধগম্য করা যায় না। প্রশ্নোত্তর, উদাহরণ (বাস্তব), ব্ল্যাকবোর্ডের ব্যাপক ব্যবহার—ইত্যাদিও কম গুরুত্বপূর্ণ নয়।

(৮) পদ্ধতিটিতে স্বাধীন চিন্তার কোন স্থান নেই।

(৯) ছাত্রদের প্রতি ব্যক্তিগত ভাবে মনোযোগ দেওয়া সম্ভব নয়।

(১০) পরীক্ষামূলক দিকটি এ পদ্ধতিতে সম্পূর্ণরূপে অবহেলিত হয়।

(১১) বাড়ীর কাজের পরিমাণ ও চাপ অত্যন্ত বেশী।

আবিষ্কারক পদ্ধতি ও বক্তৃতা পদ্ধতির তুলনা ঃ—

আবিষ্কারক পদ্ধতি	বক্তৃতা পদ্ধতি
১। ছাত্ররা বিষয়টি সম্যকভাবে উপলব্ধি করে।	১। শিক্ষক মহাশয়ের বক্তব্য ছাত্ররা কতদূর উপলব্ধি করে তা সঠিক বোঝা যায় না।
২। স্বাধীন চিন্তার যথেষ্ট সুযোগ আছে।	২। ছাত্ররা নিষ্ক্রিয় শ্রোতা, সুতরাং স্বাধীনচিন্তার কোন সুযোগই নেই।
৩। ছাত্রদের আগ্রহ ও শেখার ইচ্ছা খুবই প্রবল।	৩। ছাত্ররা বিরক্ত হয় বলে আগ্রহও কমে যায়।
৪। ছাত্ররা যা আবিষ্কার করে, তা সহজে ভুলে যায় না।	৪। ছাত্ররা যা শোনে, তা সহজে ভুলে যায়।
৫। শিক্ষককে বিশেষ ভাবে প্রস্তুত হতে হয় বলে এই পদ্ধতি সকল শিক্ষক সমান ভাবে প্রয়োগ করতে পারেন না।	৫। শিক্ষকের বিশেষ ভাবে প্রস্তুত হবার কোন প্রয়োজন হয় না। এই পদ্ধতিতে শিক্ষক খুব সহজ ভাবে অগ্রসর হতে পারেন।
৬। শিক্ষক মহাশয় পাঠ্যপুস্তক ঠিকভাবে অনুসরণ করতে পারেন না।	৬। পাঠ্যপুস্তকটি সঠিকভাবে অনুসরণ করা সম্ভব।
৭। ছাত্রদের যুক্তি ও বিচার শক্তি যথাযথ বিকশিত হয় না বলে কম বয়সে এই পদ্ধতি প্রয়োগ করা চলে না।	৭। ছাত্রদের যুক্তি ও বিচার শক্তি মোটেই প্রয়োগ করতে হয় না বলে যে কোন বয়সেই পদ্ধতিটি প্রয়োগ করা যেতে পারে।
৮। পদ্ধতিটির প্রয়োগে সময় অনেক বেশী লাগে। প্রতি ক্ষেত্রেই ছাত্রকে আবিষ্কারকের ভূমিকা গ্রহণ করতে হয়।	৮। ছাত্র শিক্ষকমহাশয় ও বই-এর থেকে জ্ঞান আহরণ করে বলে সময় অনেক কম লাগে।

পরীক্ষাগার পদ্ধতি (Laboratory Method) ঃ

'জ্যামিতি-শিখনে পরীক্ষাগার পদ্ধতিটির কার্য্যকারিতা সবচেয়ে বেশী। পদ্ধতিটি বিষয়টির অমূর্ত ভাবটি দূর করে জ্ঞানকে বাস্তবে রূপায়িত করে এবং

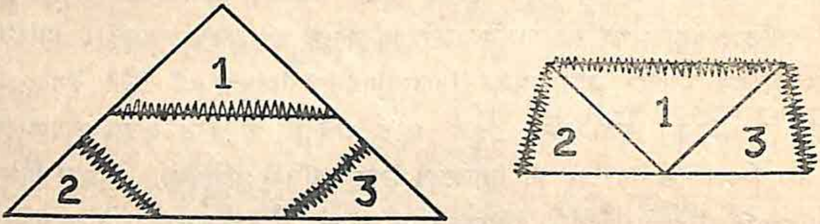
সার্থক ভাবে জ্ঞানের প্রয়োগে সাহায্য করে। এতেও ছাত্র নিজে আবিষ্কারকের ভূমিকা অবলম্বন করে। সরলরেখা, কোণ, ক্ষেত্রফল, ঘনফল প্রভৃতি সম্বন্ধে সে জ্ঞান আহরণ করে বাস্তব কাজের মাধ্যমে, যেমন—ওজন করা, পরিমাপ করা, কাগজ কাটা, কাগজ ভাঁজ করা, কাদার মডেল তৈরী করা প্রভৃতি।

গণিতের তথ্য আবিষ্কার করার কাজে পদ্ধতিটি যথেষ্ট উৎসাহ দান করে। এই পদ্ধতিতে বক্তৃতা পদ্ধতির অসুবিধাগুলি দূর করার চেষ্টা করা হয়েছে। আবিষ্কার এবং কাজের মাধ্যমে জ্ঞান অর্জন (Learning by doing) এই দুটির উপর বেশী জোর দেওয়া হয়। মূর্ত জিনিস থেকে অমূর্ত ধারণায় উপনীত হওয়া এবং কাজের মাধ্যমে শিক্ষালাভ করা এই দুটি মূলতত্ত্বের উপর পদ্ধতিটি প্রতিষ্ঠিত। ছাত্ররা নিজেরা পরীক্ষাগুলি (Experiments) পরিচালনা করে। এই পরীক্ষণের সাহায্যেই সে গণিতের বিভিন্ন তত্ত্বের ও তথ্যের প্রমাণ পায়, গণিতের বিভিন্ন অংশের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় করে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে ছাত্রকে বৃত্তের ব্যাস ও ক্ষেত্রফলের সম্বন্ধ নির্ণয় করতে হবে। সে ক্ষেত্রে ছাত্রকে কার্ডবোর্ডের অনেকগুলি বৃত্ত কাটতে হবে। তারপর ঐ বৃত্তগুলির ক্ষেত্রফল ও ব্যাস মাপ করে সম্বন্ধটি নির্ণয় করতে হবে। ক্ষেত্রফল বিভিন্ন ভাবে নির্ণয় করা যেতে পারে। একক ক্ষেত্রফলের ওজনের সাহায্যে সমগ্র বৃত্তটির ওজন থেকে ক্ষেত্রফলটি পাওয়া যেতে পারে। ওজন ও ব্যাস তুলনা করার পর ছাত্র নিজের থেকেই ক্ষেত্রফল $= \frac{২২}{৭}$ (ব্যাসার্দ্ধ)^{২} এই সম্বন্ধটি নির্ণয় করতে পারবে। অনুরূপ ভাবে কার্ডবোর্ড-মডেল কেটে ও ওজন করে পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায়।

ত্রিভুজের তিনটি কোনের সমষ্টি দুই সমকোণ তা প্রমাণ করার সময় ছাত্রকে বিভিন্ন জাতীয় ত্রিভুজের কোণগুলি পরিমাপ করতে হবে এবং তারপর দেখতে হবে সেগুলির মধ্যে কোন সম্বন্ধ আছে কি না! বিভিন্ন জাতীয় ত্রিভুজের কোণগুলি পরিমাপ করতে করতে সে একসময় আপনা আপনি সত্যটি খুঁজে পাবে। তারপর বিভিন্ন পরীক্ষণের সাহায্যে সে এই সত্যতা প্রমাণ করতে পারে। একটি কাগজের ত্রিভুজের কোণ তিনটি ছিঁড়ে নিয়ে পাশাপাশি রেখে দেখতে হবে সেগুলি থেকে একটি সরলকোণ পাওয়া যাচ্ছে কি না? কোণগুলি ভাজ করেও সরলকোণ পাওয়া যেতে পারে।

এই ভাবে যে জ্ঞান অর্জিত হয়, তা মূর্ত ও সহজবোধ্য হয়। পরীক্ষণ স্তরের পর যুক্তি যুক্ত প্রমাণ আরো পরিষ্কার হয়।

এই পদ্ধতির সাফল্যের জন্য বিভিন্ন যন্ত্রপাতি সমন্বিত গণিতের একটি পরীক্ষাগার প্রয়োজন। এই পরীক্ষাগারে গণিতের ছবি আকার যন্ত্রপাতি, মিটার স্কেল, সার্ভে করার চেন ইত্যাদি, দাঁড়িপাল্লা, কার্ডবোর্ডের বিভিন্ন মডেল, চার্ট, সেক্সট্যাণ্ট, কাঁচি, বিভিন্ন রং, কপিকল, লিভার প্রভৃতি থাকা প্রয়োজন।



এবার পদ্ধতিটির সুবিধা অসুবিধার কথা আলোচনা করা যাক্ঃ—

সুবিধা ঃ—

১। পদ্ধতিটি মনস্তাত্বিক ভিত্তির উপর প্রতিষ্ঠিত। এতে মূর্ত জিনিস থেকে অমূর্ত ধারণাতে উপনীত হওয়া যায়।

২। পদ্ধতিটি খুবই চিত্তাকর্ষক ও হৃদয়গ্রাহী।

৩। 'কজের মাধ্যমে শিক্ষা'-এই মতবাদটির উপরও বেশ জোর দেওয়া হয়।

৪। গণিতের ব্যবহারিক দিকটির উপর বেশ গুরুত্ব আরোপ করা হয়।

৫। ছাত্রদের পরিষ্কার ধারণা জন্মানোর কাজে পদ্ধতিটি যথেষ্ট সহায়তা করে।

অসুবিধা ঃ—

১। কেবলমাত্র পরীক্ষার সাহায্যে ছাত্র অনেক তথ্য প্রমাণ করতে পারে না।

২। গণিতের সকল অধ্যায়কে পরীক্ষণের আওতায় আনা যায় না।

৩। বেশ বড় ক্লাসে পদ্ধতিটি সার্থকভাবে কার্য্যকরী হয় না কারণ পরীক্ষণে প্রত্যেক ছাত্রের প্রতি ব্যক্তিগত মনোযোগ দিতে হয়।

৪। উন্নতির হার অত্যন্ত কম।

৫। অনেক সময় পদ্ধতিটির মর্ম উপলব্ধি না করে ছাত্র এটিকে একরকম 'চাপিয়ে দেওয়া কাজের বোঝা' বলে মনে করে।

৬। পরীক্ষণ ও অনুসিদ্ধান্তই গণিতের শেষ কথা নয়। এর সাহায্যে ছাত্র গণিতের তথ্যের সঙ্গে পরিচিত হয়, কিন্তু গণিতের যুক্তি ও চিন্তাধারার সঙ্গে তার পরিচয় হয় না।

৭। অধিকাংশ স্কুলই অর্থাভাবে গণিতের পরীক্ষাগার তৈরী করতে পারে না।

পদ্ধতিটি যে লক্ষ্যে পৌছানোর একটি উপায়মাত্র এ কথাটা মাঝে মাঝে শিক্ষক মহাশয় ভুলে যান। ফলে পদ্ধতিটি নিজেই লক্ষ্যে পরিণত হয়। তাছাড়া অনেক সময় পরীক্ষণে কিছু ভুল ত্রুটি বা অসঙ্গতি দেখা যেতে পারে যেগুলির যথাযথ ব্যাখ্যা দেওয়া হয় না। শিক্ষকমহাশয়কে এগুলির প্রতি সতর্ক দৃষ্টি দিতে হবে। যেখানে অবরোহী পদ্ধতির সাহায্যে কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারা যায়, সেখানে পরীক্ষণ পদ্ধতি প্রয়োগ করার কোন সার্থকতা নেই। এ ব্যাপারে শিক্ষক মহাশয়কে যথোপযুক্ত সাবধানতা অবলম্বন করতে হবে। যেখানে এই পদ্ধতিটি সবচেয়ে বেশী কার্য্যকরী—সেখানেই এটি ব্যবহার করতে হবে। অন্যথায় পরিশ্রমের ও সময়ের অপব্যবহার হবে।

ঐতিহাসিক পদ্ধতি (Historical Method) :—অনেক শিক্ষক ও শিক্ষাবিদ এই পদ্ধতিটি প্রয়োগ করার পক্ষপাতী। তাঁরা স্বীকৃত মতামতগুলির শিখনের উপর খুব জোর দেন না। অপর পক্ষে তাঁরা বিভিন্ন আবিষ্কারক ও পর্যবেক্ষক কিভাবে বিভিন্ন যুগে ও বিভিন্ন দেশে গণিতের নূতন নূতন তথ্য আবিষ্কার করেছেন তার শিখনের উপরই বেশী জোর দেন। অবশ্য এই পদ্ধতিতে গণিতে আগ্রহ বাড়ানো যায় ঠিকই, কিন্তু নূতন জিনিস শেখান যায় না। আর এতে পাঠোন্নতির গতি খুবই ধীর। অনেক সময় অনেকটা পণ্ডশ্রমও করতে হয় এ পদ্ধতিতে। উঁচু ক্লাসে পদ্ধতিটি ঠিকমত কার্য্যকরী নয়। খুব নীচু ক্লাসে অবশ্য পদ্ধতিটি অনেকাংশে কার্য্যকরী হয়। আর গণিতে আগ্রহ বাড়াবার জন্য গণিতের ক্রমোন্নতির ইতিহাসও ছাত্রদের জানা প্রয়োজন।

একরোখা পদ্ধতি (Dogmatic Method) :—এটি আসলে কিন্তু কোন পদ্ধতিই নয়। যে কোন ভুল পদ্ধতিকেই একরোখা পদ্ধতি বলা যেতে পারে। যদি এটিকে পদ্ধতি হিসাবে ধরাও হয়, তবে বলতে হবে এটি একটি খারাপ পদ্ধতি। এই পদ্ধতিতে ছাত্রকে কি করতে হবে, কি লক্ষ্য করতে হবে বা কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হতে হবে, তা শিক্ষক মহাশয় বলে দেন। যখন শিক্ষক মহাশয় কাঠিন্যের আশ্রয় নেন

বা কঠোর নিয়ম মাফিক কাজ করে যান, তখনই তিনি একরোখা পদ্ধতি অবলম্বন করেছেন এ কথা বলা যেতে পারে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে কোন একটি সম্পাদ্য বা উপপাদ্যের প্রতিটি স্তর নির্ভুলভাবে মুখস্থ করতে বলা—একরোখা পদ্ধতির উদাহরণ। এতে নির্ভুলতাকে অন্ধ ও যান্ত্রিকভাবে অনুসরণ করতে বলা হয়। তেমনি গণিতে নির্ভুল ভাষা ব্যবহার করা ও বানান শুদ্ধ লিখতে বলাও কঠোর নিয়মানুবর্তিতা। গণিতে হিসাব নিকাশের উপরই বেশী জোর দেওয়া উচিত। গণিতের সমস্যার সমাধান বিভিন্ন ভাবে করা যেতে পারে। কিন্তু সমাধানের কাজে কোন একটি বিশেষ প্রক্রিয়ার উপর জোর দিলে একরোখা পদ্ধতি ব্যবহার করা হচ্ছে বলা যেতে পারে।

যারা গণিতে একরোখা পদ্ধতির সমর্থক, তাঁরা বলেন—গণিত শিক্ষার মূল উদ্দেশ্য হচ্ছে নির্ভুল উত্তরে উপনীত হওয়া এবং এই লক্ষ্য থেকে বিচ্যুত হলে গণিত শিখনের মূল উদ্দেশ্যটি নষ্ট হয়ে যায়। এর ফলে চিন্তাধারার মধ্যেও আবিলতা ও অস্পষ্টতা আসতে পারে। অনেক শিক্ষক গণিতে অকৃতকার্যতার কারণ হিসাবে কঠোর নিয়মানুবর্তিতার অভাবকেই দায়ী করেন। তাঁরা বলেন গণিতে ছাত্রদের দুর্বলতা দূর করা সম্ভব যদি ছাত্ররা কঠোর মনোনিবেশ সহকারে গণিত পড়ে, এবং প্রয়োজন হলে মুখস্থ করে। আবার অনেক মডেল পর্যবেক্ষণ করেও তাঁরা গণিত শাস্ত্রটি সম্পূর্ণ-ভাবে উপলব্ধি করতে পারে এবং গাণিতিক কাজে আগ্রহ বোধ করে।

এবার পদ্ধতিটির সুবিধা- অসুবিধার কথা আলোচনা করা যাক,

সুবিধা :—

১। পদ্ধতিটিতে জ্ঞান সম্পূর্ণ ও খাটি হয়।

২। ছাত্ররা সঠিক ও নির্ভুল চিন্তা করতে শিখে।

৩। সত্য সম্বন্ধে একটা শ্রদ্ধার ভাব আসে ছাত্রদের মনে। তারা অত্যন্ত দ্রুত কোন সিদ্ধান্ত গ্রহণ করে না।

অসুবিধা ঃ—

১। যান্ত্রিক ভাবে পড়া বা মুখস্থ করাতে ছাত্রদিগকে উৎসাহী করা হয়।

২। কঠোর নিয়মানুবর্তিতা শেখাতে গিয়ে ছাত্রদিগকে পাঠ্যপুস্তকের সঙ্গে ঘনিষ্ঠভাবে জড়িয়ে ফেলা হয়।

৩। ছাত্রের বিচার ও যুক্তিশক্তি পরিপূর্ণভাবে বিকাশ লাভ করে না। তারা সঠিক চিন্তন করে না। আসলে অপরের দেওয়া চিন্তাধারা স্মরণ করে মাত্র।

৪। ছাত্ররা গণিতে আগ্রহ হারিয়ে ফেলে এবং গণিত সম্বন্ধে একটি ভুল ধারণা গড়ে তোলে।

৫। মাধ্যমিক স্কুলে কঠোর নিয়মানুবর্তিতা পুরোপুরি সমর্থনযোগ্য নয়।

নির্দেশমূলক পদ্ধতি (**Assignment method**) ঃ—বক্তৃতা পদ্ধতিতে কেবলমাত্র বক্তৃতার মাধ্যমে নূতন পাঠ শিক্ষা দেওয়া হয়। অর্থাৎ তা পুরোপুরি তত্ত্বগত (Theoretical)। আবার আবিষ্কারক পদ্ধতিকে বলা যেতে পারে ব্যবহারিক (Practical)। নির্দেশমূলক পদ্ধতি তত্ত্বগত ও ব্যবহারিক এই উভয় প্রক্রিয়ার সংশ্লেষণে উদ্ভুত নূতন একটি পদ্ধতি। এখানে যেমন শিক্ষকের দিক হতে নির্দেশ দেওয়া হয়, তেমনি শিক্ষার্থীকেও হাতে কলমে কাজ করার যথেষ্ট সুযোগ দেওয়া হয়। অর্থাৎ পাঠের কিছু অংশ থাকবে শিক্ষকের প্রত্যক্ষ কর্তৃত্বাধীনে আর কিছুটা অংশে শিক্ষার্থীকে যথেষ্ট স্বাধীনতা দেওয়া হয়।

নির্দিষ্ট পাঠক্রমটিকে পরস্পর সংযুক্ত কয়েকটি অংশে ভাগ করা হয়। প্রতি সপ্তাহে এই রকম এক একটি পাঠ্যাংশ সম্বন্ধে শিক্ষার্থীদের নির্দেশ দেওয়া হয়। পাঠ্যাংশটি নির্বাচন করার পর সেই সম্বন্ধে বিভিন্ন নির্দেশ হয় ছাপিয়ে, নয়তো সাইক্লোষ্টাইল করে ছাত্রদের মধ্যে বিতরণ করা হয়। নির্দেশনাতে কি করতে হবে, কোন বই এর কত পৃষ্ঠা পড়তে হবে সে সম্বন্ধেও নির্দেশ দেওয়া থাকে। পাঠ্যাংশে কোন কঠিন অংশে ছাত্রদের অসুবিধা হবার সম্ভাবনা থাকলে সেই অংশ সম্বন্ধে বিশেষ নির্দেশনাও দেওয়া হ'য়ে থাকে। নির্দেশনা পত্রে কয়েকটি প্রশ্নও দেওয়া থাকে। ছাত্র সেগুলির উত্তর লিখে প্রয়োজনীয় সংশোধনের জন্য উত্তর পত্রটি শিক্ষকের নিকট জমা দেয়। এই পদ্ধতিতে ছাত্ররা নিজ নিজ ক্ষমতা অনুযায়ী কাজ করে যায়। শিক্ষক কেবলমাত্র তাদের কিঞ্চিৎ সাহায্য করেন এবং প্রয়োজনমত নির্দেশ দিয়ে থাকেন। সাধারণ অসুবিধাগুলি তিনি শ্রেণীকক্ষেই আলোচনা করে দেন। ছাত্র একটি নির্দেশনার কাজ সম্পূর্ণ করলে তবেই তাকে নূতন নির্দেশ পত্র দেওয়া হয়। এই পদ্ধতিতে ছাত্র নিজ ক্ষমতা এবং বুদ্ধি অনুযায়ী অগ্রসর হয়। পদার্থবিদ্যা-রসায়ন বিদ্যা প্রভৃতি বিষয়ের পাঠে এই পদ্ধতি অত্যন্ত কার্যকরী। নির্দেশনার প্রথম অংশে তত্ত্ব (Theory) সম্বন্ধে আলোচনা করা হয় এবং দ্বিতীয় অংশে লব্ধ জ্ঞানের ব্যবহারিক (Practical) প্রয়োগ হয়।

এই পদ্ধতিটি প্রয়োগ করার সময় কয়েকটি বিষয়ের প্রতি লক্ষ্য রাখতে হবে।

১। নির্দেশগুলি যেন একটি মাত্র পাঠ্যপুস্তক থেকে দেওয়া হয়।

২। নির্দেশপত্রে পাঠ্যপুস্তকের কোন্ কোন্ অংশ পড়তে হবে, সে বিষয়ে

পরিষ্কার ইঙ্গিত থাকা বাঞ্ছনীয়। বিশেষ বিশেষ অংশগুলিতে মনোযোগ দেবার নির্দেশ এবং কঠিন অংশগুলির ব্যাখ্যাও নির্দেশনাপত্রে থাকবে।

৩। পঠিতব্য অংশগুলি ছাত্র পড়েছে কিনা-বা সে সম্বন্ধে তাদের জ্ঞান সম্পূর্ণ হয়েছে কিনা তা জানবার জন্য নির্দেশপত্রে কয়েকটি প্রশ্ন থাকা প্রয়োজনীয়।

৪। অতিরিক্ত পাঠের জন্য আর কোনও বই বা বই-এর কোন অংশ পড়তে হ'লে সে সম্বন্ধেও নির্দেশ দেওয়া থাকবে নির্দেশনা পত্রে।

৫। ব্যবহারিক কাজ কি ভাবে ক'রতে হ'বে সে বিষয়েও নির্দেশ থাকা উচিত।

এবার পদ্ধতিটির সুবিধা অসুবিধার কথা আলোচনা করা যাক।

সুবিধা :—

(১) শিখন-প্রক্রিয়াতে ছাত্র আর নিষ্ক্রিয় হয়ে থাকতে পারে না। সমস্ত কাজের ভারই তার উপর ন্যস্ত হয় বলে তাকে সক্রিয় হয়ে উঠতেই হয়।

(২) বিভিন্ন বই পাঠ করার এবং বিভিন্ন বিষয় সম্বন্ধে আলোচনা করার একটা অভ্যাস ছাত্রদের মধ্যে অর্জিত হয়ে যায়।

(৩) প্রত্যেক ছাত্র নিজ নিজ ক্ষমতা অনুযায়ী পাঠে অগ্রসর হতে পারে।

(৪) বিজ্ঞানসম্মত গবেষণার স্পৃহা এই পদ্ধতিতে উজ্জীবিত হয়।

(৫) ছাত্রদের আত্ম-বিশ্বাস এবং আত্মনির্ভরতার ক্ষমতা বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয়।

(৬) তত্ত্বগত জ্ঞানও যে বাস্তব জ্ঞান অর্থাৎ তারও একটা ব্যবহারিক প্রয়োগ-মূলক দিক আছে এ কথাটা ছাত্ররা উপলব্ধি করতে শেখে।

অসুবিধা :—

(১) নির্দেশনাপত্রটি ভাষামূলক হওয়াতে সকলের পক্ষে এ'টি সহজবোধ্য হয় না।

(২) ভালো নির্দেশনা পত্র প্রস্তুত করা যথেষ্ট সময় সাপেক্ষ এবং কষ্টকর।

(৩) অন্যান্য পদ্ধতির তুলনায় এই পদ্ধতিতে কোন একটি পাঠ শেষ করতে বেশী সময় লাগে।

(৪) শিক্ষকের কাজের চাপ যথেষ্ট বাড়ে। নির্দেশনাপত্র তৈরী করা ও সংশোধন করা এই সমস্ত কাজে যথেষ্ট সময়ের প্রয়োজন।

(৫) ছাত্ররা কোন একটি উত্তরপত্র দেখে নকল করতে পারে। নির্দেশনা-পত্রগুলি এক রকম হওয়ার জন্য এ সম্ভাবনা কিন্তু থেকেই যায়।

(৬) পদ্ধতিটির সুষ্ঠু রূপায়ণের জন্য উত্তম পরীক্ষাগার ও পাঠাগার থাকা প্রয়োজন।

(৭) উপযুক্ত শিক্ষক ছাড়া পদ্ধতিটি ঠিকমত কার্য্যকরী হয় না।

(৮) ভালো পাঠ্যপুস্তকের যথেষ্ট অভাব আছে। আর একটিমাত্র পাঠ্যপুস্তক থেকে নির্দেশনাপত্রে যথেষ্ট সংখ্যক প্রশ্ন দেওয়া সম্ভব হয় না।

তা হলেও বলা যায় অন্যান্য অনেক পদ্ধতির তুলনায় এই পদ্ধতি অনেক বেশী মাত্রায় কার্য্যকরী। পদ্ধতিটির মূল কথাই হল বিজ্ঞানসম্মত গবেষণা। এই গবেষণার ভাবটি ছাত্রদের মনে জাগিয়ে তুলতে পারলেই পদ্ধতির কাজ অনেকাংশে সফল হবে।

গণিত শিখনে পুরাতন ও নূতন পদ্ধতি :—

কিছুদিন আগেও মানসিক উৎকর্ষ সাধন'কেই গণিত শিক্ষার প্রধান উদ্দেশ্য বলে মনে করা হ'ত। এর পিছনে অবশ্য কয়েকটি যুক্তিও ছিল। যেমন,

(ক) গণিত শিখনে বিচারকরণ ক্ষমতা এবং মনোযোগ দানের ক্ষমতার প্রভাব বেশী।

(খ) গণিতের ক্ষেত্রে তর্কবিদ্যার সরল উদাহরণের প্রয়োগ দেখা যায়।

(গ) অপ্রয়োজনীয় অংশের প্রতি মনোযোগ দানে শিক্ষার্থী নিরস্ত থাকে।

(ঘ) গণিতের সাহায্যেই স্থৈর্য্য, আত্মবিশ্বাস, প্রাক্ষোভিক ক্ষমতা ইত্যাদির উৎকর্ষ সাধন হয়।

(ঙ) কল্পনাশক্তি বিকাশ লাভ করে।

যুক্তিগুলির মধ্যে সত্যতা যে যথেষ্ট পরিমানে আছে, সে বিষয়ে কোন সন্দেহ নেই। কিন্তু গণিত ছাড়া অন্য কোন বিষয়ের পাঠেও ঐ একই গুণ অর্জিত হতে পারে। স্কুল পাঠ্য বিষয়গুলির শিখনে মানসিক শৃঙ্খলার তত্ত্বটি বা কৃষ্টিমূলক ধারণার যথেষ্ট পরিবর্তন বর্তমান যুগে লক্ষ্য করা যায়। মানসিক শৃঙ্খলা ও প্রয়োজনীয়তা দু'টি সম্পূর্ণ পৃথক নয়। বরং বলা যেতে পারে—বিষয়টির প্রয়োজনীয়তা যত বাড়ে, তার কৃষ্টিমূলক ও শৃঙ্খলাগত মূল্যও তত বাড়ে। সঠিক পদ্ধতি অনুসরণ করলে গণিতকেও নীরস বা কঠিন বিষয় বলে মনে হয় না। গণিতের মধ্যেও আবিষ্কার ও গবেষণার যথেষ্ট উপাদান বর্তমান আছে। পুরাতন পদ্ধতিতে এই আবিষ্কার ও গবেষণার দিকটি সম্পূর্ণ অবহেলিত ছিল। কিন্তু গণিত শিখনের নূতন পদ্ধতি পুরাতন পদ্ধতি অপেক্ষা অনেক দিকেই ভিন্ন এবং উন্নত। এখন নূতন পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক :—

গণিত শিখনের আধুনিক পদ্ধতির মূলকথা হ'ল—আবিষ্কার। স্বাধীন এবং মৌলিক চিন্তার যথেষ্ট সুযোগ ছাত্রদের দেওয়া হয়। ছাত্রকে এমন একটি পরিস্থিতির

সম্মুখীন করা হয় বা এমনভাবে একটি ভাব পরিমণ্ডল তৈরী করা হয়, যাতে তাকে স্বাধীনভাবে চিন্তা করতেই হয়। আধুনিক পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য হ'ল ঃ—

(১) **আবিষ্কার ঃ**—ছাত্ররা নিজেরাই আবিষ্কার করে ; তা সে কোন সিদ্ধান্তের সত্যতাই হোক্ বা কোন সমস্যার সমাধানই হোক। শিক্ষক কেবলমাত্র ইঙ্গিত দিয়ে দেন। একান্ত প্রয়োজন হ'লে নির্দেশ দেওয়া হয়। বিশুদ্ধ সংখ্যা ব্যবহারের ক্ষেত্রেও ছাত্রদের সুবিধার জন্য নানাপ্রকার যন্ত্রপাতিও আবিষ্কৃত হয়েছে। তাছাড়া উৎসাহদান, আগ্রহ পরিমাপ, প্রবণতা-পরিমাপ ; ইত্যাদির সাহায্যেও আবিষ্কারের সঠিক পথেই শিক্ষক মহাশয় ছাত্রকে পরিচালিত করেন। এর জন্য ছাত্রকে অত্যন্ত গভীরভাবে পর্যবেক্ষণ করা হয় এবং প্রয়োজনীয় প্রশ্নও করা হয়।

(২) **আলোচনা ঃ**—প্রাচীন পদ্ধতিতে আলোচনার কোন স্থানই ছিল না। কিন্তু আধুনিক পদ্ধতিতে আলোচনা গণিত শিখনের অপরিহার্য অঙ্গ। আলোচনার মাধ্যমে ছাত্র কি চিন্তা ক'রছে এবং কোন পদ্ধতি অনুসরণ ক'রছে তার পরিচয় পাওয়া যায়।

(৩) **প্রয়োগমূলক কাজ ঃ**—প্রয়োগমূলক কাজ বলতে সেই সব কাজকেই বোঝান হচ্ছে যেগুলির সম্পাদনার জন্য মন ও ইন্দ্রিয় উভয়েরই প্রয়োজন। এ জাতীয় কাজ বা সমস্যা আমাদের বাস্তব জীবনেরই অঙ্গীভূত। অগ্রসর ও অনগ্রসর, উভয় শ্রেণীর ছাত্রের জন্যই প্রয়োগমূলক কাজের প্রয়োজন আছে। কাগজে-কলমে হিসাব করার আগে হাতে কলমে কাজ করার সুযোগ দিলে ভালো হয়। এ'টিই গণিত শিক্ষণের সঠিক পদ্ধতি। কিন্তু প্রাচীন পদ্ধতিতে আগে কাগজে-কলমে হিসেব শিখানো হ'ত, পরে হাতে-কলমে কাজ করার সুযোগ দেওয়া হ'ত—যদিও সে সুযোগ খুবই কম ছিল।

আধুনিক পদ্ধতিতে শিখন হল বাস্তব অভিজ্ঞতা ভিত্তিক। ছাত্রদিগকে তাদের অভিজ্ঞতাকে যতদূর সম্ভব কাজে লাগাবার জন্য উৎসাহিত করা হয়। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে ঃ ছাত্ররা ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করতে চায়। এ ক্ষেত্রে তাদের বিভিন্ন গাছের বিভিন্ন আকৃতির পাতা আনতে বলা যেতে পারে। তারপর বিভিন্ন পাতার মধ্যে কোন্ পাতা সবচেয়ে বড়, তা জিজ্ঞাসা করা হবে। কোন কোন ছাত্রের ধারণা থাকতে পারে যে পাতাটি সবচেয়ে লম্বা তার ক্ষেত্রফলই সবচেয়ে বেশী। কিন্তু শীঘ্রই তারা নিজেদের ভুল বুঝতে পারে। আবার পাতাগুলি গ্রাফ্ কাগজের উপর রেখে ধারে ধারে দাগ টেনে ছোট ছোট বর্গগুলি গণনা

করেও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা সম্ভব। তেমনি বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে যদি এই ছড়াটি দেওয়া হয়

তেপান্তরের মাঠে তাল, তেঁতুল, বটে,
সমান দূরে রেখে গুপ্তধনে দেখে।

তাহলে ছাত্রের আবিষ্কারকের ভূমিকা গ্রহণ না করে কোন উপায় থাকে না। এইজন্যই প্রচলিত পদ্ধতির চেয়ে সময় কিছু বেশী লাগলেও আবিষ্কারের উপর জোর দেওয়া হয়।

গণিতে মুখস্থ করা অত্যন্ত ক্ষতিকর। এইজন্য আধুনিক পদ্ধতিতে মুখস্থ করার উপর জোর দেওয়া হয় না। এ পদ্ধতিতে ছাত্রের আগ্রহের উপরই বেশী জোর দেওয়া হয়। ছাত্রকে গণিতের বাস্তব ও প্রয়োজনীয় দিকটির দিকে বেশী মনোযোগী করে তোলার চেষ্টা করা হয়।

প্রাচীন পদ্ধতির আর একটি বড় ত্রুটী ছিল। প্রারম্ভিক শ্রেণীগুলিতে গণিত শিখনের জন্য এমন শিক্ষক নিযুক্ত করা হ'ত—যাদের গণিতে কোন স্বাভাবিক আগ্রহ ছিলই না। তাঁরা কেবল রুটিন মাফিক কাজ করে যেতেন। তাঁদের এই অনাসক্তি ও নিস্পৃহ ভাবটি ছাত্রদের মনে সঞ্চারিত হয়ে যেত। এইজন্য আধুনিক পদ্ধতিতে এই সমস্ত শ্রেণীর জন্য এমন শিক্ষক নির্বাচিত করা হয় যাঁরা গণিতের প্রতি স্বাভাবিক ভাবেই আগ্রহী এবং যাঁরা গণিত ও জীবনের মধ্যে কোন পার্থক্য স্বীকার করেন না। এরা গণিতে ছাত্রদের প্রকৃত আগ্রহ উজ্জীবিত ও বিকশিত করে তুলতে পারেন।

নবম অধ্যায়

অনুবন্ধ

(Correlation)

জ্ঞান অখণ্ড ও অবিভাজ্য। শিক্ষাও একটি সামগ্রিক প্রক্রিয়া। চলতি কথাতেও আমরা বিদ্যালয়ে শিক্ষাদানের কথাই বলে থাকি। এই শিক্ষাদান একটি সামগ্রিক প্রক্রিয়া ; কারণ বিদ্যালয়ে বিভিন্ন বিষয়ে শিক্ষাদান করা হলেও আমরা ঐ বিষয়গুলিতে পৃথক ভাবে শিক্ষাদানের কথা না বলে কেবলমাত্র শিক্ষাদানের কথাই বলে থাকি। কিন্তু দুর্ভাগ্যবশতঃ বর্তমান যুগে বিশেষজ্ঞদের আবির্ভাব অত্যন্ত দ্রুতবেগেই হচ্ছে। এর ফলে কোন একটি বিষয়ে যিনি বিশেষজ্ঞ বলে অভিহিত হচ্ছেন, তিনি সেই বিষয়টি ছাড়া অন্য কোন বিষয়ে সাধারণ জ্ঞানটুকু অর্জন করার কথা চিন্তাও করেন না। ফলে জ্ঞান হয়ে যাচ্ছে খণ্ডিত, শিক্ষাও হচ্ছে অসম্পূর্ণ। বিদ্যালয়েও এর প্রতিফলন বেশ লক্ষ্য করা যায়। বিভিন্ন বিষয়ে বিশেষজ্ঞ শিক্ষক তো আছেনই, গণিত-শিক্ষকদের মধ্যে ও উপবিভাগের সৃষ্টি করা হয়েছে। যিনি পাটিগণিত পড়ান, তিনি বীজগণিত বা জ্যামিতির ছায়া পর্যন্ত স্পর্শ করেন না। তেমনি বীজগণিত বা জ্যামিতির শিক্ষকদের পক্ষেও এরূপ মনোভাব পোষণ করা খুবই স্বাভাবিক।

শিক্ষণীয় বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে যে একটা যোগসূত্র বা অনুবন্ধ আছে তা বিখ্যাত শিক্ষাবিদ হার্বার্টও উপলব্ধি করেছিলেন। তাঁর ধারণা ছিল—বিভিন্ন বিষয়ের খণ্ডিত জ্ঞান অর্জনের দ্বারা মানসিক ক্ষমতা বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয় না ; ঐ ক্ষমতা বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয় তখনই—যখন বিভিন্ন অংশের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করে একটা সুষ্ঠু সমন্বয় সাধিত হয়। তিনি এই সম্পর্ক স্থাপন ও সমন্বয়নকেই অনুবন্ধের নীতি বা Principle of Correlation বলে অভিহিত করেছেন।

শিক্ষা তখনই সম্পূর্ণ ও সার্থক হয় যখন অনুবন্ধের নীতিটি অনুসৃত হয়। অনুবন্ধের সাহায্যে বিভিন্ন বিষয় বা ঘটনার মধ্যে সাদৃশ্যের কথা যেমন জানা যায় তেমনি একটি বিষয় বা ঘটনার মধ্যে কোন পরিবর্তন ঘটলে অপর বিষয় বা ঘটনার মধ্যে কতটা পরিবর্তন আসবে তাও জানা যায়। গাণিতিক পদ্ধতিতে সহ-পরিবর্তনের মানের সাহায্যে অনুবন্ধের প্রকৃতি ও পরিমান নির্ণয় করা যায়।

অনুবন্ধের আধুনিক মতবাদঃ—আধুনিক মতবাদে মানসিক বিকাশের সঙ্গে অনুবন্ধের সামঞ্জস্যের কথা বলা হয়ে থাকে। এই মতবাদ অনুযায়ী কোন একটি বিষয়কে কেন্দ্রীয় বিষয় (Central Subject) হিসাবে ধরে তার সঙ্গে বিভিন্ন বিষয়ের অনুবন্ধের পরিকল্পনা করা হয়। অবশ্য এই অনুবন্ধ আভ্যন্তরীণ ও বাহ্যিক উভয় প্রকারেরই হতে পারে। তবে লক্ষ্য রাখতে হবে, অনুবন্ধ যেন স্বাভাবিক হয়, কষ্টকল্পিত না হয়। একটি বিষয়ে শিক্ষাদান করার সময় প্রাসঙ্গিক ভাবেই অন্য বিষয়ের কথা আসতে পারে। এই জাতীয় অনুবন্ধকেই স্বাভাবিক অনুবন্ধ বলা হয়। আমাদের বর্তমানের বুনিয়াদী শিক্ষাও অনুবন্ধ প্রণালীর উপর ভিত্তি ক'রে প্রতিষ্ঠিত।

এবার গণিতে বিভিন্ন জাতীয় অনুবন্ধের কথা আলোচনা করা যাক। গণিতের অনুবন্ধকে প্রধানতঃ দু'ভাগে ভাগ করা হয়ঃ (১) আভ্যন্তরীণ অনুবন্ধ ও (২) বাহ্যিক অনুবন্ধ।

আভ্যন্তরীণ অনুবন্ধ বলতে গণিতের বিভিন্ন শাখার মধ্যে যথা, পাটীগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি ইত্যাদির মধ্যে অনুবন্ধকেই বোঝায়। আর বাহ্যিক অনুবন্ধ হ'ল গণিতের সঙ্গে অন্যান্য বিষয়ের ও জীবনের (Life activities) অনুবন্ধ। এখন বিস্তারিত আলোচনা করা যাক্।

আভ্যন্তরীণ অনুবন্ধ (Correlation within) ঃ—বিদ্যালয়ের সময় তালিকাতে গণিত বলে যে বিষয়টির উল্লেখ থাকে তার মধ্যে পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতি এই তিনটি শাখা সন্নিবিষ্ট থাকে। অবশ্য বর্তমানে পরিসংখ্যান ও পরিমিতিকেও গণিতের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। অনেক সময় গণিতের শাখাগুলি বিভিন্ন শিক্ষক দ্বারা পড়ানো হয়, যার ফলে শিক্ষক মহাশয় তাঁর জন্য নির্দিষ্ট শাখাটিকে একটি পৃথক বিষয় বলে মনে করেন এবং সেই ভাবে পড়িয়ে যান। অর্থাৎ পাটীগণিত পড়ানোর সময় বীজগণিত বা জ্যামিতির কোনপ্রকার সাহায্য তো লওয়া হয়ই না—প্রয়োজনবোধেও সেগুলির উল্লেখ পর্যন্ত করা হয় না। এ জ্ঞান বিশেষ জ্ঞান হলেও খুব সংকীর্ণ জ্ঞান এবং এতে শিক্ষা পূর্ণতা প্রাপ্ত হয় না। অথচ পাটীগণিত বা জ্যামিতিতে বীজগণিত অত্যন্ত সহজে প্রয়োগ করা সম্ভব এবং সেক্ষেত্রে সময়ও অত্যন্ত কম লাগে। একটি উদাহরণ দিলেই ব্যাপারটা পরিষ্কার হবে।

উদাঃ ১। **পাটীগণিতে বীজগণিতের প্রয়োগ**ঃ—

সমস্যাঃ—Divide Rs. 105 among A, B and C, so that A may

get Rs. 5 less than B and C may get Rs. 5 more than B.

পাটীগণিতের নিয়মে সমাধান করতে গেলে কিছুটা জটিল পদ্ধতির আশ্রয় নিতে হবে। কিন্তু বীজগণিতের নিয়মে আমরা অত্যন্ত সহজেই সমস্যাটির সমাধান করতে পারি।

ধরা যাক—A পায় x টাকা ;

সুতরাং—B পায় $x+5$ টাকা এবং

C পায় $x+5+5$ বা $x+10$ টাকা।

অতএব $x+x+5+x+10$ টাকা $=105$ টাকা

বা $3x+15$ টাকা $=105$ টাকা

বা $3x=105-15=90$ টাকা

$\therefore\ x=30$ টাকা।

সুতরাং A পায় 30 টাকা, B পায় 35 টাকা এবং C পায় 40 টাকা।

উদা ঃ ২। The sum of two numbers is 14 and the difference between their Squares is 28. Find the numbers.

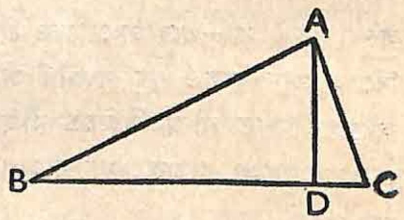
এখানেও আমরা $x+y=14$ এবং $x^2-y^2=28$ ধরে সমাধান করে x ও y বা সংখ্যা দুইটি নির্ণয় করতে পারি।

উদা ঃ ৩। Simplify $\dfrac{(4{\cdot}756)^2-(3{\cdot}244)^2}{4{\cdot}756+3{\cdot}244}$ এখানেও আমরা $4{\cdot}756=a$ এবং $3{\cdot}244=b$ ধরে সমাধান করতে পারি।

উদাহরণ ৪। জ্যামিতিতে বীজগণিতের প্রয়োগ :—

সমস্যা :—AD is the perpendicular form the vertex A upon the base BC of a triangle ABC. If $AD^2=BD.\ DC$; Prove that the triangle is right angled.

সমাধান—



আমরা জানি $AB^2=AD^2+BD^2$.

$AC^2=AD^2+CD^2$

যোগ করিয়া :— AB^2+AC^2

$=BD^2+CD^2+2AD^2$

$=BD^2+CD^2+2.BD.\ DC=(BD+CD)^2=BC^2$

$\therefore$ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

এ ছাড়াও বীজগণিতের কয়েকটি সূত্র যথা—$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$—ইত্যাদিও জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে প্রমাণ করা যায়।

আবার পাটীগণিতেও জ্যামিতি প্রয়োগ করা সম্ভব। পরিমিতি আসলে ব্যবহারিক জ্যামিতি ছাড়া কিছুই নয়। আর জ্যামিতিতেও আমরা প্রায়ই পাটীগণিত ব্যবহার করে থাকি (যোগ, বিয়োগ, ভাগ, বর্গ, বর্গমূল নির্ণয় ইত্যাদি)। আবার বীজগণিতকে বলা হয় ‘সাধারণীকৃত পাটীগণিত’ (Generalised Arithmetic)। বীজগণিত ও পাটীগণিতে অনেক অধ্যায় একই প্রকারের। ল. সা. গু., গ. সা. গু. বা ভগ্নাংশ নির্ণয় করার প্রকৃতি উভয় ক্ষেত্রে একই। পাটীগণিত বা জ্যামিতিতে বীজগণিত প্রয়োগ করার ফলে অনেক ক্ষেত্রে পরিশ্রম ও সময় বাঁচানো সম্ভব।

একই শাখার বিভিন্ন অধ্যায়ের মধ্যে অনুবন্ধ :—গণিত একটি ধারাবাহিক বিষয়। যে কোন শাখাই ধরা যাক না কেন, সেই শাখার বিভিন্ন অধ্যায়ের মধ্যে একটা যোগসূত্র লক্ষ্য করা যায়। এই যোগসূত্রটিই হল অনুবন্ধ। পূর্ববর্তী অধ্যায়ের জ্ঞানের উপর ভিত্তি করেই পরবর্তী অধ্যায়ের পাঠ এগিয়ে যেতে পারে। কিন্তু খুবই দুঃখের বিষয় অনেক শিক্ষক যেমন বিভিন্ন বিষয়কে বায়ুনিরোধক কক্ষে (air tight compartment) বিভক্ত করে থাকেন, তেমনি বিভিন্ন অধ্যায়ের মধ্যেও কোন যোগসূত্রের কথা স্বীকার করেন না। একটি অধ্যায়ের পর অপর একটি অধ্যায় কেন সন্নিবিষ্ট হ'ল তা জানতেও তারা আগ্রহী নন। যেহেতু চিরাচরিত পদ্ধতিতে একটি অধ্যায়ের পর আর একটি অধ্যায় পড়ানো হয়, সেইজন্য তাঁরাও ঐ গতানুগতিক নিয়ম মেনে চলেন। কিন্তু এর অন্তর্নিহিত কারণটি খুজে বের করে সেইভাবে পাঠ দান করলে ছাত্ররাও আগ্রহী হবে এবং উৎসাহিত বোধ ক'রবে—সেইসঙ্গে শিক্ষকের পাঠদানও সার্থক হবে।

বাহ্যিক অনুবন্ধ (Correlation without) :—গণিতের সঙ্গে অন্যান্য বিষয়ের সম্বন্ধের কথা আমরা আগেই আলোচনা করেছি। স্কুলপাঠ্য বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে খুব সহজেই অনুবন্ধ প্রস্তুত করা সম্ভব। তবে উপযুক্ত শিক্ষণের অভাবে অনেক ক্ষেত্রেই শিক্ষক মহাশয় সুযোগ পাওয়া সত্ত্বেও অনুবন্ধ প্রস্তুত করতে পারেন না। আবার অনেকে ইচ্ছা করেই করেন না। তবুও এমন কতকগুলি বিষয় আছে যেখানে বা যার সঙ্গে গণিতের অনুবন্ধ প্রস্তুত করতেই হয়। ভূগোল হ'ল এই রকম একটি বিষয়। ভূগোলে হাতে কলমে কাজ ক'রতে গেলে (Field

work) গণিতের তিনটি শাখারই সাহায্য নিতে হয়। বিজ্ঞান আর একটি বিষয়। গণিতকে বলা হয় বিজ্ঞানের মেরুদণ্ড। কাজেই গণিত বাদ দিয়ে বিজ্ঞানের অস্তিত্বের কথা কল্পনা করা যায় না। তেমনি পদার্থবিদ্যা, রসায়নবিদ্যা, প্রাণীবিদ্যা, জ্যোতির্বিদ্যা, ভূ-বিদ্যা প্রকৃতি-বিজ্ঞান, অর্থনীতি, সমাজবিদ্যা, মনোবিজ্ঞান ইত্যাদি বিভিন্ন বিষয়ে গণিতের প্রয়োগ যথেষ্ট পরিমাণে লক্ষ্য করা হয়।

বিভিন্ন বিষয়ের সঙ্গে যোগসূত্র নির্ণয় করেই বাহ্যিক অনুবন্ধের কাজ শেষ হয়ে যায় না। গণিতের সঙ্গে দৈনন্দিন জীবনেরও (life activities) একটা ঘনিষ্ঠ যোগসূত্র আছে। এমন অনেক পেশা বা বৃত্তি আছে যাতে গণিতের প্রয়োগ অপরিহার্য। কিন্তু সকলেই তো ঐরূপ পেশা বা বৃত্তি অবলম্বন করে না। তা না করলেও দৈনন্দিন জীবনের প্রয়োজনে গণিত ব্যবহার ক'রতে হয়। অবশ্য একথা ঠিক যে বিদ্যালয়ে গণিতের যে সমস্ত অধ্যায়ের শিক্ষা দেওয়া হয়, ঠিক ঠিক সেইগুলিই সব সময় প্রয়োগ করতে হয় না। সেগুলির কিঞ্চিৎ পরিবর্ত্তিত রূপই প্রয়োগ করা হয়। বাজারে জিনিস-পত্র বা তরিতরকারি কেনা, ট্রেন-বাস-রিকসাতে ভাড়া দেওয়া, জমি-জায়গার মাপ লওয়া, বাড়ী নির্মাণ করা, ঘড়ি দেখা ইত্যাদি বিভিন্ন ব্যাপারে গণিত প্রয়োগ করা হয়। এর জন্য বর্তমানে গণিতের পাঠ্যপুস্তকে যে সমস্ত সমস্যার উল্লেখ করা হয়, সেগুলি বাস্তব জীবনের অভিজ্ঞতাভিত্তিক। অবাস্তব সমস্যার চেয়ে বাস্তব সমস্যা ছাত্রদের মনোযোগ বেশী আকৃষ্ট করে, সে বিষয়ে কোন সন্দেহ নেই। কিন্তু বাস্তব সমস্যাগুলির পরিকল্পনা করার সময় যথেষ্ট সাবধানতা অবলম্বন না করলে সেগুলি অবাস্তব হয়ে পড়ে। একটি উদাহরণ দেওয়া যাক :—

সমস্যা :—2 men and 1 woman can build a wall 15ft. long, 3ft. wide in 3 days by working 7 hours or day. Find out the time required to finish the same wall if 200 men and 100 women work for 15 hours a day when 1 man = 2 women.

আপাতদৃষ্টিতে সমস্যাটিকে নির্ভুল ও নির্দিষ্ট বলে মনে হতে পারে। কিন্তু একটু লক্ষ্য করলেই দেখা যাবে যে এ'টি একটি অবাস্তব সমস্যা। তেমনি অনেক সমস্যার কাল্পনিক বা অসম্ভব উত্তর পাওয়া যায়। সেগুলিও অবাস্তব। গণিতের সঙ্গে বাহ্যিক জগতের অনুবন্ধ প্রস্তুত করতে হলে সমস্যাগুলি যেমন বাস্তব ও জীবন-ভিত্তিক করা প্রযোজন, তেমনি কতকগুলি বিশেষ অভ্যাসেরও শিক্ষা দিতে হবে। সে অভ্যাসগুলি হল সত্যবাদিতা, সংক্ষিপ্তভাবে কাজ করার ক্ষমতা, ত্রুটীহীনতা, সরলতা, মৌলিকতা ইত্যাদি। গণিতকে কেন্দ্রীয় বিষয় হিসাবে নির্বাচন করে অন্যান্য সব বিষয়ে সাফল্যের সঙ্গে শিক্ষাদান করা সম্ভব।

দশম অধ্যায়

গণিতে পাঠক্রম

(Curriculum In Mathematics)

গণিত কিভাবে পড়ানো হবে এবং কেন পড়ানো হবে, সে বিষয়ে আমরা আগেই আলোচনা ক'রেছি। এবার আলোচ্য বিষয় হ'ল গণিতে কি পড়ানো হ'বে। তবে 'কি পড়ানো হবে', তা নির্ভর করে 'কেন পড়ানো হবে'—তার উত্তরের উপর। (what to teach in mathematics and how to teach are governed by 'why is mathematics taught)। সাধারণের মধ্যে গণিত সম্বন্ধে একটা অহেতুক ভীতি আছে। অনেকে বলেন গণিত বেশ চিত্তাকর্ষক নয়, এতে অকৃতকার্য্যতার হার অত্যন্ত বেশী। কিন্তু যাঁরা প্রকৃতপক্ষে গণিতকে ভালবাসেন, তাঁরা এতে অত্যন্ত ব্যথিত হন। তাঁদের মতে গণিতের দৈনন্দিন জীবনে প্রয়োজনীয়তাই ছাত্রদিগকে গণিতে আগ্রহী করে তুলবে। কিন্তু যতক্ষণ না ছাত্রদিগকে গণিতের প্রয়োজনীয়তার কথা বুঝিয়ে দেওয়া হয়, ততক্ষণ তারা গণিত পাঠে আগ্রহী হয় না। তারা যান্ত্রিকভাবে গতানুগতিক পদ্ধতিতে গণিত পাঠ গ্রহণ করে এবং তাদের গণিত শিখনের উদ্দেশ্য হ'ল পরীক্ষায় পাশ করা। এর জন্য তারা গণিতের মত বিষয়টি মুখস্থ ক'রতেও পশ্চাৎপদ হয় না। কিন্তু এই ত্রুটী দূরীভূত করা একান্ত প্রয়োজন; আর এই ত্রুটী দূর করা যায় যদি যত্নের সঙ্গে গণিতের পাঠক্রম নির্দ্ধারণ করা হয়।

পাঠক্রম নির্দ্ধারণের সময় গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্যগুলির কথা মনে রাখতে হবে। গণিত শিখনের উদ্দেশ্যগুলিকে মোটামুটি দু'ভাবে ভাগ করা যায়। সেগুলি হ'ল—

(১) **প্রয়োজনীয় জ্ঞান অর্জন এবং**

(২) **কতকগুলি মনোভাব, দৃষ্টিভঙ্গী ও অভ্যাস গঠন।**

প্রয়োজনীয় জ্ঞান অর্জন বলতে বোঝায় দৈনন্দিন জীবনে গণিতের সার্থক ও সুষ্ঠু প্রয়োগ। অনেক সময় দেখা যায়, শ্রেণীর সেরা ছাত্র বাজারে জিনিস পত্রের দাম ঠিক ক'রতে হিমসিম খেয়ে যাচ্ছে অথচ অশিক্ষিত বা অর্ধশিক্ষিত মুদি কত তাড়াতাড়ি জিনিস পত্রের দাম নির্ণয় করে। এর কারণ হ'ল গণিতে বাস্তব দৃষ্টিভঙ্গীর অভাব। গণিতে সূত্র বা নিয়মাবলী শিক্ষা দেওয়া হয়, কিন্তু উদাহরণগুলি অধিকাংশ ক্ষেত্রেই কাল্পনিক বা অবাস্তব হয়। কাজেই গণিতের সঙ্গে জীবনের যোগসূত্রটি ছাত্র

হারিয়ে ফেলে। যখন সে দেখবে গণিত বাস্তব জীবনে কোন কাজে লাগছে না তখন স্বাভাবিক ভাবেই সে গণিতে নিরাসক্ত হ'য়ে পড়বে। কাজেই পাঠক্রমটি এমনভাবে নির্দ্ধারণ করতে হ'বে যেন প্রয়োজনভিত্তিক জ্ঞান ছাত্র অর্জন ক'রতে পারে।

মনোভাব, দৃষ্টিভঙ্গী ও অভ্যাসের কথা আগেই বলা হ'য়েছে। গণিতের শৃঙ্খলা-মূলক ও কৃষ্টিমূলক মূল্যের উপর বেশী গুরুত্ব আরোপ ক'রতে হবে। পাঠক্রমে এমন সব বিষয়বস্তু থাকবে যা ছাত্রের বুদ্ধির বিকাশ ঘটাবে, মনকে শিক্ষিত ক'রবে, মানসিক ঔদার্য্য বাড়াবে এবং তার চিন্তা ও যুক্তিশক্তির বিকাশ সাধন করবে। বাস্তব অভিজ্ঞতা ছাড়াও এ সমস্ত গুণ অর্জন করা সম্ভব নয়। কাজেই এখানেও লক্ষ্য করা যাচ্ছে গণিতের পাঠক্রম হ'বে বাস্তব-অভিজ্ঞতানির্ভর ও জীবন-ভিত্তিক। বিদ্যালয়ের পাঠ শেষ ক'রে সবদিক দিয়ে যেন ছাত্রটি একজন সুনাগরিক হ'য়ে উঠতে পারে; আর সুনাগরিক হতে গেলেই গণিতে জ্ঞান থাকা একান্ত বাঞ্ছনীয়। গণিতই তাকে নিয়মানুবর্তী ক'রবে, সত্যবাদী ক'রবে, স্বল্পভাষী ক'রবে।

এবার দেখা যাক বিষয়বস্তু কিভাবে নির্বাচিত হ'বে। বিষয়বস্তু নির্বাচনে যথেষ্ট যত্ন নিতে হবে এবং সতর্কতা অবলম্বন ক'রতে হ'বে। **J. W. A.** Young তাঁর The teaching of Mathematics[1] পুস্তকে বিষয়বস্তু নির্বাচনের কয়েকটি সর্তের কথা বলেছেন। সেগুলি হল :—

১। সুস্পষ্ট ও সুবিধাজনক গাণিতিক চিন্তনের সুযোগ দান (To exhibit most clearly and to best advantages type of thought).

২। প্রাকৃতিক নিয়মাবলীর সুষ্ঠু উপলব্ধি (To help to a better understanding of the laws of nature).

৩। আধুনিক জীবনের ক্রিয়াকলাপের ও সামাজিক সংগঠনের সঙ্গে গণিতের সম্বন্ধ নির্ণয় ও জীবন এবং সমাজ সম্বন্ধীয় সমস্যার সমাধানে গণিতের ভূমিকা (To bring out distinctly the mathematical relationships that exist in the social organism and in the activities of modern life, and to show how mathematics aids in solving their problems).

৪। ছাত্রের ভবিষ্যৎ প্রয়োজনে গণিত প্রয়োগ দক্ষতা সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া (To give sufficient skill in the actual performance of mathematical processes to meet the future needs of the pupil).

৫। বিজ্ঞানসম্মত শিক্ষাতত্ত্বের চাহিদা অনুযায়ী বিষয়বস্তুটির সুষম সমন্বয়

1 Pq—178—179. Chapter X

(To permit the organization of the material into a homogeneous whole, meeting the demands of scientific pedagogy).

শিশু কেন্দ্রিক পাঠক্রম :—পাঠক্রম হবে শিশুকেন্দ্রিক। পাঠক্রম নির্দ্ধারণ করার সময় শিশুর রুচি, ক্ষমতা, প্রবণতা প্রভৃতির কথা চিন্তা করতে হবে। শিশু—শিশুই, সে বয়স্ক লোকের ক্ষুদ্র সংস্করণ নয়। কাজেই তার রুচি, আগ্রহ প্রভৃতি বয়স্ক লোকের রুচি, আগ্রহের থেকে পৃথক হবেই। সে এখনও পূর্ণতা প্রাপ্ত হয় নি। কিন্তু তাই বলে তার বিদ্যালয়ের শিক্ষা তার ভাবীজীবনের প্রস্তুতি স্বরূপ নয়-সেইটাই তার তখনকার জীবন (It is not a preparation for life but life itself)। কাজেই বয়স্ক লোকের বা সমাজের প্রয়োজন অনুযায়ী পাঠক্রম নির্দ্ধারণ না করে শিশুর প্রয়োজন অনুযায়ী পাঠক্রম নির্দ্ধারণ করতে হ'বে। এর জন্য যেমন তার আগ্রহ, রুচি, প্রবণতা জানা প্রয়োজন তেমনি তার মনোপ্রকৃতি এবং মানসিক বয়সও জানা প্রয়োজন। শিশু কেন্দ্রিক পাঠক্রম হ'লে তবেই তা অনুসরণ ক'রতে ছাত্র আগ্রহী হবে এবং উৎসাহিত বোধ ক'রবে।

পাঠক্রম নির্দ্ধারণের নীতি :-পাঠক্রম নির্দ্ধারণ করার সময় বা বিষয়বস্তুর সংগঠনের সময় দু'টি বিভিন্ন মতবাদ অনুসরণ করা হয়। এর একটি হ'ল মনোবিজ্ঞান-সম্মত মতবাদ (Psychological) এবং অপরটি হ'ল যুক্তিসম্মত মতবাদ (Logical)।

মনোবিজ্ঞানসম্মত মতবাদ :- এই মতবাদের পৃষ্ঠপোষক বা সমর্থকেরা বিষয়বস্তুগুলিকে মনোবিজ্ঞান-সম্মত পদ্ধতিতে সংগঠিত করতে চান। তাঁদের মতে বিষয়বস্তু শিশুর মানসিক বিকাশকে অনুসরণ ক'রে চলবে। বর্তমান শিক্ষাই হ'ল শিশু কেন্দ্রিক শিক্ষা। কাজেই শিশু বিষয়বস্তুকে অনুসরণ ক'রবে না বরং বিষয়বস্তুই শিশুকে অনুসরণ ক'রে চলবে। পাঠক্রমের বিষয়বস্তুগুলি সরল থেকে জটিল, জানা থেকে অজানার দিকে এগিয়ে যাবে।

যুক্তিসম্মত মতবাদের সমর্থকেরা কিন্তু শিক্ষার ক্ষেত্রে শিশুর উপর বেশী গুরুত্ব দেন না। তাঁরা যুক্তিসম্মত জ্ঞানের উপরই বেশী জোর দিয়ে থাকেন। মনোবিজ্ঞান-সম্মত মতবাদ শিশুর স্বকীয় বৈশিষ্ট্যে বিশ্বাসী, কিন্তু যুক্তিসম্মত মতবাদ যুক্তি ও বিচার-করণের ক্ষমতাতে বিশ্বাসী। যুক্তিসম্মত মতবাদে বিশেষ বিশেষ অধ্যায় যেভাবে সন্নিবিষ্ট থাকে, ঠিক সেইভাবে পড়ানোর নির্দেশ থাকে।

যাই হোক, বাস্তবে কিন্তু মনোবিজ্ঞানসম্মত ও যুক্তিসম্মত মতবাদের মধ্যে কোন বিরোধিতা বা পার্থক্য নেই। যুক্তিসম্মত মতবাদে বিষরবস্তুর বিস্তৃতি অনেক বেশী এবং সেই বিয়য়বস্তু থেকে প্রয়োজন অনুযায়ী একটি নির্বাচন ক'রে নিতে বলা হয়। এই

নির্বাচনের কাজটি ক'রে মনোবিজ্ঞান। কাজেই প্রথমে যা থাকে যুক্তিসম্মত মতবাদ, পরে তাই হয়ে যায় মনোবিজ্ঞানসম্মত মতবাদ। অবশ্য মনোবিজ্ঞান শিক্ষামূলক এবং ব্যবহারমূলক, উভয় দিক বিবেচনা ক'রেই নির্বাচন কাজটি শেষ করে। বিশেষ বিশেষ বয়সে ছাত্র পাঠ্য বিষয়ের কতটুকু গ্রহণ করতে পারে, মনোবিজ্ঞান তাও বিবেচনা করে। কি প্রকার যুক্তি ছাত্রদের নিকট গ্রহণযোগ্য এবং সেই যুক্তি অর্জন করার জন্য ছাত্রদিগকে কোন্ কোন্ অধ্যায়ের পাঠ গ্রহণ ক'রতে হ'বে, মনোবিজ্ঞান তাও বিবেচনা করে। কাজেই গণিতের বিষয়বস্তু সংগঠনে একই সঙ্গে মনোবিজ্ঞানসম্মত ও যুক্তিসম্মত মতবাদে সাহায্য নেওয়া যেতে পারে। যুক্তিসম্মত মতবাদ অনুযায়ী বিভিন্ন অধ্যায় পর্যায়ক্রমে সাজানো হয়, যাতে পরস্পরের মধ্যে একটা যোগসূত্র বজায় থাকে; আর মনোবিজ্ঞান সম্মত মতবাদ অনুযায়ী অধ্যায়গুলির বিষয়বস্তু মানসিক বয়স অনুযায়ী নির্বাচিত করা হয়, যাতে ছাত্র বিষয়বস্তু সম্বন্ধে আগ্রহ বোধ ক'রতে পারে এবং বিষয়বস্তুটি তার নিকট কার্য্যকরী বলে প্রতীয়মান হয়।

পাঠক্রম সাজাবার পদ্ধতি—

পাঠক্রমের অধ্যায়গুলি সাজাবার বিভিন্ন পদ্ধতি আছে, যথা :—

১। **বিষয়বস্তুমূলক পদ্ধতি (Topical Method)**

২। **এককেন্দ্রিক পদ্ধতি (Concentric Method)**

৩। **কার্য্যসমস্যামূলক পদ্ধতি (Project Method)**

৪। **উপযোগিতামূলক পদ্ধতি (Principle of Utility)**

৫। **কর্মতৎপরতামূলক পদ্ধতি (Principle of Activity)**

৬। **অনুবন্ধমূলক পদ্ধতি (Principle of Correlation)** ইত্যাদি।

বিদ্যালয়ের প্রতিটি শ্রেণীর বিভিন্ন বিষয়ের বিস্তারিত পাঠক্রম বৎসরের প্রথমেই বিষয়-শিক্ষকেরা নির্দ্ধারণ ক'রে নিলে খুবই ভালো হয়। অন্যান্য বিষয়ের সঙ্গে সামঞ্জস্য রক্ষা করে এই নির্বাচন করতে হবে। বৎসরের বিভিন্ন সময়ের জন্য পাঠক্রমটি কয়েকটি অংশে ভাগ ক'রে নিতে হবে এবং লক্ষ্য রাখতে হবে যেন নির্দিষ্ট সময়ে পাঠক্রমটির নির্দিষ্ট অংশের পাঠদানের কাজ সম্পূর্ণ হয়। পাঠক্রমের বিষয়বস্তুগুলি জীবন-ভিত্তিক হ'লে ভালো হয়। ছাত্রদের নিজস্ব অভিজ্ঞতার উপর ভিত্তি ক'রে বিষয়বস্তুগুলি নির্বাচন ক'রলে আরো ভালো হয়। পাঠক্রমটি যেন অনড়, অচল বা অপরিবর্তনীয় না হয়। প্রয়োজনবোধে যেন তার পরিবর্তন, পরিবর্দ্ধন বা পরিবর্জন সম্ভব হয়। পাঠক্রম হবে শিশুকেন্দ্রিক। পাঠক্রম শিশুকে তাড়িয়ে নিয়ে

যাবে না, বরং শিক্ষার পথে তাকে এগিয়ে যেতে বন্ধুর মত সাহায্য ক'রবে। শিক্ষকের উপর পাঠক্রম নির্দ্ধারণ করার পূর্ণ স্বাধীনতা ন্যস্ত থাকবে। পাঠক্রমে 'যেটুকু না হ'লেই নয়'—কেবলমাত্র সেইটুকুই থাকলে ভালো হয়। পাঠক্রমটি পরীক্ষা-শাসিত হবে না। যাতে সমাজের চাহিদা যথেষ্টভাবে পূরণ করা যায়, তার ব্যবস্থাও রাখতে হবে পাঠক্রমে। পাঠক্রমে বিভিন্ন বৃত্তি গ্রহণের যেন সুযোগ থাকে। প্রাপ্তযৌবনের চাহিদাগুলিও যেন পাঠক্রমের সাহায্যে পূরণ করা যায়।

এবার বিভিন্ন স্তরে পাঠক্রম কিরকম হ'বে, সে বিষয়ে আলোচনা করা যাক। বর্তমানে গণিতের **পাঠক্রমটি** আমরা **তিনটি বিভিন্ন স্তরে** ভাগ ক'রতে পারি। একটি হ'ল প্রাথমিক স্তরের জন্য, একটি মাধ্যমিক স্তরের জন্য, আর একটি হ'ল—ঐচ্ছিক স্তর। প্রাথমিক স্তরের গণিতের পাঠক্রম নির্দ্ধারনের উদ্দেশ্যগুলি সংক্ষেপে হ'ল—

১। গণিতের প্রাথমিক ধারণা, প্রক্রিয়া, মৌল-নীতি ও গাণিতিক সম্বন্ধ সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা।

২। নির্ভুল ও দ্রুত উত্তর দানের অভ্যাস ও দক্ষতা অর্জন করা।

৩। গণিতের ধারণা ও দক্ষতা দৈনন্দিন জীবনে প্রয়োগ করার ক্ষমতা অর্জন করা।

৪। ব্যক্তিগত ও সামাজিক পরিবেশে গণিতের গুরুত্ব ও প্রয়োজনীয়তা উপলব্ধি করা।

মাধ্যমিক স্তর :—

মাধ্যমিক স্তরে গণিতকে 'কেন্দ্রীয়-বিষয়' (Core Subject) বলে ধরতে হবে। গণিতের জ্ঞান যেন ছাত্রদিগকে সুযোগ্য নাগরিক হিসাবে গড়ে তুলতে পারে। মাধ্যমিক স্তরের পর যারা আর লেখাপড়া করবে না, পাঠক্রমটির সাহায্যে তাদের জ্ঞান যেন সম্পূর্ণ হয়, আবার যারা এই স্তরের পর উচ্চশিক্ষা অর্জন ক'রতে যাবে. তাদের ক্ষেত্রে পাঠক্রমটি যেন উচ্চশিক্ষার ভিত্তি হ'তে পারে। মাধ্যমিক স্তরটি আবার দু'ভাগে বিভক্ত। একটি হ'ল—নিম্ন মাধ্যমিক স্তর, (৫ম, ৬ষ্ঠ, ৭ম, ৮ম অথবা ৬ষ্ঠ, ৭ম ও ৮ম শ্রেণী) অপরটি হ'ল উচ্চ মাধ্যমিক স্তর (৯ম, ১০ম, ১১শ বা ৯ম ও ১০ম শ্রেণী); নিম্ন মাধ্যমিক স্তরেই ছাত্রদের ভবিষ্যৎ জীবনের প্রস্তুতিপর্ব চলতে থাকে। এই স্তরে ছাত্রদের ফলাফল দেখেই তাদের ভবিষ্যৎ শিক্ষাজীবন বা বৃত্তি-নির্বাচন করা উচিত। এই স্তরে গণিত-শিখণের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যগুলি সংক্ষেপে বিবৃত হ'ল।

লক্ষ্য :—

১। পরিবেশ ও সমাজের উপর গণিতের অপরিসীম প্রভাব ছাত্রদের উপলব্ধি করতে সাহায্য করা।

২। পরিবেশ নিয়ন্ত্রণে ও মানবজাতির উন্নতিতে গণিতের অবদানের কথা উপলব্ধি করা।

৩। গণিতে দক্ষতা অর্জন এবং গণিত সম্বন্ধে সুষ্ঠ মনোভাব গড়ে তুলতে সাহায্য করা।

৪। ছাত্রদের আত্মোপলব্ধি করার ক্ষমতা বৃদ্ধি করা।

উদ্দেশ্য :—

১। গণনামূলক দক্ষতা অর্জন করা।

২। গাণিতিক ধারণা উপলব্ধি করা এবং সেগুলি ব্যবহার করা।

৩। গণিতের ভাষা ও প্রতীক (Symbol) গুলি উপলব্ধি করা এবং সেগুলি যথাযথ ব্যবহার করা।

৪। পরিসংখ্যানমূলক তথ্য এবং লেখচিত্র সংগ্রহ করা, প্রকাশ করা এবং ব্যাখ্যা করার ক্ষমতা অর্জন করা।

৫। আত্ম-নির্ভরশীল বা আত্ম-বিশ্বাসী হওয়া।

৬। বিশ্লেষনী ক্ষমতা অর্জন করা এবং সঠিকভাবে কাজ করার ক্ষমতা অর্জন করা।

৭। স্পষ্ট ও যথাযথ চিন্তা করার ক্ষমতা অর্জন করা।

৮। সাধারণীকরণের ক্ষমতা অর্জন করা।

৯। গণিতের সঙ্গে অন্যান্য বিষয়ের, পরিবেশের এবং জীবনের যোগসূত্র নির্ণয় করা।

১০। বিশ্বাসযোগ্য ও গ্রহণযোগ্য 'সম্ভাব্য হিসাব' (estimate) তৈরী করার ক্ষমতা অর্জন করা।

মাধ্যমিক স্তরে গণিত পাঠে ছাত্রদের আগ্রহী করে তুলবার জন্য বিভিন্ন বিষয়-বস্তুর সাহায্য লওয়া হয়। তার মধ্যে কতকগুলি হ'ল :—

১। পরিসংখ্যান, পরিমিতি, জ্যামিতি, অঙ্কন ইত্যাদিতে ব্যবহারিক বা হাতে কলমে কাজ (Practical work)।

২। গণিতে দৃষ্টিনির্ভর প্রদীপন (visual aid) ব্যবহার করা চলে, এমন বিষয়বস্তু।

৩। ছাত্রদের আগ্রহ 'হবি' ইত্যাদির উপর নির্ভর করে নির্বাচিত বিষয়বস্তু। (কার্য্যসমস্যামূলক পদ্ধতি অনুযায়ী কোন বাস্তব সমস্যা দিলে ভালো হয়, যেমন ঐতিহাসিক স্থানে ভ্রমণ ক'রতে যাওয়া বা বনভোজন করা ইত্যাদি)

৪। গণিতের ইতিহাস (উৎপত্তি ও ক্রমবিকাশের ইতিহাস)।

৫। গণিতে আনন্দ পাওয়া যাবে এমন বিষয়বস্তু (ধাঁধা, সমস্যামূলক চিত্র ইত্যাদি)।

ঐচ্ছিক গণিত (**Elective Mathematics**) ঐচ্ছিক গণিত কেন্দ্রীয় গণিত অপেক্ষা কিছু কঠিন এবং এর পাঠক্রমটিও কিছু বেশী বিস্তৃত। সাধারণ গণিত বা কেন্দ্রীয় গণিতে উদাহরণের সংখ্যা বেশী, কিন্তু ঐচ্ছিক গণিতে উদাহরণ অত্যন্ত কম। যাই হোক ঐচ্ছিক গণিত পাঠের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যগুলি সংক্ষেপে আলোচনা করা যাক্ :—

লক্ষ্য :—

১। সংখ্যা ও পরিমাণের যথাযথ ব্যবহার সম্বন্ধে ছাত্রদের অবহিত করা।

২। ব্যক্তিগত, সমাজগত ও অর্থনৈতিক জীবনে গণিতের প্রভাব সম্বন্ধে ছাত্রদের অবহিত করা।

৩। গাণিতিক ভাবের মাধ্যমে সৌন্দর্য্যমূলক ও বুদ্ধিমূলক পরিতৃপ্তি লাভ করা এবং সৃজনমূলক ক্ষমতা প্রকাশের সুযোগ দান করা।

৪। বৃত্তিমূলক উদ্দেশ্যে গণিতের প্রয়োজনীয় জ্ঞান ও দক্ষতা অর্জনে ছাত্রদের সহায়তা করা। এককথায়, গণিতের সাহায্যে কোন উপযুক্ত বৃত্তির ভিত্তি স্থাপন করা।

উদ্দেশ্য :—

১। গণিতের বিভিন্ন ভাষা উপলব্ধি করা এবং সেগুলি সার্থকভাবে প্রয়োগ করা।

২। গাণিতিক তথ্য এক ভাষা থেকে অন্য ভাষাতে অনুবাদ করার দক্ষতা অর্জন করা।

৩। পরিবেশে ছাত্র যাতে সক্রিয় অংশ গ্রহণ ক'রতে পারে তার ব্যবস্থা করা।

৪। গাণিতিক তত্ত্ব ও তথ্য সংগ্রহ করা ও সংব্যাখ্যান করা।

৫। অনুমানের উপর ভিত্তি করে পরীক্ষা-নিরীক্ষা করা এবং তার ফলাফলের ভিত্তিতে যুক্তিযুক্ত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া।

৬। 'কাল্পনিক সংখ্যা' ও 'অমূলদ সংখ্যা' (imaginary numbers and irrationals) সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা।

৭। সূচক (indices) এবং লগারিদম (Logarithm) সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা।

৮। সমস্যা-সমাধানে পরিবর্তনশীল রাশি ও সংখ্যা ব্যবহার করা।

৯। অসীম (infinity) এবং শূন্য (zero) সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা।

১০। সীমা (limit), সম্ভাবনা (Probability) ইত্যাদি সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা।

১১। ব্যবহারিক কাজের জন্য উন্নততর যন্ত্রপাতির ব্যবহার করার ক্ষমতা অর্জন করা।

১২। জ্যামিতি ও বীজগণিতে অবরোহী পদ্ধতি ব্যবহার করার ক্ষমতা অর্জন করা।

১৩। জ্যামিতিতে বীজগণিতের এবং বীজগণিতে জ্যামিতি প্রয়োগ ক'রতে শিক্ষা দেওয়া।

১৪। গণিতের হিসাবে দ্রুততা, নির্ভুলতা এবং আত্মবিশ্বাস অর্জন করা। এবং গণিতে প্রতীক ব্যবহারে দক্ষতা অর্জন করা।

১৫। গণিতের সামগ্রিক জ্ঞান বাস্তব সমস্যার সমাধানের ক্ষেত্রে সার্থকভাবে প্রয়োগ করার ক্ষমতা অর্জন করা।

বর্ত্তমান যুগ হ'ল বিজ্ঞানের যুগ। বিজ্ঞানের সঙ্গে তাল রেখে চলতে গেলে গণিতের পাঠক্রমকেও উন্নত ক'রতে হবে। শিক্ষা জগতে যে সমস্ত 'কমিশন' নিযুক্ত করা হয়েছিল, তারা প্রত্যেকেই গণিতের পাঠক্রম পরিবর্তন করার কথা বলেছেন। গণিত কেবলমাত্র তত্ত্ব ও তথ্যমূলক ক'রলেই চলবে না, গণিতের ব্যবহারিক দিকটির প্রতিও সবিশেষ 'গুরুত্ব' আরোপ ক'রতে হবে। গণিতের পাঠক্রমটি দৈনন্দিন জীবনে ব্যবহারের উপযোগী হবে, আবার উচ্চ শিক্ষার ভিত্তিও গঠন ক'রবে। পাঠক্রমটি ব্যক্তিগত ও সমাজগত, উভয়প্রকার প্রয়োজনই মেটাতে সক্ষম হবে। অবশ্য একটি সম্পূর্ণ পাঠক্রম নির্দ্ধারণ ক'রতে গেলে বিজ্ঞানসম্মত দৃষ্টিভঙ্গী ও বৈজ্ঞানিক পদ্ধতিতে গবেষণা করার প্রয়োজন।

একাদশ অধ্যায়

গণিতে মৌখিক কার্য্যাবলী

(Oral work In Mathematics)

গাণিতিক হিসাবে লেখা একটি অপরিহার্য্য অঙ্গ : গণিতের রূপই হ'ল—লিখিত রূপ। কিন্তু অনেক ক্ষেত্রে গণিতে লেখার কাজ বাদ দিয়েও মৌখিকভাবে হিসাব করা সম্ভব। যখন গণিতে লেখার কাজ না করে মৌখিক হিসাব করা হয়, তখন তাকে মৌখিক গণিত বা 'মানসাঙ্ক' বলা হয়। প্রাথমিক স্তরে এই জাতীয় মৌখিক গণিতের যথেষ্ট প্রয়োজনীয়তা আছে। গণিতে কোন অঙ্ক করার সময় কিংবা কোন হিসাব করার সময় অনেক ক্ষেত্রেই মৌখিকভাবে হিসাব বা গণনা করতে হয়। ছাত্রদেরও অনেক কিছু মুখস্থ রাখতে হয়—যেমন নামতা, সূত্র ইত্যাদি। এই মৌখিক কাজের ব্যবহার উঁচু শ্রেণীতেও লক্ষ্য করা যায়। অঙ্ক ক'রতে গিয়ে যদি ছোট ছোট গুণ, ভাগও লিখিত ভাবে ক'রতে হয়, তাহলে অনেক সময় লেগে যায়। মৌখিক গণিত বা মানসাঙ্কের সাহায্যে অত্যন্ত দ্রুত সমস্যার সমাধান করা সম্ভব। এই পদ্ধতিকে সমস্যা সমাধানের সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিও বলা চলে।

হিসাব যখন দীর্ঘ হয় বা সংখ্যাগুলি যখন খুব বড় হয়, তখনই লেখার আশ্রয় নিতে হয়। আবার যখন কোন একটি সমস্যার বিভিন্ন স্তরের মধ্যের সম্বন্ধগুলি খুবই জটিল হয়, তখন সেগুলি আর মনে রাখা যায় না বলেই লিখিত ভাবে তার সমাধান ক'রতে হয়। এ ক্ষেত্রে বলা যায় আমরা স্মৃতির উপর সম্পূর্ণ নির্ভর ক'রে থাকতে পারছি না। লিখিত গণিত হ'ল মৌখিক গণিতের সুশৃঙ্খল ও বিধিবদ্ধ রূপ। প্রত্যেক লিখিত হিসাবের আগে মৌখিক হিসাবের সাহায্য লওয়া বাঞ্ছনীয়।

এখন দেখা যাক্ মৌখিক হিসাবের কাজ কি কি। এর বিভিন্ন কাজগুলি সংক্ষেপে আলোচনা ক'রলে দেখা যায় :—

১। মৌখিক হিসাব মনোযোগের সহায়ক। শ্রেণীতে গণিত পাঠদানের সময় শিক্ষক মৌখিক গণিতের সাহায্য নিয়ে থাকেন, কারণ সেক্ষেত্রে প্রতিটি ছাত্রই মনোযোগী হয়।

২। সংক্ষিপ্ত অথচ দ্রুত উত্তর দিয়ে ছাত্ররা আগ্রহ অনুভব করে।

৩। পাঠের একটি মূর্তরূপ পাওয়া যায়।

৪। মৌখিক হিসাবের সাহায্যে শ্রেণীতে শৃঙ্খলা বজায় রাখা যায়।

৫। আয়োজন ও অভিযোজন স্তরে মৌখিক গণিতের ব্যবহার করার ফলে সময় অত্যন্ত কম লাগে, আর উপস্থাপন স্তরে মৌখিক গণিতের সাহায্যে শিক্ষক বিষয়বস্তুটি সুন্দর ভাবে ব্যাখ্যা ক'রতে পারেন।

৬। মৌখিক গণিতের সাহায্যে অতি সহজেই ছাত্রদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষা করা সম্ভব।

৭। মৌখিক হিসাব করার অভ্যাস থেকে চিন্তনের দ্রুততা উৎপন্ন হয়। এর ফলে শিখনের কাজটি সহজ হয় এবং গণিতের হিসাবও নির্ভুল হয়।

৮। মৌখিক গণিত থেকেই লিখিত গণিত সম্বন্ধে একটি পরিষ্কার ধারণা জন্মায়।

৯। ছাত্রদের উপলব্ধিমূলক ক্ষমতা পরিমাপ করা যায় মৌখিক গণিতের সাহায্যে।

১০। শ্রেণীর একঘেয়েমী দূর করার জন্য মৌখিক গণিত খুবই কার্য্যকরী। কোন কারণে শ্রেণীর ছাত্ররা অমনোযোগী হ'লে বা বিরক্ত হ'লে নির্বাচিত মৌখিক প্রশ্নের সাহায্যে তাহাদের মনোযোগ ফিরিয়ে আনা সম্ভব।

১১। মানসিক প্রস্তুতি ও প্রত্যুৎপন্নমতিতা মৌখিক গণিতের সাহায্যে উৎকর্ষ লাভ করে। এতে তাদের বুদ্ধিরও যথেষ্ট ব্যবহার ক'রতে হয়। তা ছাড়া তাদের শ্রবনেন্দ্রিয়ের উন্নতি, কল্পনাশক্তির উৎকর্ষ সাধন, দ্রুত চিন্তনের ক্ষমতা, মানসিক-প্রত্যক্ষণ প্রভৃতি ও মৌখিক গণিতের ব্যবহারের প্রত্যক্ষ ফল। এর সাহায্যেই সংক্ষিপ্ত ও নির্ভুল উত্তরে উপনীত হওয়া সম্ভব।

এত সুবিধা থাকা সত্ত্বেও মৌখিক গণিতকে একটি স্বাধীন ও পৃথক বিষয় বলে মনে করা চলবে না। একে লিখিত গণিতের একটি পরিপূরক বলে ধরা যেতে পারে। নূতন পাঠ আরম্ভ করার সময়, পাঠের পুনরালোচনার সময় এবং ছাত্রদের উপলব্ধি করার পরিমাণ জানার জন্য (অর্থাৎ আয়োজন, অভিযোজন ও উপস্থাপন স্তরে) মৌখিক গণিত খুব সার্থকভাবে ব্যবহার করা সম্ভব। তবে মৌখিক গণিতের স্মৃতি দীর্ঘস্থায়ী নয় বলে এর ব্যবহার সীমাবদ্ধ থাকাই বাঞ্ছণীয়।

এবার গণিতের বিভিন্ন শাখাতে কিভাবে মৌখিক প্রক্রিয়া ব্যবহার করা যেতে পারে তা আলোচনা করা যাক।

পাটীগণিত ঃ—

মূল্য নির্ণয়, স্থদ নির্ণয় করা, সময় ও কাজের সহজ উদাহরণ, বেগ ও দূরত্বের সহজ উদাহরণ, আয়কর জীবন-বীমা, সত্বয়সমুত্থান, কাল নির্ণয়, ক্ষেত্রফল নির্ণয় ইত্যাদি ক্ষেত্রে মৌখিক গণিত ব্যবহার করা সম্ভব।

বীজগণিত ঃ—

স্থত্র-ব্যবহার, মান-নির্ণয়, ঋণাত্মক-রাশি, বর্গ, বর্গমূল, লেখচিত্র, ল, সা, গু, ও গ, সা, গু নির্ণয় ইত্যাদি বিভিন্ন ক্ষেত্রে মৌখিক গণিত ব্যবহার করা হয়।

জ্যামিতি ঃ—

দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, গভীরতা ও উচ্চতা নির্ণয়, কোণের পরিমাণ, ত্রিভুজের আকৃতি নির্ণয়, ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য ও কোণের পরিমাণ নির্ণয়, বৃত্ত, ত্রিভুজ ইত্যাদির ক্ষেত্রফল নির্ণয় প্রভৃতি ক্ষেত্রে মৌখিক গণিতের ব্যবহারে যথেষ্ট স্থবিধা পাওয়া যায়। জ্যামিতির বিভিন্ন সমস্যার সমাধানও মৌখিক গণিতের সাহায্যে করা সম্ভব। যেমন ঃ

3″, 4″ এবং 5″ বাহু বিশিষ্ট ত্রিভুজ অংকন সম্ভব কি না ?

একটি ত্রিভুজের একটি কোন 60°, অপরটি 80°, তৃতীয় কোণটির পরিমাণ কত ?—এ জাতীয় সমস্যার সমাধান মৌখিক ভাবেই করা সম্ভব।

তাহ'লে দেখা যাচ্ছে গণিতের বিভিন্ন শাখাতে মৌখিক হিসাব করার যথেষ্ট স্থযোগ আছে। গণিতে ব্যবহারিক প্রয়োজনীয়তার দিক থেকে মৌখিক হিসাবের যথেষ্ট গুরুত্ব আছে। এর জন্য বিষয়টির দৈনন্দিন পাঠদানকালে মৌখিক হিসাবের একটি মূল্যবান স্থান থাকা উচিত।

অন্যান্য বিষয়ে মৌখিক কাজের যেমন গুরুত্ব আছে। গণিতেও তেমনি। মৌখিক কাজ যে কেবলমাত্র চিত্তাকর্ষক, তা নয় ; প্রাথমিক স্তরে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণও বটে। লিখিত কাজে কেবলমাত্র দর্শনেন্দ্রিয়ের ব্যবহার করা হয়, কিন্তু লিখিত কাজের সঙ্গে মৌখিক কাজের সমন্বয় ঘটালে যুগপৎ দর্শনেন্দ্রিয় ও শ্রবনেন্দ্রিয় ব্যবহার করা সম্ভব। শিশুদের ক্ষেত্রে যতো বেশী ইন্দ্রিয় ব্যবহার করা যাবে জ্ঞানও তত পাকা হবে। তা ছাড়া শ্রেণীতে ছাত্ররা নিষ্ক্রিয় শ্রোতার ভূমিকা নিয়ে বসে থাকতে ভালোবাসে না। মৌখিক গণিতে তাদের স্থান হয় সক্রিয় বক্তার সারিতে। নূতন পাঠ বা নূতন পদ্ধতি যদি শ্রেণীতে ব্যবহার ক'রতে হয়, তবে তা প্রথমে মৌখিকভাবেই করা উচিত। এতে ছাত্র অনগ্রসর বা পশ্চাৎপদ থাকলে তা সঙ্গে সঙ্গে নির্ণয় করা যায় এবং তা দূর করার ব্যবস্থা সঙ্গে সঙ্গেই করা সম্ভব। ছাত্ররা নূতন পাঠের

সঙ্গে ঘনিষ্ঠ যোগাযোগ গড়ে তুলতে পারে বলে তাতে অধিকতর আগ্রহ বোধ করে। এই জন্যই তারা বিষয়টির খুঁটিনাটির দিকেও মনোযোগ দেয়।

মৌখিক কাজের পরই লিখিত কাজ ব্যবহার করা উচিত। লিখিত কাজটি হ'ল মৌখিক কাজের লিপিবদ্ধ ও সুসংহত রূপ। Reading makes a full man, conference a ready man and writing an exact man'—এই নীতিটি গণিতের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। মৌখিক হিসাব নির্ভুল হয় ঠিকই, কিন্তু লিখিত হিসাবে তা আরো নিখুঁত করা হয়। মৌখিক কাজের একটা নিজস্ব বৈশিষ্ট্য আছে। যেখানে অধিক অনুশীলনের প্রয়োজন সেখানে মৌখিক কাজ অধিকতর কার্য্যকরী।

মৌখিক কাজ পাঠ সূচিত করে; লিখিত কাজ পাঠ সমাপ্ত করে। গণিত পাঠের লক্ষ্য যদিও লিখিত তথ্যে উপনীত হওয়া, সেই লক্ষ্যে উপনীত হতে সাহায্য করে মৌখিক কাজ। মৌখিক কাজ ও লিখিত কাজ—দু'টিকে পৃথক সত্তা হিসাবে না দেখে বলা যেতে পারে লিখিত কাজ হ'ল মৌখিক কাজের পরিবর্তিত ও পরিবর্দ্ধিত রূপ। লিখিত কাজের সাফল্য নির্ভর ক'রছে মৌখিক কাজের উপর। এই জন্যই বিদ্যালয়ে মৌখিক কাজের উপর এত গুরুত্ব আরোপ করা হয়।

———

॥ দ্বাদশ অধ্যায় ॥

পাঠ্য পুস্তক

(Text Book)

আমাদের বর্তমান শিক্ষা ব্যবস্থাতে পাঠ্যপুস্তকের উপর বেশী জোর দেওয়া হয়। শুধু পাঠ্যপুস্তকই কেন, নোট, সিওর সাকশেস, লাষ্ট-মিনিট সাজেশান ইত্যাদি বিভিন্ন বই-এর চাপে ছাত্র 'ভারাক্রান্ত'। আর পাঠ্যপুস্তক শেষ করাই যেন স্কুলগুলির শিক্ষার লক্ষ্য হ'য়ে উঠেছে। শিক্ষকেরা ও অন্ধভাবে ও বৈচিত্র্যহীন পদ্ধতিতে পাঠ্যপুস্তকের অধ্যায়গুলি একে একে শেষ ক'রতে থাকেন। কিন্তু এ পদ্ধতি বেশীদিন চলতে দেওয়া উচিত নয়। গণিতের ক্ষেত্রে অন্ধভাবে পাঠ্যপুস্তক অনুসরণ করা একটি মারাত্মক ভুল। অনেক শিক্ষক জেনেশুনেও এ ভুল পথে পা বাড়িয়ে থাকেন।

গণিতের কাজ কেবল সংবাদ বা তথ্য সরবরাহ করা নয়। এতে বিভিন্ন জাতীয় সমস্যার সমাধান ক'রতে হয় এবং কিভাবে সমাধান করা যেতে পারে তার জন্য ছাত্রদিগকে উপযুক্ত শিক্ষা দেওয়া হয়। 'কার্য্যভিত্তিক শিক্ষা'র (Learning by doing) মূলনীতিটি গণিতে অনুসরণ করা হয়। আর ঠিক এই কারণেই অন্যান্য বিষয়ে যতটা পাঠ্যপুস্তকের উপর নির্ভর করা যেতে পারে গণিতে ততটা যায় না। তাছাড়া গণিতে বিভিন্ন পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়। 'আবিষ্কারক পদ্ধতি' বা 'বিশ্লেষণী পদ্ধতি'তে যেভাবে পাঠদান করা হয়, ঠিক সেইভাবে পাঠ্যপুস্তক রচনা করা অত্যন্ত দুরূহ। গণিতে ছাত্রদিগকে সূত্র, নিয়ম ইত্যাদি আবিষ্কার কর'তেই শিক্ষা দেওয়া হয়। সেক্ষেত্রে পাঠ্যপুস্তক আগের থেকে তৈরী সূত্র বা নিয়ম সরবরাহ ক'রে ছাত্রদের আত্মবিশ্বাসী হবার পথে বাধার সৃষ্টি করে। এ দিক থেকে দেখতে গেলে গণিতে পাঠ্যপুস্তক কেবলমাত্র অপ্রয়োজনীয় বা অবাঞ্ছনীয় নয় ; ক্ষতিকরও।

কিন্তু তবুও গণিতে পাঠ্যপুস্তক ব্যবহার করার রীতি ছিল, এখনও আছে এবং ভবিষ্যতেও থাকবে। এর অবশ্য কয়েকটা কারণ আছে। তার মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ কারণগুলি হল :—

১। পাঠ্যপুস্তকে তৈরী (Ready made) সমস্যার আকারে যথেষ্ট বিষয়বস্তু সন্নিবিষ্ট থাকে। কোন একটি শ্রেণীতে 'ক্লাস-পিরিয়ডের' শেষেই তো গণিতের চর্চা

শেষ হ'য়ে যায় না। শ্রেণীর বাইরে অর্থাৎ বাড়ীতে, পাঠ্যপুস্তকের সমস্যাগুলি দেখে ছাত্ররা অনুশীলন ক'রতে পারে।

২। পাঠ্যপুস্তকে সুনির্দিষ্ট আকারে ও যথাযথভাবে সমস্যাগুলি লিপিবদ্ধ থাকে বলে শিক্ষককে অপ্রয়োজনীয় ও অবান্তর অংশগুলির সম্মুখীন হ'তে হয় না।

৩। পাঠ্যপুস্তকে পাঠ-পরিকল্পনার একটা সুনির্দিষ্ট আকৃতি থাকে। এর জন্য ছাত্ররা শ্রেণীতে কি ক'রেছে এবং তারপর আর কি ক'রতে হবে—তা হৃদয়ঙ্গম ক'রতে পারে অত্যন্ত সহজেই।

৪। ছাত্র যদি শিক্ষকের সাহায্য ছাড়াই নিজে নিজে পাঠ শিক্ষা ক'রতে চায় তখন পাঠ্যপুস্তক তাকে সাহায্য করে। পাঠ্যপুস্তকের সাহায্যে ছাত্র 'ডাণ্টন-প্ল্যান' বা অন্য কোন 'সক্রিয়তা-ভিত্তিক পদ্ধতি' অনুযায়ী পাঠ শিক্ষা ক'রতে পারে।

৫। পাঠ্যপুস্তকে সুনির্বাচিত উদাহরণ থাকে বলে তা শিক্ষক ও ছাত্র উভয়ের কাছেই উপযোগী।

৬। পুনরালোচনার ক্ষেত্রে পাঠ্যপুস্তক অপরিহার্য। পাঠ্যপুস্তক না থাকলে ছাত্ররা অতীতে কি শিক্ষা ক'রেছে তার পুনরালোচনা ক'রতে পারে না। কারণ নিয়মিত ক্লাস নোট রাখা স্কুলের ছাত্রদের পক্ষে সম্ভব নয়।

যা'ইহোক পাঠ্যপুস্তক ব্যবহারের প্রয়োজনীয়তা থাকলেও এ ব্যপারেও দু'টি বিষয়ের প্রতি মনোযোগ দিতে হবে। সে দু'টি হ'ল :—

(১) পাঠ্যপুস্তক নির্বাচন এবং

(২) পাঠ্যপুস্তকের সুব্যবহার প্রণালী।

উত্তম পাঠ্যপুস্তকের বৈশিষ্ট্য :—

একই বিষয়ে একাধিক পাঠ্যপুস্তক বাজারে প্রচলিত—এ আমরা সকলেই জানি। কিন্তু সব পাঠ্যপুস্তকের মান একপ্রকার হয় না। কোনটি ভালো, আবার কোনটি মন্দ। যাই হোক উত্তম পাঠ্য পুস্তকের কতকগুলি বৈশিষ্ট্য আছে। আমরা সেই **বৈশিষ্ট্যগুলিকে** সাধারণতঃ **চার ভাগে** ভাগ ক'রে থাকি। সেগুলি হ'ল :—

১। পাঠ্যপুস্তকের বিষয়বস্তু (Contents)

২। বিষয়বস্তুর উপস্থাপন পদ্ধতি (Presentation)

৩। আকৃতি (Get up)

৪। সাধারণ বৈশিষ্ট্য (General)

বিষয়বস্তু :

১। পদ্ধতি সম্বন্ধে এবং সমস্যা সমাধান করার কৌশল সম্বন্ধে পাঠ্যপুস্তকে যথেষ্ট বিষয়বস্তু থাকা উচিত। সমস্যা সমাধান ক'রতে ছাত্ররা যাতে আগ্রহী হয় তার জন্য বিভিন্ন জাতীয় সমস্যা থাকা বাঞ্ছনীয়। সমস্যাগুলির সমাধান পদ্ধতি যেন এক-প্রকারের না হয়। কতকগুলির ক্ষেত্রে সূত্রগুলি প্রত্যক্ষভাবে প্রয়োগ করা যাবে আবার কতকগুলির ক্ষেত্রে পরোক্ষভাবে প্রয়োগ করা যাবে।

২। সমস্যাগুলি যেন দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গে সম্বন্ধ বজায় রেখে নির্বাচিত হয়। সেই সঙ্গে লক্ষ্য রাখতে হবে যেন গণিতের সঙ্গে অন্যান্য বিষয়েরও একটা যোগসূত্র থাকে। আবার সমস্যাগুলি যেন বিভিন্ন বৃত্তির ভিত্তি হিসাবে কাজ ক'রতে পারে সেদিকেও লক্ষ্য রাখতে হবে।

৩। পাঠ্যপুস্তকের বিষয়বস্তু যেন মনোবিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতিতে সাজানো হয়। কোন একটি বিষয়কে (Tropic) কেন্দ্র ক'রে বিষয়বস্তু না সাজিয়ে এক একটি মূল নীতিকে কেন্দ্র ক'রে বিষয়বস্তু সাজানো উচিত।

৪। পাঠ্যপুস্তকে বিভিন্ন জাতীয় উদাহরণ থাকবে। উদাহরণগুলিও যেন দৈনন্দিন জীবন, সামাজিক চাহিদা ইত্যাদি বিভিন্ন ক্ষেত্র থেকে সংগৃহীত হয়।

৫। পাঠ্যপুস্তকে লিখিত এবং মৌখিক উভয় প্রকার কাজের ব্যবস্থা থাকবে। সমস্যার বেশী সমাধান থাকলে পাঠ্যপুস্তকটি একটি নোট বই এর আকৃতি ধারণ ক'রবে। পাঠ্যপুস্তকে যেন উত্তর পত্র না থাকে।

৬। অনুশীলন করার জন্য পাঠ্যপুস্তকে যেন প্রশ্নমালার সংখ্যা বেশী হয়। প্রশ্নমালার সমস্যাগুলির উদ্দেশ্য কিন্তু বিভিন্ন হবে। যেমন :—

(ক) পরীক্ষার জন্য নির্দিষ্ট সমস্যা,

(খ) পুনরালোচনার জন্য সমস্যা,

(গ) ব্যবহারিক কাজের সমস্যা,

(ঘ) মৌখিক কাজের জন্য সমস্যা, এবং

(ঙ) যাদের বুদ্ধি সাধারণ ছাত্রের থেকে বেশী, তাদের উপযোগী কিছু কঠিন সমস্যা।

৭। বিষয়বস্তুর যেন প্রত্যক্ষ, ব্যবহারিক ও সামাজিক উপযোগিতা থাকে। এর সাহায্যে ছাত্র যেন শিক্ষা ও জীবনের মধ্যে সেতুবন্ধ রচনা ক'রতে পারে।

৮। বিষয়বস্তু যেন ধারাবাহিক হয় এবং এর গতি যেন স্বচ্ছন্দ হয় ; সে দিকেও বিশেষ লক্ষ্য রাখতে হবে।

উপস্থাপন পদ্ধতি :—

১। সচরাচর যে সমস্ত পদ্ধতি গণিত শিখনের ক্ষেত্রে বেশী প্রয়োগ করা হয়, পাঠ্যপুস্তকে সেই সমস্ত পদ্ধতি অনুযায়ী বিষয়বস্তুগুলি উপস্থাপিত করা বাঞ্ছনীয়।

২। উপস্থাপনের ভাষা হবে সহজ, সরল, স্পষ্ট যাতে ছাত্ররা সহজেই তা বুঝতে পারে। ভাষা এবং রচনাশৈলী ছাত্রদের বয়সোপযোগী হওয়া উচিত।

৩। গণিতের প্রতীক চিহ্ন (Symbol) ও পদ (Term) নির্বাচন করার সময় বিশেষ যত্ন নিতে হবে। এগুলি যেন বেশী-ব্যবহৃত ও সাধারণ (common) প্রতীক ও পদ থেকে লওয়া হয়।

৪। যেখানে প্রয়োজন হবে সেখানেই যেন চিত্র দেওয়া হয়। তবে চিত্রের সংখ্যা যেন খুব বেশী না হয়।

৫। সমস্যাগুলি এমন হবে যেগুলির সঠিক উত্তর হওয়া সম্ভব। এমন সমস্যা থাকা উচিত নয় যার সঠিক উত্তর পাওয়া অসম্ভব বা যার উত্তর কাল্পনিক।

আকৃতি :—

১। পাঠ্যপুস্তক যেন নয়ন মুগ্ধকর হয়।

২। পাঠ্যপুস্তকে ব্যবহৃত অক্ষর (Type) যেন খুব ছোট না হয়। নীচু শ্রেণীতে বেশ বড় অক্ষর ব্যবহার করা উচিত। পুস্তকের কাগজ বেশ সাদা হবে, কিন্তু খুব চকচকে হলে চলবে না কারণ তাতে বেশী আলো প্রতিফলিত হয়। পাঠ্যপুস্তকে যেন নিউজ-প্রিণ্ট কাগজ ব্যবহার করা না হয়।

৩। পুস্তকের বাঁধাই যেন বেশ ভালো হয়, তা না হলে বেশীদিন টিকবে না।

৪। পুস্তকের দাম যেন বেশ কম হয়, যাতে সকল ছাত্রই তা কিনতে পারে।

সাধারণ :—

১। পাঠ্যপুস্তক যোগ্যব্যক্তির দ্বারা লিখিত হওয়া বাঞ্ছনীয়। যিনি গণিত-শাস্ত্রে বেশ পারদর্শী এবং দীর্ঘদিন ঐ বিষয়টির পাঠদানের সঙ্গে যুক্ত আছেন, এমন ব্যক্তিই এই কাজের উপযুক্ত। লেখকের গণিত-শিখনে ছাত্রদের অসুবিধাগুলির সঙ্গে পরিচয় থাকলে ভালো হয়।

২। পাঠ্যপুস্তক যেন বাজারে সহজলভ্য হয়।

৩। পাঠ্যপুস্তকের মান (standard) ছাত্রদের মানসিক বয়সের অনুপাতে স্থির করা উচিত। পাঠ্যপুস্তকে স্বাধীন চিন্তা করার সুযোগ দেওয়া উচিত। পাঠ্যপুস্তকে মুখস্থ করার যেন কোন সুযোগ না থাকে।

৪। যেখানেই সুযোগ পাওয়া যাবে, সেইখানেই যেন গণিতের বিভিন্ন অধ্যায়ের সঙ্গে, বিভিন্ন শাখার সঙ্গে এবং গণিতের সঙ্গে অন্যান্য বিষয়ের ও জীবনের অনুবন্ধ রচনা করা হয়।

৫। পুস্তকে অপ্রয়োজনীয় কোন অংশ যেন না থাকে। অনেক পাঠ্যপুস্তকে ব্যাখ্যা ক'রতে গিয়ে এমন সমস্ত বিষয় অন্তর্ভুক্ত করা হয়, যেগুলি শিক্ষকের কাজে লাগতে পারে, কিন্তু ছাত্রদের কাজে কখনও লাগবে না। পাঠ্যপুস্তক দু'প্রকারের হলে ভালো হয়। একটি হ'ল ছাত্রদের জন্য আর অপরটি হ'ল শিক্ষকের জন্য। দু'টির আলোচনার ধারাও দু' প্রকারের হবে।

পাঠ্যপুস্তকের ব্যবহার ঃ—

পাঠ্যপুস্তকটি সব দিক দিয়ে সর্বাঙ্গসুন্দর হবে। পাঠ্যপুস্তক যেন লক্ষ্য হ'য়ে না দাঁড়ায়। মনে রাখতে হবে এটি লক্ষ্যে পৌছাবার একটি উপায় মাত্র (Means to an end)। এ'টি যেন পুরোপুরি শিক্ষকের স্থলাভিষিক্ত না হয়ে পড়ে। আবার শিক্ষকও যেন সবসময় পাঠ্যপুস্তকের উপর নির্ভর ক'রে না থাকেন। শ্রেণীর পাঠ এবং পাঠ্যপুস্তক আলোচনা এই দু'য়ের সংমিশ্রণে জ্ঞান যেন সম্পূর্ণ হয়।

সকল শ্রেণীতেই পাঠ্যপুস্তক থাকবে কি না, সে বিষয়ে শিক্ষাবিদগণ একমত নন। অনেকে বলেন ১ম, ২য় ও ৩য় শ্রেণীতে কোন পাঠ্যপুস্তক থাকবে না। ৪র্থ থেকে ৮ম শ্রেণী পর্যন্ত এ বিষয়ে একটি পাঠ্যপুস্তক থাকবে। ৮ম শ্রেণীর উর্দ্ধে একাধিক পাঠ্যপুস্তক থাকতে পারে। তার 'থেকে শিক্ষক একটি নির্বাচন ক'রে দেবেন। নির্বাচনের ব্যাপারে গণিত শিক্ষককে সম্পূর্ণ স্বাধীনতা দিতে হবে। যদি সর্বাঙ্গসুন্দর পাঠ্যপুস্তক না পাওয়া যায়, তবে বিভিন্ন পাঠ্যপুস্তক থেকে অংশ সংগ্রহ ক'রে বিষয় শিক্ষক একটি আদর্শ পাঠ্যপুস্তক রচনা ক'রে নিতে পারেন। বর্তমানে কেন্দ্রীয় সরকার এবং রাষ্ট্র পাঠ্যপুস্তক প্রণয়নে যথেষ্ট সহযোগিতা ক'রছেন। তাঁদের উদ্যোগে উপযুক্ত ব্যক্তির দ্বারা কয়েকটি নির্বাচিত পাঠ্যপুস্তক প্রকাশ ক'রলে ফল ভালোই হ'বে।

———

ত্রয়োদশ অধ্যায়

গণিতের পাঠাগার, পরীক্ষার যন্ত্রপাতি ইত্যাদি

(Mathematical Library, Laboratory, Apparatus etc.)

বর্তমান যুগে শিক্ষার উদ্দেশ্য হ'ল ছাত্রদের স্বাধীন চিন্তাশক্তির বিকাশ সাধন করা। তারা যাতে স্বাধীনভাবে কোন কিছু আবিষ্কার ক'রতে পারে, তার শিক্ষা দিতে হবে। শিক্ষকের কাজ হবে কেবলমাত্র সঠিক পথের নির্দেশ দেওয়া। জ্ঞান আহরণের জন্য যে সমস্ত তথ্য সংগ্রহ করা প্রয়োজন, তা ছাত্রই সংগ্রহ ক'রবে। কিভাবে সংগ্রহ করা যাবে, শিক্ষক সে বিষয়ে কার্য্যকরী নির্দেশ দেবেন।

কোন একটি পাঠ্যপুস্তক থেকে সম্পূর্ণ জ্ঞান আহরণ করা সম্ভব নয়। এর জন্য একাধিক পাঠ্যপুস্তকের সাহায্য লওয়া প্রয়োজন। একজন ছাত্রের পক্ষে একাধিক পাঠ্যপুস্তক ক্রয় করা সম্ভব নয়। ফলে গণিতের পাঠাগার স্থাপনের প্রয়োজনীয়তা দেখা দেয়। যতক্ষণ না গণিতে যথেষ্ট সংখ্যক পাঠ্যপুস্তক ও প্রাসঙ্গিক পুস্তকের (Reference Book) ব্যবস্থা করা হয়, ততক্ষণ ছাত্রদের গণিতের জ্ঞান সম্পূর্ণ হয় না। তাছাড়া Assignment পদ্ধতিতে ছাত্রদিগকে বাড়ী থেকে নির্দিষ্ট পাঠ তৈরী ক'রে আনতে বলা হয়। তার জন্য তাকে উপযুক্ত পাঠ্যপুস্তক না দিলে তার পক্ষে পাঠ তৈরী করা সম্ভব হয় না।

প্রায় প্রত্যেক বিদ্যালয়েই পাঠাগার থাকে। তবে অধিকাংশ পাঠাগারেই বহু পুরাতন, অপ্রয়োজনীয় ও অপ্রচলিত পুস্তক দিয়ে আলমারী ভর্ত্তি করা হয়। গণিতের পাঠাগার সাধারণ পাঠাগারের সঙ্গে একসঙ্গেও রাখা চলতে পারে, আবার আলাদা ভাবেও স্থাপন করা যেতে পারে। প্রতি শ্রেণীর জন্যও পৃথক পৃথক পাঠাগার স্থাপন করা যেতে পারে। বৎসরের শুরুতে প্রায় প্রত্যেক বিদ্যালয়েই বিভিন্ন প্রকাশক কর্ত্তৃক বিভিন্ন বিষয়ে নমুনা-পুস্তক পাঠানো হ'য়ে থাকে। এগুলি বিষয় পাঠাগারে (Subject Library) জমা দিলে ভালো হয়। গণিত পাঠাগারে শ্রেণীর জন্য নির্দিষ্ট পাঠ্যপুস্তকটি তো থাকবেই, ঐ বিষয়ে অন্যান্য পাঠ্যপুস্তকও রাখতে হবে। এছাড়া গণিতের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত বিষয়ের পুস্তক, ম্যাগাজিন ইত্যাদিরও ব্যবস্থা থাকবে। এগুলি থেকে ছাত্র যেমন গণিতে জ্ঞান অর্জন ক'রবে, তেমনি সার্থকভাবে অবসর সময়ও

কাটাতে পারবে। গণিত পাঠাগারের দেওয়ালগুলিতে বিভিন্ন গণিতবিদের ছবি, গণিতের ইতিহাসের ক্রমবিবর্তন প্রভৃতির চিত্র ইত্যাদি থাকলে বিষয়টি সম্বন্ধে ছাত্রদের আগ্রহ বৃদ্ধি পাবে। আবার এর ফলে পাঠাগারটির পরিবেশও অনুকূল ও উপযুক্ত হবে।

এখন আলোচনা করা যাক্ পাঠাগারে কি জাতীয় পুস্তক থাকবে। পাঠাগারে যে সমস্ত পুস্তক থাকবে, সেগুলি যেন 'বিষয় সম্বন্ধীয়' (Books relating to matter), মজার ধাঁধা যুক্ত, অবসর সময় যাপনের উপযুক্ত ইত্যাদি বিভিন্ন জাতীয় হয়। মনে রাখতে হবে পাঠাগারের উদ্দেশ্য কেবলমাত্র প্রয়োজনীয় জ্ঞান বা সংবাদ সরবরাহই নয়, ছাত্রদের গণিতে আগ্রহ বৃদ্ধি করাও বটে। পাঠাগারের জন্য পুস্তক নির্বাচনের ক্ষেত্রে নীচের অভিমতগুলি অনুসরণ ক'রলে ভাল হয়।

১। পাঠাগারে বিভিন্ন শ্রেণীর জন্য নির্দিষ্ট পাঠ্যপুস্তক তো থাকবেই, উপরন্তু শিক্ষক যে সমস্ত পুস্তক প্রয়োজনীয় মনে ক'রবেন, সেগুলিও থাকবে।

২। বিভিন্ন ভাষার (যেমন আঞ্চলিক ভাষা, ইংরেজী) পুস্তকও পাঠাগারে থাকবে।

৩। উত্তর-পত্র-যুক্ত ও উত্তর-পত্র-বিহীন, দু'রকমের পাঠ্যপুস্তকই থাকবে।

৪। গণিতের ইতিহাস (ক্রমবিকাশের), গণিতবিদদের জীবনী ইত্যাদি সম্বন্ধেও কিছু কিছু পুস্তক থাকবে।

৫। বৈচিত্র্য আনার জন্য নূতন ও পুরাতন, জীবিত ও মৃত, দেশী ও বিদেশী গণিতবিদদের দ্বারা লিখিত পাঠ্যপুস্তকও থাকবে।

৬। প্রতি ক্ষেত্রেই পুস্তকের সংখ্যা একাধিক হবে যাতে একসঙ্গে একাধিক ছাত্র উপকৃত হ'তে পারে। পুস্তকের ভাষা হবে সহজ ও সরল।

৭। পুস্তক নির্বাচন ক'রবেন শিক্ষক। বহুল ব্যবহৃত পুস্তকই পাঠাগারে রাখা উচিত। যে পুস্তক কোন ছাত্র বা শিক্ষক ব্যবহার ক'রছেন না, যা কেবলমাত্র পাঠাগারের শোভা বর্দ্ধন করে, সেই রকম পুস্তক নির্বাচন ক'রে কোন লাভ হয় না। নির্বাচিত পুস্তকের যেন একটা সর্বনিম্ন মান রক্ষিত হয়।

বিদ্যালয়ের সমস্ত গণিতের শিক্ষক একত্রে যদি পুস্তক নির্বাচন করেন, তবে কাজটি অনেক সহজ হয়। প্রত্যেক গণিত শিক্ষকেরই নিজস্ব একটি পাঠাগার থাকা প্রয়োজন। কিন্তু বিভিন্ন কারণের জন্য (প্রধানতঃ অর্থনৈতিক) ভারতবর্ষের মতো দেশে এ শুধুই কল্পনামাত্র। আবার যেখানে একক বিদ্যালয়ের পক্ষে পাঠাগার

স্থাপনের অসুবিধা আছে, সেখানে অনেকগুলি বিদ্যালয় একত্রিত হ'য়ে একটি কেন্দ্রীয় পাঠাগার স্থাপন ক'রতে পারে। এ ব্যাপারে বিভিন্ন বিদ্যালয়ের গণিত শিক্ষকদের এগিয়ে আসতে হবে।

পরীক্ষাগার (Laboratory) :—পদার্থবিদ্যা, রসায়ন-বিদ্যা প্রভৃতির মতো গণিতকে 'পরীক্ষা-মূলক বিষয়' (Laboratory Subject) বলা হয় না ঠিকই ; কিন্তু গণিতেও পরীক্ষাগার ব্যবহারেরও যথেষ্ট সুযোগ এবং প্রয়োজনীয়তা আছে। পাঠদানের নূতন পদ্ধতি আবিষ্কারের সঙ্গে সঙ্গে পরীক্ষাগারের ব্যবহারও উত্তরোত্তর বেড়ে চলেছে। পরীক্ষাগারের প্রচলনের পর থেকেই ছাত্রদের গণিতের আগ্রহও যথেষ্ট বেড়েছে। অন্যান্য বিজ্ঞান বিষয়ের মতো গণিতে পরীক্ষা-নিরীক্ষার সুযোগ অনেক কম। কিন্তু বিভিন্ন ক্ষেত্রে গণিতের যথেষ্ট প্রয়োগও লক্ষ্য করা যায়।

গণিতের পরীক্ষাগার অন্যান্য বিজ্ঞান বিষয়ের পরীক্ষাগার থেকে কিছুটা আলাদা। এই পরীক্ষাগারের প্রধান কাজ হ'ল—বাস্তব ও কার্য্যকরী অভিজ্ঞতার সঙ্গে পরিচিত করা এবং অন্যান্য ক্ষেত্রে গণিতের প্রয়োগ। এর জন্য কিছু কিছু যন্ত্রপাতিরও প্রয়োজন হয়। এ সমস্ত যন্ত্রপাতির অভাবে গণিতের পরীক্ষাগারের কাজ ঠিকমত চালানো অসম্ভব।

এখন দেখা যাক্ গণিত-পরীক্ষাগারে কি কি জিনিসের বা যন্ত্রপাতির প্রয়োজন হয়।

নীচু শ্রেণীতে :—

পুঁতি অথবা তেঁতুল-বীচি, বল-ফ্রেম, যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ সম্বন্ধীয় তালিকা ভগ্নাংশের উদাহরণের জন্য কাঠের বিভিন্ন জ্যামিতিক আকৃতি বিশিষ্ট কাঠ বা কার্ড-বোর্ডের অংশ, নামতার চার্ট ইত্যাদি।

উঁচু শ্রেণীতে :—

জটিল রাশির তালিকা, মুদ্রা, তুলাদণ্ড ও ওজন, ঘড়ি, চেন্, ভগ্নাংশের তালিকা গ্রাফ্ কাগজ, বিভিন্ন জ্যামিতিক আকৃতির কাঠের টুকরো, কাঠের ঘনক (cube), পাশ বই, চেক্ বই ইত্যাদি।

যন্ত্রপাতি (Apparatus) :—

যন্ত্রপাতির মধ্যে প্রথমেই বলতে হয় ব্ল্যাকবোর্ডের কথা। শ্রেণীতে একটি ব্ল্যাকবোর্ড তো থাকবেই, সম্ভব হ'লে দু'টি রাখা উচিত। গ্রাফবোর্ডও একটি থাকবে। চক্‌গুলি যেন বেশ সাদা হয়। রঙীন চক্‌ও রাখতে হবে। এ ছাড়া থাকবে :—

Angle Mirror, Plane-Table, Divider, Hypsometer, Clinometer Thermometer, Barometer, Slide-rule, Calculating machine প্রভৃতি। তা ছাড়া প্রজেক্ট পদ্ধতি বা ডাল্টন পদ্ধতির জন্য যে সমস্ত জিনিসের প্রয়োজন হয় সেগুলি শিক্ষক ও ছাত্রের যুগ্ম প্রচেষ্টায় তৈরী করা যেতে পারে। প্রত্যেক ছাত্রের একটি ক'রে Instrument Box থাকবে।

পরীক্ষাগারে ছাত্রের ভূমিকা হবে বৈজ্ঞানিকের। স্বাধীনভাবে হাতে কলমে কাজ ক'রতে ক'রতেই তার সুপ্ত সম্ভাবনাগুলি বিকশিত হবে। কিন্তু আমাদের দেশে এ ব্যাপারে এখনও অনেক পিছিয়ে আছে। তার কারণ হল:

১। আর্থিক দুরবস্থা।

২। উপযুক্ত শিক্ষকের অভাব।

৩। শিক্ষাক্ষেত্রে বিজ্ঞান সম্মত দৃষ্টিভঙ্গীর অভাব।

৪। বিদ্যালয়ে গৃহাভাব প্রভৃতি।

একথা বলা যেতে পারে যেখানে যন্ত্রপাতি কেনাকাটার জন্য যথেষ্ট অর্থ নেই, সেখানে খুব দামী যন্ত্রপাতি বাদ দিয়ে যেগুলি একান্ত প্রয়োজনীয়, সেই রকম কিছু যন্ত্রপাতি বিদ্যালয়েই তৈরী করে লওয়া যায়। এতে ছাত্রদের আগ্রহও বাড়বে, তারা আনন্দও পাবে। কাঠের বা কাড বোর্ডের মডেল তৈরী করা তো অত্যন্ত সহজ ব্যাপার। এ ব্যাপারে শিক্ষক আগ্রহী হ'লে যথেষ্ট উপকার সাধিত হওয়ার সম্ভাবনা।

গণিত ক্লাব (Mathematics Club) :—বর্তমান যুগে শিক্ষার অন্যতম প্রধান লক্ষ্য হ'ল অভিজ্ঞতার সম্প্রসারণ। এর জন্য কেবলমাত্র পাঠক্রমিক বিষয়ই নয়, সহপাঠক্রমিক বিভিন্ন বিষয়ের ও কার্য্যাবলীরও সাহায্য লওয়া হয়। গণিত ক্লাব এইরকম একটি সহপাঠক্রমিক সংগঠন। এই ক্লাবের মুখ্য উদ্দেশ্য হ'ল :—

(ক) গণিত পাঠে উৎসাহ বৃদ্ধি করা এবং (খ) গণিতের জ্ঞান বৃদ্ধি করা

এর জন্য অবশ্য বিভিন্ন পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়। ছাত্ররা যাতে ব্যক্তিগত ভাবে ও সমষ্টিগত ভাবে গণিত চর্চা ক'রতে পারে-সে বিষয়েও দৃষ্টি দেওয়া হয়।

গণিত ক্লাবে যে কোন শ্রেণীর ছাত্রই (গণিতের) সদস্য হ'তে পারে। তবে বিদ্যালয় যদি খুব বড় হয়, এবং ছাত্র সংখ্যা যদি বেশী হয়, তবে একই বিদ্যালয়ে দু'টি ক্লাব করা যেতে পারে যথা Junior এবং Senior Mathematics Club. যে সমস্ত ছাত্র গণিতে অত্যন্ত উৎসাহী এবং যাদের গণিতে বেশ ভালো দখল আছে তারাই প্রথমে ক্লাবে সক্রিয় সদস্য হ'য়ে ক্লাবটি পরিচালনা ক'রবে।

ক্লাবের কার্য্যাবলী অনুষ্ঠিত হবে বিদ্যালয়ের ছুটির পর কিংবা কোন অবসর সময়ে। সাধারণ মিটিং এর মতো এর বিবরণী লিপিবদ্ধ ক'রে রাখার প্রয়োজন নেই। ছাত্ররাই ব্যবস্থাপক, তারাই বক্তা, তারাই শ্রোতা। অবশ্য নূতন কাজে হাত দেবার সময় গণিত শিক্ষক প্রয়োজনীয় উপদেশ দেবেন। মাঝে মাঝে গণিতজ্ঞ ব্যক্তিদের ও বিশেষজ্ঞদের নিমন্ত্রণ ক'রে নিয়ে এসে বক্তৃতা দেবার ব্যবস্থা ক'রতে পারলে ভালো হয়।

ক্লাবের কার্য্যাবলী ঃ—প্রথম প্রথম শিক্ষক নেতৃত্ব ক'রলেও ধীরে ধীরে সরে আসবেন। ছাত্ররা নিজেরা তারপর কাজের ভার গ্রহণ ক'রবে। তারা প্রথমে গণিতের ক্ষেত্রে নিজ নিজ অভিজ্ঞতার আলোচনার সাহায্যে ক্লাবের কাজ শুরু ক'রতে পারে। গণিতে ভালো পাঠাগার থাকলে, আর শিক্ষক সেরকম উৎসাহী হ'লে ক্লাবের কাজের মধ্যে নূতনত্ব আনা সম্ভব। এতে ছাত্রদের মধ্যে যে আগ্রহের সৃষ্টি হবে তা হ'ল খাঁটি আগ্রহ।

ক্লাবে নিম্নরূপ কাজের ব্যবস্থা রাখা যেতে পারে। যথা ঃ—

১। হিসাব করার সংক্ষিপ্ত পন্থা উদ্ভাবন।

২। বিভাজ্যতা প্রভৃতি পরীক্ষা করা।

৩। গণিতে ভুল নির্ণয় করা।

৪। ম্যাজিক স্কোয়ার পূরণ করা (বত্রিশের ঘর পূরণ ইত্যাদি)।

৫। ধাঁধা, কৌশলযুক্ত সমস্যা, গাণিতিক প্রমাদ (fallacy) ইত্যাদি।

৬। গণিতের ছড়া, আর্য্যা।

৭। খেলার ছলে গণিতের জ্ঞান পরীক্ষা (Quiz)।

৮। গণিত সম্বন্ধীয় সাময়িক পত্রাদি পাঠ করা এবং সে বিষয়ে আলোচনা করা।

৯। প্রাচীন পুস্তক-পুস্তিকাতে গণিত সম্বন্ধীয় আলোচনাগুলি পর্যালোচনা করা।

১০। বিভিন্ন উপায়ে জ্যামিতিক সিদ্ধান্তগুলির সত্যতা প্রমাণ করা।

১১। গণিতের বিভিন্ন চার্ট, মডেল, যন্ত্রপাতি, প্রদীপন ইত্যাদি তৈরী করা।

১২। গণিতের সংগ্রহশালা থাকলে তার জন্য নমুনা সংগ্রহ করা।

১৩। স্থানীয় অঞ্চল সমূহের পরিসংখ্যান গ্রহণ করা এবং সেগুলির উপযুক্ত ব্যাখ্যা দেওয়া।

১৪। সম্ভাবনার নীতির (**Probability**) উপর ভিত্তি ক'রে খেলাধূলার ব্যবস্থা করা।

১৫। গণিতের সমস্যা সমাধানের সহজ ও সংক্ষিপ্ত পন্থা উদ্ভাবন করা।

এবার দু-একটি কাজের নমুনা দেওয়া হ'চ্ছে :—

(৪) এর উদাহরণ :—৩২ এর ঘর পূরণ :—

১	৮	৯	১৪
১১	১২	৩	৬
৭	২	১৫	৮
১৩	১০	৫	৪

(সূত্র :—
চন্দ্র, নেত্র, সমুদ্র, বাণ
পৃষ্ঠে নব করি বুঝহ সন্ধান,
যাহা কর অঙ্ক, তাহা কর আধা
কুন্ত পদে পদে ভাগ সমাধা।)

(৭) এর উদাহরণ লীলাবতীর সমস্যাগুলিতে যথেষ্ট দেখা যায়।

(তুলনীয় :— একদিন চারি বুড়ী আহারে বসিয়া
বয়স গণনা ক'রে হাসিয়া হাসিয়া' ইত্যাদি।)

(১৫) এর উদাহরণ :— $V=u+ft$ এই সূত্রটি t বর্জিত কর।

সমাধান :— আমরা জানি $S=ut+\frac{1}{2}ft^2$.

$V=u+ft$. বর্গ করিলে $V^2=u^2+2uft+f^2t^2$.

অথবা $V^2-u^2=2uft+f^2t^2$

$=2f\left(ut+\frac{1}{2}ft^2\right)$

$=2fs.$

গণিত ক্লাবের সাফল্য নির্ভর ক'রছে ছাত্র ও শিক্ষকের যুগ্ম প্রচেষ্টার উপর। ক্লাব প্রতিষ্ঠিত হ'লে সেটি যেন আর উঠে না যায়, সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে। ছাত্রদিগকে নিত্য নতুন উদ্ভাবনী শক্তির পরিচয় দিতে হবে যাতে সকলেরই আগ্রহ অটুট থাকে। সমষ্টিগত প্রচেষ্টা যেমন প্রয়োজন, তেমনি ব্যক্তিগত চিন্তনেরও প্রয়োজন।

চতুর্দ্দশ অধ্যায়

গণিত শিক্ষক

(Mathematics Teacher)

একথা নিঃসন্দেহে বলা যেতে পারে যে গণিতে ছাত্রদের সাফল্য অনেকাংশে নির্ভর করে গণিত শিক্ষকের উপর। এর জন্য তাঁর কতকগুলি গুণ থাকা যেমন প্রয়োজন, তেমনি গণিত শিক্ষণ সম্বন্ধে কতকগুলি গুরুত্বপূর্ণ তথ্য জানাও তাঁর একান্ত প্রয়োজন। প্রথমে শিক্ষকের গুণাবলীর কথা আলোচনা করা যাক্ :—

প্রথমেই বলতে হয় শিক্ষকের বিষয়টি সম্বন্ধে যথেষ্ট পাণ্ডিত্য থাকবে। তাঁর নিজের জ্ঞানই যদি অসম্পূর্ণ হয়, তবে তিনি ছাত্রদের আর কি ক'রে জ্ঞান দান ক'রবেন ? তাছাড়া গণিত সম্বন্ধে নিত্য নূতন যে সমস্ত গবেষণা হ'চ্ছে, সেগুলির সঙ্গেও তাঁকে সুপরিচিত হ'তে হবে।

শিখনের বিভিন্ন পদ্ধতির সঙ্গে তার পরিচয় থাকবে। বিভিন্ন পরিস্থিতিতে বিভিন্ন পদ্ধতি ব্যবহার করার মত মানসিক প্রস্তুতিও তার থাকবে।

শিক্ষক সপ্রতিভ ও চট্‌পটে হবেন। ছাত্ররা কোন সমস্যা উপস্থিত ক'রলে দ্রুত মানসিক চিন্তনের সাহায্যে তার সমাধান করার মতো ক্ষমতা শিক্ষকের থাকবে।

শিক্ষক বিষয়টি সম্বন্ধে আগ্রহী ও উৎসাহী হবেন। এ প্রসঙ্গে Bagley বলেন, "Enthusiasm for one's work and devotion to the interest of the learner are qualities of the artist teacher for which there are no substitues".

শিশু মনোবিজ্ঞান সম্বন্ধে শিক্ষকের উপযুক্ত জ্ঞান থাকা বাঞ্ছনীয়।

শিক্ষক কখনও শ্রেণীতে প্রস্তুত না হ'য়ে যাবেন না। সম্ভব হ'লে প্রতি শ্রেণীর জন্য পাঠ-টীকা প্রস্তুত ক'রে যাবেন। অবশ্য প্রস্তুতি বলতে কেবল পাঠের জন্য প্রস্তুতিই নয়, পরিবর্তিত বা নূতন পরিস্থিতির সঙ্গে সঙ্গতিবিধান করার মত প্রস্তুতিও তাঁর থাকবে।

কর্ম-কেন্দ্রিক শিক্ষা পদ্ধতি ও আবিষ্কারক পদ্ধতিতে শিক্ষাদান করার ক্ষমতা তাঁর থাকবে। তিনি বক্তৃতা পদ্ধতি যতদূর সম্ভব কম ব্যবহার করবেন। তিনি ছাত্রদিগকে প্রশ্ন ক'রতে, আবিষ্কার ক'রতে ও স্বাধীনভাবে চিন্তা ক'রতে উৎসাহিত ক'রবেন।

শিক্ষক তাঁর পাঠদান কার্য্যে নির্ভুল ও নিয়মানুগ পদ্ধতিতে অগ্রসর হবেন। অবশ্য ভুল হ'লে সে ভুল স্বীকার ক'রে লওয়ার মতো মানসিক শক্তি শিক্ষকের থাকা উচিত।

বিভিন্ন ক্ষেত্র থেকে উপাদান সংগ্রহে ও উদ্ভাবনে শিক্ষকের বিশেষ দক্ষতা থাকবে (Resourcefulness).

শিক্ষক হবেন সহানুভূতিসম্পন্ন। ছাত্র যদি গণিতে অনগ্রসরও হয়, তবে তিনি তাঁর জন্য তাকে তিরস্কার ক'রবেন না। আবার ছাত্রের কৃতিত্বের জন্য উচ্ছ্বসিতভাবে প্রশংসাও ক'রবেন না।

বিভিন্ন বিষয়ের সঙ্গে এবং জীবনের সঙ্গে গণিতকে যুক্ত করার (correlation) মত ক্ষমতা শিক্ষকের থাকা উচিত।

শিক্ষকের বৈজ্ঞানিক সুলভ মনোভাব থাকা একান্ত বাঞ্ছনীয়। শিক্ষাদানের কাজ যাতে সহজ ও ফলপ্রসূ করা যায় তার জন্য শিক্ষক বিভিন্ন পরীক্ষা নিরীক্ষার আশ্রয় অবলম্বন ক'রবেন।

শিক্ষকের হাতের লেখাটি হবে সুন্দর ও স্পষ্ট। জ্যামিতিক চিত্র ইত্যাদি পরিষ্কারভাবে আঁকার ক্ষমতাও তাঁর থাকবে।

শিক্ষকের কণ্ঠস্বর হবে মিষ্ট ও উচ্চারণ ভঙ্গী হবে সংযত। শিক্ষকের হাসিমুখ শ্রেণীতে একটা সুন্দর ও সৌহার্দ্যপূর্ণ পরিবেশ সৃষ্টি ক'রবে।

শিক্ষক হবেন সহিষ্ণু ও ধৈর্য্যশীল। তাঁর কর্তব্য সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান থাকাও একান্ত প্রয়োজনীয়।

এক কথায় বলা যেতে পারে গণিতকে একটি জীবন্ত বিষয় হিসাবে গড়ে তুলে ছাত্রদের আগ্রহ বৃদ্ধি ক'রতে যে সমস্ত গুণাবলীর প্রয়োজন, একজন সুশিক্ষকের সে সমস্ত গুণাবলী থাকবে।

এবার তাঁর জ্ঞাতব্য তথ্য সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক্ :—

গণিত মুখস্থ করে মনে রাখার মতো বিষয় নয়। অভিজ্ঞতার মাধ্যমে গণিত সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা হয়। কোন্ কোন্ অভিজ্ঞতা এ বিষয়ে উপকারী, শিক্ষককে তা জানতে হবে। ছাত্রের কি কি অভিজ্ঞতা আছে তাও তাঁকে জানতে হবে। অর্থাৎ তিনি বিষয়টি যেমন জানবেন, ছাত্রকেও তেমনি জানবেন।

সকল শ্রেণীতে একই পদ্ধতিতে গণিতের পাঠ দেওয়া যায় না। বিভিন্ন শ্রেণীর উপযুক্ত পদ্ধতিগুলি তাঁকে জানতে হবে। এর জন্য ছাত্রের মানসিক বিকাশের সঙ্গে শিক্ষককে পরিচিত হ'তে হবে।

শিখন-পদ্ধতি উন্নত করলেই ছাত্ররা গণিতে দক্ষতা অর্জন করবে—এমন কোন কথা নেই। ছাত্রদের আগ্রহও জাগ্রত করতে হবে।

ছাত্রদের গণিতবোধে আগ্রহের অভাব বিষয়টির কাঠিন্যর জন্য নয়; সহানুভূতিশীল মনোভাবের অভাবের জন্যই ছাত্ররা বিষয়টি কঠিন বলে মনে করে।

শিক্ষক নিজের ব্যক্তিত্ব কখনই অবহেলা করবেন না। তিনি হাস্যরসিক হবেন ঠিকই, কিন্তু তাও নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে। (The student must laugh with the teacher but not at him).

সমস্যার সমাধানে শিক্ষক কেবলমাত্র ইঙ্গিত দেবেন। সমাধানের জন্য বাকী চিন্তা ছাত্ররাই করবে।

শিক্ষক গৃহকাজ দেবেন কম করে। গৃহকাজের সমস্যাগুলি যেন সুনির্বাচিত হয়। আবার গৃহকাজগুলি ঠিকমত সংশোধন করে দিতে হবে। গৃহকাজে ছাত্রদের আত্ম-বিশ্বাস ও আত্ম-নির্ভরতা বৃদ্ধি পায়।

আদর্শ গণিত শিক্ষক বিষয় ও ছাত্র, উভয়ের উপরই আস্থাশীল হবেন। তিনি ছাত্রদের নিকট খুব কম বা অত্যন্ত বেশী সাড়া প্রত্যাশা করবেন না।

বিষয়টি সম্বন্ধে পাণ্ডিত্য থাকলেই ভালো শিক্ষক হওয়া যায় না। পাঠদান পদ্ধতি তো জানতে হবেই, শিক্ষককে ছাত্রদের ভালোবাসতে হবে।

শিক্ষক বিষয়টির ক্রমবিকাশের ইতিহাসের সঙ্গে সুপরিচিত থাকবেন।

যেখানে সুযোগ পাওয়া যাবে শিক্ষক সেইখানেই প্রজেক্ট পদ্ধতি বা তার অনুরূপ কোন পদ্ধতি ব্যবহার করবেন। এতে ছাত্রদের আগ্রহও বাড়বে, আবার তাদের বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গীরও উন্মেষ ঘটবে।

পঞ্চদশ অধ্যায়

পরীক্ষা ও মূল্যায়ন

(Examination & Evaluation)

শিক্ষা পদ্ধতির সাফল্য নির্ণয়ের জন্য ও ছাত্রের উপলব্ধি পরীক্ষা করার জন্য নির্দিষ্ট সময়ের শেষে বিদ্যালয়গুলিতে পরীক্ষা গ্রহণ করা হয়। কিন্তু এই পরীক্ষার উদ্দেশ্য সব সময় সিদ্ধ হয় না। পরীক্ষাতে ছাত্রদের জ্ঞান বা দক্ষতা পরিমাপ করার বদলে তাদের মুখস্থ করার ক্ষমতা পরিমাপ করা হ'য়ে থাকে।

গতানুগতিক পরীক্ষা পদ্ধতির দোষ-ত্রুটি সম্বন্ধে শিক্ষাবিদ্‌রা অনেক আলোচনা ক'রেছেন। কিভাবে পরীক্ষা পদ্ধতিকে দোষ-মুক্ত করা যায়, সে বিষয়েও তারা বিভিন্ন সুচিন্তিত অভিমত প্রকাশ ক'রেছেন। সে সম্বন্ধে বিস্তারিত ভাবে আলোচনা করার কোন প্রয়োজন বর্তমান ক্ষেত্রে নেই। বর্তমান প্রসঙ্গে গণিতে নূতন পদ্ধতির নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন ও মূল্যায়ন সম্বন্ধে আলোচনা করা হ'ল।

পরীক্ষার ব্যাপক উদ্দেশ্য :—পরীক্ষার ব্যাপক উদ্দেশ্যগুলিকে মোটামুটি তিনটি ভাগে ভাগ করা হয়। প্রথমতঃ ছাত্রদের **জ্ঞান পরিমাপ করা** (Measurement); দ্বিতীয়তঃ ক্ষমতা অনুযায়ী ছাত্রদের **শ্রেণীবিভাগ করা** (Classification) এবং তৃতীয়তঃ ফলাফলের মাধ্যমে ছাত্রদের **প্রেষণা উদ্বুদ্ধ করা** (Motivation)। এ ছাড়া পরীক্ষার আরো কতকগুলি উদ্দেশ্য আছে ; যথা—শিক্ষকের আত্মসমালোচনার সুযোগ দান, ছাত্রদের ভবিষ্যত শিক্ষা-ব্যবস্থা সম্বন্ধে পূর্বাভাস দেওয়া, শ্রেণীর মান (গড়) নির্ণয় করা প্রভৃতি।

নৈর্ব্যক্তিক পরীক্ষা :—নৈর্ব্যক্তিক পরীক্ষাতে যে সমস্ত প্রশ্ন দেওয়া হয়, সেগুলির উত্তর সবসময় একই হয়। একই পরীক্ষক বিভিন্ন সময়ে বা বিভিন্ন পরীক্ষকের দেওয়া নম্বরও সব সময় অপরিবর্তনীয় থাকে। নিম্নে কয়েক জাতীয় প্রশ্ন সম্বন্ধে আলোচনা করা হ'ল :—প্রথমতঃ **মনে করা (Recall) জাতীয়** —

১। **প্রশ্ন আকারের :** (Question)

ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমষ্টি যদি 130° হয়, তবে তৃতীয় কোণটির পরিমাণ কত? বা পঞ্চভুজের কোন সমষ্টি কত?

২। **বিবৃতি আকারের :** (**Statement**) — দুইটি সংখ্যার যোগফল 14, উহাদের বর্গের অন্তরফল 28, সংখ্যা দুইটি কি কি?

৩। **উদ্দীপক শব্দ আকারের :** (**Stimulus word**)

গণিতে অবদান :—	গণিতবিদের নাম
১। Binomial Theorem :	১।
২। অতিভুজ^2 = অপর বাহু দুইটির বর্গের সমষ্টি	২।

৪। **শূন্যস্থান পূরণ আকারের :** (**Compietion**) — একটি সরলরেখার উপর আর একটি—— দণ্ডায়মান হইলে——কোন দুইটির সমষ্টি – —সমকোণ হয়।

দ্বিতীয়তঃ—**চিনতে পারা জাতীয় (Recognition)** —

১। **সত্য মিথ্যা জাতীয় বা হ্যাঁ-না জাতীয়** — (True false) or (Yes-no)

ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি তিন সমকোণ। সত্য/মিথ্যা

ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। হ্যাঁ/না

২। **বহু নির্বাচন জাতীয় :—** (**Multiple-choice**)

একটি ঘরের দৈর্ঘ্য 20′ এবং প্রস্থ 15′, ঘরটির ক্ষেত্রফল 150, 200, 250, 300 বঃ ফুট

10, 15, 20, 25, এবং 30 এর গড় হ'ল—20, 25, 22, কোনটিই নয়।

৩। **ঠিক ক'রে সাজান—**

(**Matching**)

স্তম্ভ I	স্তম্ভ 2
(i) 6×7	(i) πr^2
(ii) $35 \div 5$	(ii) $\frac{1}{4}$
(iii) $\frac{1}{3}$ of $\frac{3}{4}$	(iii) 90^0
(iv) A right angle	(iv) 42
(v) Area of circle.	(v) 7

৪। **সামঞ্জস্যের সন্ধান :—** (Similarity) — ত্রিভুজ, বৃত্ত $a^2 - b^2$, সমান্তরাল সরলরেখা

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, 1\frac{7}{8}, \frac{6}{7}$

তৃতীয়ত :—**অন্যান্য জাতীয় প্রশ্ন :—**

১। **সংখ্যা সারি পূরণ :—** (Number series) — 2, 4, 8, 16, —,—,

4, 9, 16, 25, —,—.

8, 4, 2, 1 —,—.

২। **বুদ্ধি-বাচক প্রশ্ন :—** (Intelligent questions) — একজন লোক যদি একঘণ্টায় বাড়ী থেকে ষ্টেশনে পৌঁছাতে পারে, তবে একই গতিবেগে চললে দশজন লোক কতক্ষণে ষ্টেশনে পৌঁছাবে।

□ একটি ছেলের ষোল বছরের মধ্যে মাত্র চারবার জন্মদিন পালন করা সম্ভব হ'য়েছে, অথচ কোন জন্মদিন বাদ যায় নি। তার জন্মদিন কবে ?

□ একজন লোকের 12′ লম্বা একটি ছড়ি আছে। সে যদি রোজ তার থেকে 1′ ক'রে কেটে বাদ দেয়, তবে কতদিন পরে তার কাটা শেষ হবে ?

প্রত্যেকটি প্রশ্নের নির্দ্দিষ্ট উদ্দেশ্য থাকা প্রয়োজন। লক্ষ্য রাখতে হবে, যেন প্রশ্নের সাহায্যে দক্ষতা (Skill) এবং ক্ষমতা (Power) উভয়ই পরিমাপ করা যায়। দক্ষতা বলতে সমাধানের ক্ষেত্রে গতি (speed) এবং যথার্থতা (accuracy) বোঝায়। ক্ষমতা বলতে বোঝায় ছাত্র কত কঠিন সমস্যার সমাধান ক'র ত পারে। অনেক সময় এইজন্য প্রশ্নগুলিকে গতির অভীক্ষা (Speed Test) এবং শক্তির অভীক্ষা (Power Test) এই দু'ভাগেও ভাগ করা হয়। তা ছাড়া ছাত্রদের দুর্বলতা নির্ণায়ক অভীক্ষা (Diagnostic Test) এবং পূর্বাভাসসূচক অভীক্ষাও (Prognostic Test) ব্যবহার করা হয়। নীচু শ্রেণীতে মৌখিক পরীক্ষা ব্যবহারে অনেক সুফল পাওয়া যায়।

মূল্যায়ন :—শিক্ষার ক্ষেত্রে মূল্যায়ন একটি নূতন শব্দ। মূল্যায়নের উদ্দেশ্য পরীক্ষার উদ্দেশ্য থেকেও আরো ব্যাপক। মূল্যায়ন শিশুর ব্যক্তিত্বের ক্রমপরিবর্তন ও শিক্ষার মূল উদ্দেশ্যগুলি পরিমাপ করে। শিক্ষাক্ষেত্রে গণিতের প্রয়োজনীয়তার ও গুরুত্বের কথা আগেই আলোচনা করা হ'য়েছে। গণিত শিক্ষার কতকগুলি বিশেষ উদ্দ্যেশ্যের কথাও বলা হ'য়েছে। এই উদ্দেশ্যগুলি কতদূর সফল হ'ল তা জানা দরকার। কেবলমাত্র পরীক্ষার সাহায্যে তা জানা যায় না। মূল্যায়নকে শিক্ষা-প্রক্রিয়ার একটি অবিচ্ছেদ্য অংশ বলা যেতে পারে।

গণিতে মূল্যায়ন কিন্তু একটু বিশেষ ধরণের। এর কারণ হ'ল বিষয়টির বৈশিষ্ট্য।

গণিত একটি অমূর্ত্ত বিষয়। বিশেষ ভাবে যত্ন না নিলে শ্রেণীতে পাঠদানের মাধ্যমে গণিত শিখনের উদ্দেশ্য সফল নাও হ'তে পারে। কাজেই ছাত্ররা উদ্দেশ্যের পথে কতটা এগিয়েছে তা জানার জন্য, পাঠদান পদ্ধতির সাফল্য-অসাফল্য নির্ণয় করার জন্য এবং ছাত্রদের বিশেষ বিশেষ অধ্যায়ে দুর্বলতা নির্ণয় করার জন্য মূল্যায়নের প্রয়োজন। মূল্যায়নের জন্য যে সমস্ত পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়, সেগুলি হ'ল—

(ক) দৈনন্দিন জীবনে গণিতের প্রাথমিক নিয়ম চারটির প্রয়োগ,

(খ) পূর্ণ রাশি, ভগ্নাংশ এবং দশমিকের ব্যবহার,

(গ) গণিতের পদ, ধারণা ও প্রতীক সম্বন্ধে জ্ঞান ও উপলব্ধি,

(ঘ) বিচারকরণের সাহায্যে সমস্যার সমাধান।

গণিতে মূল্যায়নের উপায়—লিখিত পরীক্ষা, মৌখিক পরীক্ষা, হাতে কলমে শিক্ষা, প্রশ্নাবলী, শ্রেণীর কাজ ও গৃহকাজ পরীক্ষা, রেকর্ড ও ডায়েরী, দুর্বলতা নির্ণায়ক অভীক্ষা, বুদ্ধির অভীক্ষা, গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগ প্রভৃতি হ'ল গণিতে মূল্যায়নের উপায়।

ভারতবর্ষের মতো দেশে গণিতে মূল্যায়ণের অত্যন্ত প্রয়োজন আছে। এ ব্যাপারে এখনও বিজ্ঞানসম্মত গবেষণার প্রয়োজন। ভাষার কাঠিন্য, উঁচু শ্রেণীতে বিদেশী ভাষার মাধ্যমে গণিত শিক্ষা, বাস্তব অভিজ্ঞতার অভাব প্রভৃতি কারণের জন্য মূল্যায়নের অত্যন্ত অসুবিধা হয়। পরীক্ষা পদ্ধতিকে আমরা এখনই বিদায় জানাতে পারছি না। মূল্যায়নের বিভিন্ন কলা কৌশলও এখনই আয়ত্ত ক'রতে পারছি না। তাই পরীক্ষা পদ্ধতির কিছুটা সংস্কার ক'রে আর মূল্যায়নের কয়েকটি কৌশল অবলম্বন ক'রে সুফল পাওয়া যেতে পারে। বৎসরের শেষে একটি পরীক্ষার ফলের উপর নির্ভর না করে থেকে বিভিন্ন সময়ে পরীক্ষা গ্রহণ ক'রে তার ফলাভলের ভিত্তিতে মতামত গড়ে তুলতে হবে। নম্বর দানের পদ্ধতিরও পরিবর্তন ক'রতে হবে। সাংখ্যমানের বদলে 'পয়েন্ট-স্কেল' (A,B, C, D, E) ছাত্রদের কৃতিত্বের মূল্যায়ন ক'রলে ভালো হয়।

ষোড়শ অধ্যায়

অঙ্ক শিক্ষার উদ্দেশ্য

(Aims of Teaching Arithmetic)

আমরা সুবিধার জন্য গণিতকে তিনটি শাখায় বিভক্ত করেছি। সেগুলি হ'ল পাটিগণিত বা অঙ্ক, বীজগণিত এবং জ্যামিতি। পরবর্তী কালে ত্রিকোণমিতি, পরিমিতি ইত্যাদি বিভিন্ন শাখার উদ্ভব হ'য়েছে ঠিকই, কিন্তু সেগুলি জ্যামিতি বা বীজগণিতের উপবিভাগ মাত্র। অঙ্ককে বলা হয় সংখ্যার বিজ্ঞান এবং হিসাবের শাস্ত্র (Science of numbers and art of computation)। ইংরেজদের মতে অঙ্ক হ'ল তর্কশাস্ত্রের মত একটি বিষয়, আবার আমেরিকানদের মতে—এ হ'ল একজাতীয় অভ্যাসমূলক বিষয়। সার্থক জীবন-যাপনের জন্য অঙ্ক চর্চা করা অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। গণিত শিক্ষার উদ্দেশ্য এবং উপকারিতা যে রকম, অঙ্ক শিক্ষার উদ্দেশ্য ও উপকারিতাও ঠিক সেই রকমই। অঙ্ক শিক্ষার উদ্দেশ্যকে আমরা এককথায় এই বলে বর্ণনা ক'রতে পারি যে, কতকগুলি বিশেষ চিন্তাধারা অনুধাবন করা, তাতে দক্ষতা অর্জন করা এবং সেই দক্ষতা বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করা। আমরা আগেই দেখেছি গণিত এমন একটি বিষয় যা সর্বস্তরের, সর্বদেশের লোকই কোন না কোন ভাবে ব্যবহার ক'রছে। এখন দেখা যাক্ অঙ্ক শিক্ষার উদ্দেশ্যগুলি কি কি! অঙ্ক শিক্ষার উদ্দেশ্যগুলিকেও তিন ভাগে ভাগ করা যায়।—

(১) **ব্যবহারিক** (Utilitarian), (২) **কৃষ্টিমূলক** (Cultural) **এবং** (৩) **শৃঙ্খলামূলক** (Disciplinary).

ব্যবহারিক উদ্দেশ্য :—অঙ্কের ব্যবহারিক মূল্য অত্যন্ত বেশী। এই জন্যই যে পাঠক্রমে তার স্থান সর্বাগ্রে এ কথা সকলেই স্বীকার করেন। পাঠক্রম যদি সুনির্বাচিত হয়, তবে তার মাধ্যমে ছাত্ররা অর্থ নৈতিক, সামাজিক, নৈতিক, সৌন্দর্য্যবোধমূলক ইত্যাদি বিভিন্ন ধারণার সঙ্গে পরিচিত হ'তে পারবে। অঙ্ক প্রত্যেকেই ব্যবহার করে থাকেন। কেবলমাত্র নির্বাচিত হিসাব পত্রই গণিতের একমাত্র প্রয়োগস্থল নয় (যেমন বিল তৈরী করা, ক্যাশবই রাখা ইত্যাদি)। সুদক্ষ যন্ত্রবিদ্, কৃষক, ছুতার মিস্ত্রী, রাজমিস্ত্রী, নাপিত, ব্যবসায়ী, সুদক্ষ গৃহকর্ত্রী সকলেরই অঙ্ক সম্বন্ধে জ্ঞান থাকা একান্ত প্রয়োজনীয়। Lindquist এর মতে প্রত্যেক

লোকেরই অঙ্কের উপর দখল থাকা দরকার। আমাদের দৈনন্দিন জীবনের সাধারণ কাজগুলিতেও অঙ্কের বিভিন্ন প্রক্রিয়া যথা যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ ইত্যাদি প্রয়োগ ক'রে থাকি।

কৃষ্টিমূলক উদ্দেশ্য :—অঙ্কের কৃষ্টিমূলক উদ্দেশ্যও কিছু কম নয়, মানব জীবন, তার প্রাকৃতিক পরিবেশ, বিভিন্ন বৃত্তি ও পেশার ক্রমোন্নতি, অন্যান্য বিজ্ঞান বিষয়ের অগ্রগতি ইত্যাদির সঙ্গে অঙ্কের সম্বন্ধ নির্ণয়ের মধ্যেই অঙ্কের কৃষ্টিমূলক উদ্দেশ্য নিহিত থাকে। চরম ও পরম সত্যের সঙ্গে অঙ্ক সম্বন্ধ স্থাপন ক'রে দেয়। যেখানে কোন বিশেষ যুক্তি বিশ্লেষণ ক'রতে হয়, সেখানেও অঙ্ক সাহায্য করে। আর আমাদের বহুদূর প্রসারিত কর্মক্ষেত্রে প্রয়োগ করার জন্য যে সমস্ত বিচিত্র অভ্যাস অর্জন করা প্রয়োজন, অঙ্ক সে সমস্ত অভ্যাস গঠনে আমাদের সাহায্য করে।

শৃঙ্খলামূলক উদ্দেশ্য :—অঙ্ক মানসিক শৃঙ্খলা আনয়নে সাহায্য করে। অঙ্কের একটি প্রকৃত শৃঙ্খলামূলক মূল্য আছে। অঙ্কের সত্য চরম সত্য। অঙ্ক হয় নির্ভুল হবে নয়তে ভুল হবে, ভুল ও নির্ভুলের মাঝামাঝি কিছু হবার কোন সম্ভাবনা নেই। অঙ্ক হ'ল একটি খাঁটি বিজ্ঞান এবং যিনি অঙ্ক চর্চা করেন, ধরে নেওয়া যেতে পারে তিনি একজন খাঁটি লোক হবেন। অঙ্কের চর্চার ফলে বিচারের ক্ষমতা, মনোনিবেশ ও অমূর্ত্ত চিন্তা করার ক্ষমতা বৃদ্ধি পায়। তা'হলে দেখা যাচ্ছে, অঙ্ক এমন একটি বিষয়, যার সাহায্যে আমাদের অজ্ঞানতা দূর হ'চ্ছে, আবার আমরা অনেক প্রয়োজনীয় তথ্যও আহরণ ক'রতে পারছি। এর চর্চার ফলে আমাদের বুদ্ধিবৃত্তিগুলি তীক্ষ্ণ হয়, মানসিক দিগন্ত বিস্তৃত হয় এবং যুক্তিযুক্ত ভাবে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান ক'রতে আমাদের কোন কষ্ট হয় না। এক কথায় বুদ্ধিমান ও যোগ্য নাগরিক হয়ে উঠতে হ'লে অঙ্ক চর্চা ক'রতেই হবে।

শিক্ষক যখন শ্রেণীতে গণিত শিক্ষা দেন, তখন তাঁর সামনে কতকগুলি লক্ষ্য থাকে। অঙ্ক শিক্ষা দেবার লক্ষ্যগুলি সংক্ষেপে বলা যেতে পারে :—

(১) গাণিতিক চিন্তাধারার সঙ্গে ছাত্রদের পরিচিত করা, অঙ্কের সমস্যা গুলি হৃদয়ঙ্গম করা, সেগুলি বিশ্লেষণ করা এবং সঠিক সমাধানে উপনীত হওয়া।

(২) ছাত্রের চারদিকে যে পৃথিবী, তার পরিমানমূলক দিকটি সম্বন্ধে তাকে আগ্রহী করা।

(৩) মূল প্রক্রিয়াগুলির সহজ প্রয়োগে ছাত্রকে সুযোগ দেওয়া এবং সেগুলি যাতে নির্ভুল হয় তার শিক্ষা দেওয়া।

(৪) বাস্তব জীবনে অঙ্কের বিভিন্ন সমস্যাগুলি প্রয়োগ করার শিক্ষা দেওয়া।

(৫) অঙ্কে উচ্চতর শিক্ষা যাতে ছাত্র গ্রহণ ক'রতে পারে তার জন্য তাকে তৈরী করা।

এই আলোচনা থেকে আমরা দেখতে পেলাম অঙ্ক শিক্ষা দেবার আগে অঙ্ক শিক্ষার উদ্দেশ্য সম্বন্ধে শিক্ষকের একটা পরিষ্কার ধারণা থাকা বাঞ্ছনীয়। তাঁর প্রথম কাজই হ'ল ছাত্রদিগকে গণিতের ধারায় চিন্তা ক'রতে শিক্ষা দেওয়া। ছাত্র যাতে সঠিক ভাবে অঙ্কের বিভিন্ন সমস্যাগুলি সমাধান ক'রতে পারে, অঙ্কের বিভিন্ন প্রক্রিয়াগুলি সুষ্ঠু ভাবে প্রয়োগ ক'রতে পারে সে বিষয়ে শিক্ষক বিশেষ লক্ষ্য রাখবেন। ছাত্রের চারদিকের জগতের যে পরিমানমূলক দিক আছে, সেদিকে তার আগ্রহ সৃষ্টি ক'রতে হবে। কি ভাবে অঙ্ককে কার্য্যকরী ভাবে প্রয়োগ করা যেতে পারে, সেই রকম কয়েকটি কৌশল তাকে শিক্ষা দিতে হবে। ছাত্র যাতে ভবিষ্যতে গণিত সম্বন্ধে আরো বেশী করে জানতে চায়, তাকে সেইরকম ভাবে তৈরী ক'রতে হবে। মনে রাখতে হবে যে, বিদ্যালয়ে অঙ্ক শিক্ষার উদ্দেশ্য কেবলমাত্র নিছক জ্ঞান আহরণ করা বা কতকগুলি বিশেষ নিয়ম আয়ত্ত করা বা মনের শৃঙ্খলার সাহায্য করা নয়, আসল উদ্দেশ্য হচ্ছে শিক্ষার্থীর মনে অঙ্ক সম্বন্ধে প্রকৃত আগ্রহের সৃষ্টি করা এবং অঙ্ক সম্বন্ধে আরো বেশী করে জানবার জন্য ছাত্রের ঔৎসুক্য বৃদ্ধি করা।

অঙ্ক শিক্ষার বিভিন্ন পর্য্যায় :—জ্ঞান অবিচ্ছিন্ন। বিদ্যালয়ে আসার অনেক আগে থেকেই শিশু অঙ্ক সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করে থাকে। কম-বেশী, বড়-ছোট, ভারী-হাল্কা এ সমস্ত ধারণা সে নিজের অভিজ্ঞতা থেকেই অর্জন করে থাকে। এর জন্য তাকে মা-বাবা বা শিক্ষক শিক্ষয়িত্রীর উপর নির্ভর করতে হয় না। কাজেই দেখা যাচ্ছে—জীবন-ভিত্তিক বাস্তব অভিজ্ঞতার মাধ্যমে 'অঙ্ক শিক্ষা দেওয়াটাই হচ্ছে সহজ ও স্বাভাবিক উপায়।

অঙ্কের ইতিহাস পর্য্যালোচনা ক'রলে দেখা যায় অঙ্কের সৃষ্টি হয়েছে মানব-সমাজের বিভিন্ন প্রয়োজনের চাহিদা মেটাতে। সভ্যতার আদি অবস্থাতেও মানুষকে কতকগুলি বিশেষ উদ্দেশ্য সাধন ক'রতে হ'ত। তার জন্য তারা দাগ কেটে হিসাব রাখতো, নুড়ির সাহায্যে হিসাব মিলাতো, তুলনা ক'রত, গণনা ক'রত, একই প্রকার জিনিসকে দলভুক্ত ক'রতে পারতো। এ সমস্ত দেখে আমরা বলতে পারি সভ্যতার আদি অবস্থাতে মানুষ যে কেবল অঙ্ক আবিষ্কারই করেছে তা নয়, তারা অঙ্কের ভিতর দিয়েজীবন যাপন ক'রে গেছে। অঙ্ক ও জীবন এই দু'টিকে তারা সার্থক-ভাবে যুক্ত ক'রতে পেরেছিল। অঙ্ককে তারা নিজেদের সেবায় ব্যবহার করেছিল। যখন মানুষের জিনিসের পরিমান বুঝবার জন্য এককের প্রয়োজন হ'ল তখন সে সুবিধামত

একটি একক খুজে নিল। এইভাবে সে একখণ্ড পাথর, এক কলস জল বা নিজের হাতকেও একক হিসাবে ব্যবহার করতে শিখল। আবার কোন জিনিসের অস্তিত্বের অভাবকে 'শূন্য' দিয়ে প্রকাশ করার কৌশলটিও আবিষ্কার ক'রল। এই আবিষ্কারগুলি কিন্তু আকস্মিক নয়। এর উদ্ভব ও বিকাশে যথেষ্ট সময় লেগেছে।

সমাজ তথা সামাজিক প্রতিষ্ঠানগুলির উপরও অঙ্কের প্রভাব অপরিসীম। শোনা যায় জ্যোতির্বিদ্যার চর্চা প্রথম শুরু হয় ব্যাবিলন দেশে। জরিপের কাজ আরম্ভ হয় মিশর দেশে নীল নদীর তীরে। অঙ্ক সম্বন্ধে ব্যাপক চর্চা করা হ'তো ধর্মীয় প্রতিষ্ঠান-গুলিতে এবং ধর্মযাজকরাই ছিলেন এ ব্যাপরে পথপ্রদর্শক। এদের গবেষণার ফলেই নানাপ্রকার সংখ্যার সৃষ্টি হ'য়েছে। এই সমস্ত সংখ্যার সাহায্যে বিভিন্ন জাতীয় হিসাব লিপিবদ্ধ করা সম্ভব। পরবর্তীকালে এই সমস্ত সংখ্যার সাহায্যে পঞ্জিকা সৃষ্টি করা, বিভিন্ন জাতীয় মুদ্রার প্রচলন করা, ব্যবসা বাণিজ্যের উন্নতি করা, বিভিন্ন প্রকার কর ধার্য্য করা প্রভৃতি সম্ভব হ'য়েছে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে সমাজের উন্নতি বিধানে গণিতের ভূমিকা বেশ গুরুত্বপূর্ণ। বর্তমানের অটোমেশনের যুগে এই গুরুত্ব আরো বৃদ্ধি পেয়েছে। অঙ্ক যেমন সমাজের উপর প্রভাব বিস্তার করে, সমাজও তেমনি অঙ্কের উপর তার নিজস্ব প্রভাব বিস্তার ক'রে থাকে। অঙ্ক বলতে আমরা দু'রকম জিনিস বুঝে থাকি। সাধারণভাবে অঙ্ক বলতে কতকগুলি নিয়মের সমষ্টিকে বুঝায়। অঙ্কের আর একটি অর্থ হ'ল—কতকগুলি পদ, প্রতিজ্ঞা, যুক্তি ইত্যাদির সমন্বয়ে সুসংগঠিত একটি জিনিস। সমাজের দৃষ্টিভঙ্গীর পার্থক্য অনুযায়ী অঙ্ক সম্বন্ধে ধারণাও পৃথক পৃথক হয়। ব্যবসায়িক ক্ষেত্রে অঙ্ক বলতে নিয়মের সমষ্টিকেই বুঝায়। কিন্তু সমাজের সকলেই অঙ্কের এই অর্থটি গ্রহণ ক'রতেন না। প্রাচীন যুগে গ্রীক্ বা রোমান সমাজে এক সময় শারীরিক পরিশ্রমকে হীন চক্ষে দেখা হ'ত। তখন সমাজে দার্শনিকদের প্রভাব ছিল অত্যন্ত বেশী। তাঁরা সংখ্যা সম্বন্ধে গবেষণা ক'রে এর রহস্য উদ্ঘাটিত করার চেষ্টা করেন। এরা অবশ্য সংখ্যার লক্ষ্য যে কেবলমাত্র সমাজ সেবা, তা স্বীকার ক'রতেন না। সংখ্যার আরো উচ্চতর লক্ষ্যের কথা তারা চিন্তা ক'রতেন। শূন্য কি? এর অর্থ কি? শূন্য একটি সংখ্যা কি না। এ সমস্ত প্রশ্নের সঠিক উত্তর নির্ণয় ক'রতে পেরেছেন হিন্দু দার্শনিকেরা। গ্রীকরা অবশ্য চেষ্টা ক'রেছিলেন, কিন্তু পারেন নি। ধর্ম ও দর্শন—এই দুই শাস্ত্রের সহায়তায় হিন্দু দার্শনিকেরা শূন্য সম্বন্ধে পৃথিবীতে যে ধারণা রেখে গেলেন, তার জন্য তাঁরা চিরস্মরণীয় হ'য়ে থা'কবেন। তাহ'লে দেখা যাচ্ছে—অঙ্ক যেমন সমাজের উন্নতিকল্পে সাহায্য ক'রেছে, সমাজও তেমনি বিভিন্ন যুগে অঙ্ককে উত্তরোত্তর উন্নতির পথে এগিয়ে নিয়ে গেছে। সমাজ ও অঙ্ক, পরস্পর

পরস্পরের সঙ্গে জড়িত। সমাজের কর্মপ্রবাহের সঙ্গে অঙ্কের চিন্তাধারার একটা সাদৃশ্য আছে। ছাত্র যেন বুঝতে পারে অঙ্কশিক্ষা জীবন থেকে বিচ্ছিন্ন কিছু নয়।

শ্রেণীতে অঙ্কশিক্ষা কার্যকরী ক'রতে হ'লে তিনটি প্রধান বিষয়ের প্রতি লক্ষ্য রাখতে হবে। সেগুলি হ'ল—(১) শিক্ষার্থীর আগ্রহ বা প্রেষণা, (২) শিক্ষার্থীর ক্ষমতা এবং (৩) শিক্ষার্থীর চাহিদা বা প্রয়োজনবোধে শিক্ষার্থীর আগ্রহ স্থির থাকে না; বিভিন্ন সময়ে তার আগ্রহের বিষয়বস্তুও ভিন্ন ভিন্ন হয়। বিদ্যালয়ের প্রাথমিক স্তরের ছেলেমেয়েদের স্বাভাবিক আগ্রহ দেখা যায় কাজে। তারা কাজ ক'রতে ভালোবাসে, কাজের মধ্যে আনন্দ পায়। সেইজন্য এই স্তরে কাজের ভিতর দিয়ে শিক্ষা দিলে সে অঙ্কে স্বভাবতই আগ্রহ বোধ ক'রবে। শিক্ষক কেবল ছাত্রকে নূতন কর্মক্ষেত্রের ইঙ্গিত দিবেন যার মাধ্যমে সে অঙ্কের জ্ঞান অর্জন ক'রতে পারবে। মনোযোগ দিয়ে কাজ ক'রলে সে কাজের উদ্দেশ্য, প্রয়োজনীয়তা ও ব্যবহারিক মূল্যটিও বুঝতে পারবে। অঙ্ক তখন আর তার নিকট একটি নীরস বিষয় বলে মনে হবে না। সে নিজে পরীক্ষা ক'রে তার ব্যক্তিগত অভিজ্ঞতা থেকে জ্ঞান সঞ্চয় ক'রছে বলে ঐ জ্ঞান বেশ পাকা হ'য়ে উঠবে। আগেই বলেছি শিক্ষার্থীর চারদিকে সুদূর প্রসারিত বিচিত্র কর্মপ্রবাহ র'য়েছে সে তাতে সক্রিয় অংশ গ্রহণ ক'রবে। বাস্তব জীবনের অভিজ্ঞতার মাধ্যমেই শিক্ষার্থী জ্ঞান লাভ ক'রবে। শিক্ষকের ভূমিকা হবে বন্ধু, দার্শনিক এবং পথপ্রদর্শকের। শিশু যত বড় হবে ততই তার আগ্রহের বিষয়বস্তুও পৃথক হবে। কর্মভিত্তিক জ্ঞানলাভ থেকে তার মন ধীরে ধীরে উচ্চ-চিন্তা-ভিত্তিক জ্ঞান লাভের জন্য উন্মুখ হবে। সুশিক্ষক ঐ সুযোগের পূরোপুরি সদ্ব্যবহার ক'রবেন। এইভাবে সরল থেকে জটিল, মূর্ত্ত থেকে অমূর্ত্ত জ্ঞানের পথে এগিয়ে যেতে হবে। আগ্রহ আবার অনেক ক্ষেত্রেই ক্ষমতার উপর নির্ভরশীল। শিক্ষার্থীরা নিজ নিজ ক্ষমতা অনুযায়ী এগিয়ে চলে। সকলেই যে সমান গতিতে এগিয়ে যাবে, একইভাবে নূতন জ্ঞান অর্জন ক'রবে তা আশা করা ভুল। প্রত্যেক শিক্ষার্থী যেন নিজ নিজ ক্ষমতা অনুযায়ী এগিয়ে যেতে পারে, সে বিষয়ে লক্ষ্য রাখতে হবে এবং শিক্ষার্থীকে তার সুযোগও দিতে হবে। এরপর আসে শিক্ষার্থীর চাহিদা বা প্রয়োজনবোধের কথা। এই চাহিদা অনেকাংশে বাস্তব জীবনের অভিজ্ঞতার উপর ভিত্তি ক'রেই স্থিরীকৃত হয়। সে নিজের প্রয়োজনে গণনা ক'রতে চায়, হিসাব ক'রতে চায়, তুলনা ক'রতে চায়। অঙ্ক শেখার তাগিদ সে নিজের অন্তর থেকেই অনুভব করে। ঠিক তখনই অঙ্ক শিক্ষা দিতে শুরু ক'রলে সুফল পাওয়া যায়। যতক্ষণ না শিশু অঙ্ক শিক্ষার প্রয়োজনীয়তা বুঝতে পারছে ততক্ষণ তার অঙ্কের জ্ঞান সম্পূর্ণ হবে না। অঙ্কের শিক্ষাদান পদ্ধতিও বিভিন্ন স্তর অনুযায়ী বিভিন্ন হওয়া

বাঞ্ছনীয়। শিক্ষককে মনে রাখতে হবে শৈশবকাল হ'ল কাজ করার সময়, কৈশোর হ'ল অনুসন্ধিৎসার সময় এবং পরিণত বয়স হ'ল অঙ্কের নীতিগুলি প্রয়োগ করার সময় (সৃষ্টিমূলক)। গণিতের পাঠক্রমও বিভিন্ন স্তর অনুযায়ী বিভিন্ন হওয়া বাঞ্ছনীয়। একটি কথা এই প্রসঙ্গে মনে রাখতে হবে যে, প্রাথমিক অবস্থাতে শিশুকে যে শিক্ষা দেওয়া হয় তা চিরস্থায়ী হ'য়ে থাকে। এই সময় তাকে কোন ত্রুটীপূর্ণ তথ্য শিক্ষা দিলে পরবর্তীকালে সে ঐ ত্রুটীপূর্ণ তথ্যকেই সত্য বলে ধরে নেয়। তাছাড়া কোনটা ঠিক আর কোনটা ভুল তা বিচার করার মত ক্ষমতাও তখন তার থাকে না। কাজেই প্রাথমিক স্তরে যাতে নির্ভুল ভাবে পাঠদান করা হয় সে বিষয়ে বিশেষ যত্ন নিতে হবে।

অঙ্কে কতকগুলি বিশেষ ধারণা বা একক সম্বন্ধে শিক্ষাদান :— অঙ্কে কতকগুলি বিশেষ ধারণা সম্বন্ধে প্রথমেই ছাত্রদের শিক্ষা দিতে হয়। এ ধারণাগুলিকে অঙ্কশিক্ষার 'প্রবেশ দ্বার' বলা যেতে পারে। অঙ্কের মূলে রয়েছে সংখ্যা (Number)। অঙ্ক শিখতে গেলে প্রথমেই ছাত্রদের সংখ্যা সম্বন্ধে একটা জ্ঞান অর্জন ক'রতে হয়। সংখ্যা কতকগুলি অর্থহীন শব্দমাত্র নয়। এর পেছনে একটা জীবন্ত সত্য আছে। শিক্ষার্থীকে এই সম্বন্ধে একটা পরিষ্কার ধারণা জন্মাবার শিক্ষা দিতে হবে। অঙ্কের কোন বিষয়ের ধারণা দিতে হ'লে বা কোন নূতন নিয়ম শেখাতে হ'লে চারটি বিভিন্ন স্তরের ভেতর দিয়ে অগ্রসর হ'তে হয়। সেই স্তর চারটি হ'ল :— (১) দৈনন্দিন জীবনের বাস্তব অভিজ্ঞতা ও সেই সম্বন্ধে বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে, (২) মূর্ত্ত জিনিস ব্যবহার ক'রে, (৩) অমূর্ত্ত সংখ্যার চর্চার মাধ্যমে এবং (৪) অঙ্কের নিয়ম প্রয়োগ ক'রে সমস্যামূলক অঙ্কের সমাধান করে। যেহেতু অঙ্ক শিক্ষার প্রথম স্তরই হ'ল সংখ্যাজ্ঞান, (Number Concept), সেইজন্য কি ভাবে ও কোন্ কোন্ কাজের মাধ্যমে ছাত্রদের সংখ্যাজ্ঞান হ'তে পারে, সে সম্বন্ধে প্রথমেই আলোচনা করা হ'ল।

সংখ্যাজ্ঞান :—সংখ্যাজ্ঞান হ'ল গণিতে সবচেয়ে প্রয়োজনীয় জিনিস। সংখ্যাজ্ঞান শিক্ষা দিতে হ'লে মূর্ত্ত জিনিসের সহায়তায় এবং বাস্তব ও উদ্দেশ্যমূলক অভিজ্ঞতার মাধ্যমে অগ্রসর হ'তে হবে। শিশুরা গণনা ক'রতে শিখবে, মাপ ক'রতে শিখবে, পরিমাণ নির্ণয় ক'রতে শিখবে, আর ঐ সবের মাধ্যমে সে সংখ্যা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন ক'রবে। মুখস্ত বিদ্যার সাহায্যে সংখ্যাজ্ঞান সম্ভব হয় না।

সংখ্যা সম্বন্ধে শিশুদের জ্ঞান সুস্পষ্ট ক'রতে হ'লে তাদের কয়েকটি স্তরের ভিতর দিয়ে নিয়ে যেতে হবে। সেগুলি হ'ল :—

(১) **বস্তু-নির্ভর স্তর** (Object stage) :—এই স্তরে শিশু বাস্তব কোন জিনিস গণনা ক'রবে বা মাপ ক'রবে। মার্বেল, মুদ্রা, তকলী প্রভৃতি গণনা করা এই স্তরের অন্তর্ভুক্ত।

(২) **চিত্র-নির্ভর স্তর** (Picture Stage) ছাত্র যখন বাস্তব জিনিস নিয়ে গণনা ক'রতে শিখে যায়, তখন বাস্তব জিনিসের সাহায্য ছাড়া তাকে গণনা ক'রতে শিক্ষা দেওয়া হয়। ছবির মাধ্যমে প্রকাশিত সংখ্যার তালিকা বা সংখ্যা সম্বন্ধীয় পুস্তকের সাহায্যে তাকে শিক্ষা দেওয়া হয়। ছবিতে কটা জিনিস আছে? কত রকমের জিনিস আছে? এই সমস্ত শিক্ষার মাধ্যমে সে সংখ্যা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করে।

(৩) **অর্দ্ধ-মূর্ত্ত স্তর** (Semi-Concrete Stage) :—এই স্তরে চিত্র নির্ভর স্তরের মত প্রকৃত চিত্র থাকে না। সংখ্যাগুলি চিত্রের বদলে বিন্দু, রেখা, বৃত্ত প্রভৃতির মাধ্যমে প্রকাশিত হয়। ঐ সমস্ত অর্দ্ধ-মূর্ত্ত জিনিস গণনার মাধ্যমে ছাত্র সংখ্যা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন ক'রতে পারে।

(৪) **অমূর্ত্ত-প্রতীক স্তর** (Abstract Symbol Stage) :—এই স্তরে ছাত্রদের সংখ্যা সম্বন্ধে অমূর্ত্ত জ্ঞান অর্জিত হয় বিভিন্ন প্রতীকের মাধ্যমে। যখন সে "পাঁচ" শব্দটি ব্যবহার ক'রবে তখন "পাঁচ" সম্বন্ধে একটা পরিষ্কার ধারণাও তাকে অর্জন ক'রে নিতে হবে। পাঁচ একটি প্রতীক মাত্র। এই প্রতীককে মূল ধারণার সঙ্গে যুক্ত ক'রে নিতে হবে।

সংখ্যা বলতে কি বুঝায়, সে বিষয়ে বহু বিভিন্ন মতামত আছে। কেউ বলেন সংখ্যা বলতে জিনিস বুঝায় (কয়টি ইত্যাদি) ; আবার কেউ বলেন সংখ্যা হ'ল জিনিসের গুণ (quality) যা জিনিসটি হ'তে পৃথক অথচ জিনিসের মধ্যেই প্রকাশিত ; আবার কেউ বলেন সংখ্যা হ'ল একটি মানসিক প্রক্রিয়া (Mclellan and Dewey) অন্য কেউ বলেন সংখ্যা হ'ল একটা প্রতীক ("a locution and a Sign"—Laisant —Lemoine) । যাই হোক্ সংখ্যা যে কোন মূর্ত্ত জিনিসের পরিমাণগত ও গুণগত প্রতীক, সে বিষয়ে কোন সন্দেহ নাই।

শিশুদের সংখ্যাগুলি লিখতে হবে ও পড়তে হবে। এর জন্য তাদের নিয়মিত ও ক্রমবর্দ্ধমান চর্চার প্রয়োজন। লিখবার ও পড়বার জন্য যে সংখ্যাগুলি নেওয়া হবে, সেগুলি যেন খুব বড় না হয় কারণ সে ক্ষেত্রে ঐ সমস্ত সংখ্যা তাদের বোধগম্য না হ'তেও পারে। এই প্রসঙ্গে একটি নীতির কথা মনে রাখতে হবে। সেটি হ'ল Educate the Children with numbers in Children's Size.

বিভিন্ন কাজের ভিতর দিয়ে ছাত্রদের সংখ্যাজ্ঞান হ'তে পারে। কতকগুলি কাজের উল্লেখ করা হ'ল ঃ—বইএর পাতা গোনা, স্কুলের ঘণ্টার শব্দ গোনা বা ঘড়ির আওয়াজ গোনা, শ্রেণীর ছাত্র ছাত্রীদের গণনা ক'রে উপস্থিত অনুপস্থিতের সংখ্যা নির্ণয় করা, টাকা-পয়সা গণনা করা, উচ্চতা, ওজন ইত্যাদি নির্ণয় করা, গল্প ও ছড়া (হারাধনের দশটি ছেলে ইত্যাদি জাতীয়), নানারকম খেলা যেমন দড়ি লাফানো, বল লাফানো প্রভৃতি।

ছাত্রদের অভিজ্ঞতাকে আমরা দু'ভাগে ভাগ ক'রতে পারি। এক হ'চ্ছে জীবনের সত্য অভিজ্ঞতা যা তারা বাস্তব জীবনে অর্জন ক'রে থাকে বিভিন্ন কাজের মাধ্যমে। আর এক হ'চ্ছে সত্য অভিজ্ঞতা নকল ক'রে তার অনুরূপ অভিজ্ঞতা। এগুলি সাধারণতঃ কল্পনামূলক খেলার (Make-believe play) মাধ্যমে অর্জিত হয়। বিদ্যালয়ে দোকান-দোকান খেলা, বাস-বাস খেলা, পোষ্ট অফিস করা, মুদীর দোকান ইত্যাদি খেলাগুলি এই পর্যায়ের। সংখ্যা সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে হ'লে সত্যকারের অভিজ্ঞতা এবং নকল অভিজ্ঞতা দু'রকম অভিজ্ঞতারই আশ্রয় নিতে হবে। শিশুরা মূর্ত্ত জিনিস নিয়ে খেলার মাধ্যমেই হোক্ আর অন্য কোন ভাবেই হোক্ সংখ্যা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করার পর অমূর্ত্ত সংখ্যা লেখা ও পড়ার ব্যবস্থা ক'রতে হবে। সংখ্যাটি লেখা ও সেই সঙ্গে ছবি যদি এক সময়ে উপস্থাপিত করা হয় তাহ'লে ছাত্রদের নিকট আর সংখ্যাটি অর্থহীন বলে মনে হবে না। সে এর ভিতরে কি সত্য নিহিত আছে তা বুঝতে পারবে।

যেমন :— ∘ = ১ | ∘∘ = ২ | ∘ ∘ ∘ = ৩ | ∘ ∘ ∘ ∘ = ৪ ইত্যাদি

প্রথম অবস্থাতে শিক্ষক বোর্ডে সংখ্যাটি লিখে দিবেন এবং ছাত্রদের ছবি আঁকতে বলবেন। আঙ্গুল গুণে সংখ্যা নির্ণয় করার পদ্ধটিতিও সুপ্রাচীন। এ অভ্যাসটিও ছাত্রদের শিখিয়ে দিতে পারা যায়। তবে মনে রাখতে হবে সংখ্যা নির্ণয় করার এক-মাত্র উপায় যেন আঙ্গুল গোনা না হয়। আঙ্গুল গোনা প্রাথমিক স্তরে কোন উপায়ের সহায়ক হবে। পরে যেন আঙ্গুল না গুণেও ছাত্ররা সংখ্যা নির্ণয় ক'রতে পারে।

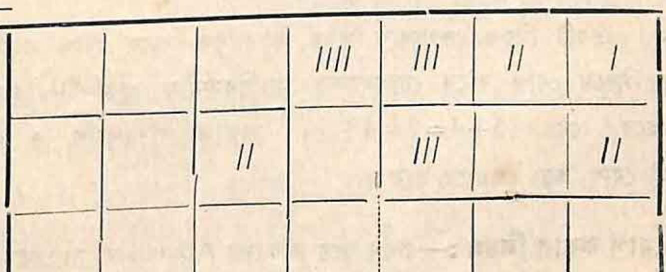
সংখ্যার কতকগুলি অর্থ আছে। যেমন :—

ক্রমিক অর্থ ঃ যথা—এক, তারপর দুই, তারপর তিন, চার প্রভৃতি।
দলগত অর্থ ঃ যথা—জোড়া হিসাবে, ওজন হিসাবে ; চার চারটি করে,
অনুপাত অর্থ ঃ যথা—৫ = ১০ − ৫ = ৪ + ১ = ৩ + ২ = ১০ এর $\frac{১}{২}$ ইত্যাদি।

বিভিন্ন প্যাটার্ণের সাহায্যেও ছাত্রদের সংখ্যা সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া যেতে

পারে। প্রাচীন কালে মিশর, গ্রীক প্রভৃতি দেশে জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে গণনার কাজ চ'লতো।

গণনার ইতিহাস :—গণনার ইতিহাস বা সংখ্যার উদ্ভব একদিনে হয়নি। এর জন্য অনেক সময় লেগেছে। এই গণনার ইতিহাস ছাত্রদের নিকট ব্যাখ্যা ক'রলে তারা যেমন আনন্দ পাবে, তেমনি উৎসাহিতও হবে। আগের দিনে মানুষ তার ভেড়া বা ছাগলের সংখ্যা ঠিক ক'রতো সমান সংখ্যক নুড়ি দিয়ে। এক একটি ভেড়ার জন্য এক একটি নুড়ি (এর থেকেই Calculus কথাটির উদ্ভব হয়েছে)। পরে পাঁচটি ভেড়ার জন্য একটি নুড়ি—এইভাবে সে তার হিসাব মিলিয়ে নিত। পরে যখন সে কৃষিকাজ ও পশুপালন শুরু ক'রল, তখন বীজ থেকে গাছ এবং গাছ থেকে ফসল হওয়া ও পালিত জন্তুর বাচ্চা প্রসব করার সময় লক্ষ্য ক'রে বৎসর ইত্যাদি নির্ণয় ক'রতে শিখলো। এক পূর্ণিমা থেকে আর এক পূর্ণিমার ব্যবধান, পূর্ণিমার চাঁদ কমতে কমতে একবারে অদৃশ্য হওয়া, এসমস্ত দেখে মাস ও পক্ষের হিসার ঠিক করা হ'ল। নদীর জোয়ার ভাঁটা, সূর্যোদয়, সূর্য্যাস্ত প্রভৃতি দেখে সে সময়ের সূক্ষ্ম হিসাব ক'রতে শিখলো। এইভাবে বিভিন্ন প্রাকৃতিক ঘটনার সাহায্যে সময়, সপ্তাহ, পক্ষ, মাস ও বৎসর ইত্যাদি সম্বন্ধে সে জ্ঞান অর্জন ক'রল। এই হ'ল সংখ্যা সম্বন্ধে জ্ঞান লাভের প্রথম স্তর। সংখ্যাজ্ঞানের পর সংখ্যার মান নির্ণয়করা আর একটি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় জিনিস। মান নির্ণয় করার অর্থ হ'ল সংখ্যাটির স্থানাঙ্ক অর্থাৎ একক, দশক, শতক ইত্যাদি স্থান নির্ণয় করা। এই স্থানীয় মান কিন্তু হিন্দুরাই প্রথম আবিষ্কার করেন। আবার 'শূন্যের' আবিষ্কারও হিন্দুদের। প্রথমে বোর্ডে ছক কেটে ছোট খোপ তৈরী করে নেওয়া হ'ত। তারপর খোপের ভিতর বাঁশের ছড়ি রেখে তাঁরা গুণতেন। যেমন :—



প্রথম খোপে হাজারের ঘরে 4টি; শতের ঘরে 3টি, দশের ঘরে 2টি ও এককের ঘরে 1টি দাগ (বাঁশের ছড়ি)। অতএব সংখ্যাটি হ'ল 4321। কোন ঘরে ছড়ি না থাকলে বোঝা যেত তা হ'চ্ছে '0'। দ্বিতীয় খোপের সংখ্যাটি হ'ল 20302। গণনা করার জন্য ছড়ি বা দাগের ব্যবহারের কথা অন্যান্য দেশেও (যেমন জাপান, কোরিয়া ইত্যাদি) শোনা যায়। যে ভাবে বাঁশের ছড়ি দিয়ে মানুষ একক, দশক ইত্যাদি সম্বন্ধে ধারণা লাভ ক'রেছে, ঠিক সেইভাবে ছোট ছোট কাঠি নিয়ে একটি কাঠিকে একক, দশটি কাঠির বাণ্ডিলকে দশক, আর দশটি দশ কাঠির বাণ্ডিলকে শতক বলে ঠিক ক'রে নিয়ে শিশুদের একক, দশক সম্বন্ধে, জ্ঞান দেওয়া সম্ভব। এই জ্ঞান আরো পাকা করবার জন্য যখন যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ ইত্যাদি শেখানো হবে তখন আবার একক, দশক প্রভৃতির বৈশিষ্ট্য ও পার্থক্যগুলি আলোচনা ক'রে ভালো ক'রে বুঝিয়ে দিতে হবে।

যোগ (Addition) :—সংখ্যাজ্ঞানের পর ছাত্রদের যোগ করার পদ্ধতি শেখানো হয়। তবে লক্ষ্য রাখতে হবে যেন শেখার পর্য্যায়ে ছাত্র গণনা ক'রতেও শিখে থাকে। যোগ করার প্রয়োজনীয়তা ছাত্র বুঝতে পারলে যোগের মূল নীতি-গুলি কয়েকটি ভাগে ভাগ ক'রে তার সামনে উপস্থাপিত করা উচিত। মূল নীতিগুলির ভাগ এইরূপ হবে :—

১। যোগ করার সংখ্যাগুলির সমন্বয় দু'ভাবে করা যেতে পারে। প্রথমটি হ'ল—যে সমস্ত সংখ্যার যোগফল 10 বা তার কম, সেইগুলি নিয়ে একটি ভাগ ; অপরটি হ'ল 10 এর বেশী যোগফল বিশিষ্ট সংখ্যাগুলি নিয়ে একটি ভাগ।

২। একটি নিয়ম শেখাবার সময় স্বাভাবিক ভাবে যোগ ক'রে তারপর বিপরীত নিয়মে যোগ ক'রে যোগফলের অপরিবর্ত্তনীয় প্রকৃতিটিও প্রমাণ ক'রে দেখাতে হবে। যেমন $5+4=9=4+5$। তাছাড়া পাশাপাশি ও উপর নীচ, দু'ভাবেই যোগ করা শেখাতে হবে।

যোগ করার নিয়ম :—প্রথম স্তরে ছাত্রদের Abacus বা বলফ্রেমের সাহায্যে যোগ শিক্ষা দেওয়া হয়। তারপর ছোট ছোট যোগ (যাদের যোগফল 10 থেকে কম) ক'রতে দেওয়া হয়। তারপর সহজ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার যোগ (যমন $11+22$, $33+42$ ইত্যাদি)—এইভাবে ক্রমশঃ কঠিন যোগ তাকে ক'রতে দেওয়া হয়। যোগ করার সময় সচরাচর এই নিয়ম পালন করা হয় :—

47 36 84 167	7 আর 6এ তেরো আর 4এ সতেরো ; সতেরোর 7 নামল, হাতে রইল 1 ; 1 আর 4এ পাঁচ, আর 3এ আট আর 8এ ষোল। কিন্তু এখানে এককের ঘরে বলা হ'চ্ছে 7 আর 6এ তেরো, আবার দশকের ঘরেও কোন স্থান নির্দেশ না ক'রেই বলা হ'চ্ছে 4 আর 3এ সাত।

এ রকম বলা খুব ভুল কারণ এতে ছাত্র একক, দশক ও শতকের মধ্যে পার্থক্য বুঝতে পারে না। এইভাবে না ক রে যোগ নীচের নিয়মে করা উচিত।

47 36 84 167	7 আর 6এ তেরো, অর্থাৎ একদশ আর তিন। এক দশের জন্য 6এর উপর একটি দাগ দেওয়া হ'ল। এরপর এককের যোগ। তিন আর চারে সাত, সেই সাতটি নীচে নামল। এরপর দশকের যোগ। আগেকার একদশ আর চার দশে পাঁচ দশ, আর তিন

দশে আট দশ, আর আট দশে ষোল দশক। এর মধ্যে দশ দশকে এক শতক। তা বোঝবার জন্য 8 এর মাথায় একটি দাগ দেওয়া হ'ল। তা'হলে ষোল দশকের মধ্যে নামছে মাত্র বাকী ছয় দশক। এক শতকটি শতকের ঘরে গেল। সেখানে অন্য কোন শতক না থাকার জন্য এক শতকটি নামলো। তা'হলে যোগফল হ'ল—এক শতক, ছয় দশক ও সাত একক অর্থাৎ 167। এইভাবে যোগ ক'রলে শিশুদের প্রত্যেকটি স্থান সম্বন্ধে ধারণাটি স্পষ্ট হবে।

ক্রমশঃ ছাত্রদিগকে বড় বড় যোগ করার অভ্যাস শেখাতে হবে। একেবারে বড় বড় যোগ ক'রতে দিলে ছাত্রদের আগ্রহ বিনষ্ট হ'তে পারে। মনে রাখতে হ'বে নির্ভুলভাবে যোগ করার ক্ষমতা—কথাটির মধ্যেই নিহিত আছে। যোগ :—অর্থাৎ অখণ্ড একাগ্রতা—এইটিই হ'ল যোগের মূলকথা। একটু বড় হ'য়ে যখন তারা বড় বড় যোগ ক'রতে শিখবে তখন কিভাবে সেই যোগ অঙ্ক মিলিয়ে নিতে হয় তার নিয়মটিও তাদের শিখিয়ে দিতে হবে। নিয়মটি হ'ল নিম্নরূপ উদাহরণ।

4376	$4+3+7+6=20,\ \ 2+0=2$ … …	(i)
5421	$5+4+2+1=12,\ \ 1+2=3$ … …	(ii)
7895	$7+8+9+5=29,\ \ 2+9=11,\ \ 1+1=2$…	(iii)
6218	$6+2+1+8=17,\ \ 1+7=8$ … …	(iv)
23910	$2+3+9+1+0=15,\ \ 1+5=6$… …	(v)

$$(i)+(ii)+(iii)+(iv)=2+3+2+8=15,\ 1+5=6=(v)$$

যোগ অঙ্কে বিশেষ পারদর্শিতা অর্জন ক'রতে হ'লে চর্চার প্রয়োজন। নিয়মিত চর্চার ফলেই ছাত্ররা যোগ অঙ্কে পারদর্শী হ'তে পারবে। যোগের বিভিন্ন নিয়মের চর্চার পর বাস্তব জীবনের দৈনন্দিন অভিজ্ঞতাতে সে যে সমস্ত সমস্যার সম্মুখীন হয় তার মাধ্যমে যোগ করার অভ্যাস অর্জন ক'রবে।

বিয়োগ (Subtraction) :—বিয়োগ হ'ল যোগের ঠিক বিপরীত। যোগ অঙ্কে সংখ্যাগুলি সংযুক্ত করা হয়; বিয়োগ অঙ্কে সংখ্যাগুলিকে বিযুক্ত করা হয়, যোগের মত বিয়োগও প্রথমে দৈনন্দিন কাজের ভিতর দিয়ে শেখানো হবে। মূর্ত্ত সংখ্যার সাহায্যে বিয়োগ ক'রতে শেখার পর ছাত্র অমূর্ত্ত সংখ্যার সাহায্যে বিয়োগ ক'রতে শিখবে। বিয়োগ করারও কয়েকটি নিয়ম আছে। নিয়মগুলিকে সাধারণতঃ তিনভাবে ভাগ করা হয়। যথা :—

(১) **ধার করার নিয়ম** :—$723 = 700 + 20 + 3 = 600 + 110 + 13$

$$457 = 400 + 50 + 7 = 400 + 50 + 7$$

$$200 + 60 + 6$$

$$= 266$$

3 থেকে 7 বাদ দেওয়া যায় না। এইজন্য 2 দশক থেকে 1 দশক ধার নিয়ে বা ভেঙ্গে নিয়ে 3 এর সঙ্গে যোগ 13 করা হ'ল। 13 থেকে 7 বাদ দিলে হ'ল 6। 2 দশক থেকে 1 দশক নিয়ে নেওয়া হয়েছে। আছে আর 1 দশক, 1 দশক থেকে 5 দশক বাদ দেওয়া যায় না। এইজন্য 7 শতক থেকে 1 শতক ভেঙ্গে নিয়ে এসে 1 দশককে 11 দশক করা হ'ল। 11 দশক থেকে 5 দশক বাদ দিলে থাকে 6 দশক। 7 শতক থেকে 1 শতক বের হ'য়ে গেছে। সুতরাং আছে আর 6 শতক। 6 শতক থেকে 4 শতক গেলে থাকে 2 শতক। তাহ'লে বিয়োগফল হ'ল 2 শতক 6 দশক 6 একক অর্থাৎ 266।

(২) **সমান যোগের নিয়ম** :—এই নিয়মে বিয়োজন এবং বিয়োজ্য উভয়েই সমান সমান যোগ করে বিয়োগ করা হয়।

$723 = 700 + 20 + 3 = 700 + 120 + 13$ …বিয়োজন

$457 = 400 + 50 + 7 = 500 + 60 + 7$ ……বিয়োজ্য

$$200 + 60 + 6 = 266$$

3 এর থেকে 7 বাদ দেওয়া যায় না। এইজন্য 3 এর সঙ্গে 10 যোগ করা হ'ল। যোগফল হ'ল 13, 13 থেকে 7 গেলে থাকে 6, বিয়োজনের সঙ্গে 10 যোগ করা হ'য়েছে বলে বিয়োজ্যের সঙ্গেও 10 যোগ ক'রতে হবে। এইজন্য দশকের ঘরে অর্থাৎ

5 এর সঙ্গে 1 দশক যোগ ক'রে 6 দশক করা হ'ল। বিয়োজনের 2 দশক থেকে বিয়োজ্যের 6 দশক বাদ দেওয়া যায় না বলে বিয়োজনে দশকের ঘরে 1 শতক বা দশ দশক যোগ করা হ'ল। যোগফল হ'ল 12 দশক। 12 দশক থেকে 6 দশক বাদ দিলে বিয়োগফল হয় 6 দশক। এবার বিয়োজ্যও দশ দশক যোগ করাতে 4 শতকটি হ'য়ে গেল 5 শতক। বিয়োজনের 7 শতক থেকে এই 5 শতক বাদ দিলে বিয়োগফল হ'ল 2 শতক। অর্থাৎ মোট বিয়োগফল দাঁড়াল 2 শতক 6 দশক 6 একক বা 266।

(৩) **দোকানদারের নিয়ম** :—$723 = 700 + 20 + 3$

$$457 = 400 + 50 + 7$$

$$200 + 60 + 6 = 266$$

এই নিয়মকে যোগের সাহায্যে বিয়োগ করার নিয়মও বলে। সাধারণতঃ দোকানদারেরা এই নিয়মটি বেশী ব্যবহার করে বলেই নিয়মটির এই রকম নামকরণ করা হ'য়েছে। এখানে 3 থেকে 7 গেলে কত থাকে, এ ভাবে হিসেব না ক'রে 7 এর সঙ্গে কত যোগ করলে 3 (অর্থাৎ 13) হবে—তা নির্ণয় করা হয়। দোকানদারকে একটি টাকা দিয়ে হয়তো 52 পয়সার জিনিস কেনা হ'য়েছে। তখন দোকানদার 1 টাকা থেকে 52 পয়সা বাদ না দিয়ে 52 পয়সার সঙ্গে আর কত পয়সা যোগ ক'রলে 1 টাকা হবে—তা হিসাব করে।

বিয়োগকরণের বিভিন্ন পদ্ধতির উপর অনেক পরীক্ষা-নিরীক্ষা করা হ'য়েছে। ইংল্যাণ্ড, স্কটল্যাণ্ড প্রভৃতি দেশে যে সমস্ত পরীক্ষা হ'য়েছে—তার থেকে এই সিদ্ধান্তেই আসা গেছে যে সমান যোগের পদ্ধতিটিই সবচেয়ে বেশী কার্য্যকরী পদ্ধতি। এতে ভুল হবার সম্ভাবনা অনেক কম। ধার করার পদ্ধতিটি খুব খারাপ নয়। কিন্তু এই পদ্ধতিতে তাঁদের আপত্তি এই কারণের জন্য যে কোমলমতি শিশুদের ধার বা ধারশোধ সম্বন্ধে কোন ধারণা না জন্মানোই ভালো। তবে ধার করা না ব'লে ভেঙ্গে নেওয়া হ'চ্ছে বললে তাদের মনে খারাপ ধারণা জন্মাবার আশা কম। সেক্ষেত্রে ভেঙ্গে নেওয়ার নিয়মটি মেনে চলা যেতে পারে এবং তাতেও ভুল হবার সম্ভবনা অনেক কম। প্রকৃত প্রস্তাবে ভেঙ্গে নেওয়ার নিয়মটি সমান যোগের নিয়ম অপেক্ষাও সহজবোধ্য।

বিয়োগ করার সময় মনে রাখতে হবে—

(১) শিশুকে প্রথমে যে উদাহরণগুলি দেওয়া হবে—তা যেন ধার করার নিয়মে ক'রতে হয় এবং তাতে যেন মাত্র দু'টি অঙ্ক থাকে।

(২) বিয়োগ সম্বন্ধে ধারণা স্পষ্ট হ'লে—তবেই ধার করার নিয়ম শেখানো যেতে পারে।

বিয়োগের নিয়ম বুঝলে তারপর বড় বড় বিয়োগ দিতে হবে এবং বিয়োগফল ঠিক হয়েছে কিনা—তা পরীক্ষা করার নিয়মটিও শিখিয়ে দিতে হবে। যথা:–

4 5 6 ৪	$4+5+6+8=23$ $2+3=5\cdots\cdots$	(i)
2 7 8 2	$2+7+8+2=19$ $1+9=10$ $1+0=1\cdots\cdots$	(ii)
1 7 8 6	$1+7+8+6=22$ $2+2=4\cdots\cdots$	(iii)

$$(i)-(ii)=5-1=4=(iii)$$

গুণ (Multiplication):—গুণকে আমরা পৌনঃপৌনিক যোগ (Repeated addition) বলতে পারি। 2 কে 4 দ্বারা গুণ করার অর্থ হ'ল 2 কে পরপর 4 বার যোগ করা। তবে বার বার যোগ ক'রতে হ'লে সময়ও যেমন বেশী লাগে পরিশ্রমও তেমনি অনেক বেশী হয়। এইজন্য সময় ও পরিশ্রম বাঁচানোর উদ্দেশ্যেই গুণ ব্যবহার করা হয়। গুণের সুবিধার জন্য অনেক সময় নামতা (Multiplication Table) মুখস্থ রাখতে হয়। গুণ সচরাচর × আকারের ক্রশ-চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। কিন্তু যোগ চিহ্নে ক্রশটি সোজা থাকে। অনেকে বলেন, যোগ ও গুণের চিহ্ন খৃষ্টান ধর্মমতের ও ধর্ম-চিহ্নের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত।

গুণ করার পদ্ধতি:—গুণ করার পদ্ধতিগুলিকে সচরাচর দু'ভাগে ভাগ করা হয়। পুরাতন পদ্ধতি ও আধুনিক পদ্ধতি।

পুরাতন পদ্ধতি:—ধরা যাক্ 574 কে 328 দ্বারা গুণ ক'রতে হবে। 574 কে 328 বার যোগ ক'রলেই গুণফল পাওয়া যাবে। এখন একেবারে 328 দ্বারা গুণ না করে 574 কে 8, 20 ও 300 দ্বারা পর পর গুণ করে গুণফলগুলি যোগ ক'রলে সঠিক গুণ ফল পাওয়া যাবে। ছাত্ররা অভিজ্ঞতা থেকে শিখেছে যে কোন সংখ্যাকে দশ বার যোগ ক'রলে বা দশ দ্বারা গুণ ক'রলে সংখ্যাটির ডানদিকে শূন্য (0) বসে। আবার একশতবার যোগ করলে বা একশ দ্বারা গুণ করলে দু'টি শূন্য বসে। কাজেই 20 দ্বারা গুণ করার অর্থ হ'ল 2 দ্বারা গুণ ক'রে ডানদিকে একটি শূন্য বসানো এবং 300 দ্বারা গুণ করার অর্থ হ'ল 3 দ্বারা গুণ ক'রে ডানদিকে দু'টি শূন্য বসানো।

$574\times8 = 4592\cdots$(i)
$574\times20 = 11480\cdots$(ii)
$574\times300 = 172200\cdots$(iii)
188272

```
      5 7 4
      3 2 8
    -------
    4 5 9 2
  1 1 4 8
1 7 2 2
-----------
1 8 8 2 7 2
```

অবশ্য সমাধানটি থেকে দেখা যাচ্ছে (ii) ও (iii) স্তরে ডানদিকে শূন্য না বসালেও কোন ক্ষতি হয় না। কিন্তু যেহেতু এই স্তর দু'টি যথাক্রমে দশক ও শতক স্তরের গুণফল, সেইজন্য শূন্য রাখাই বাঞ্ছনীয়। এই পদ্ধতিতে প্রথমে গুণ করা হয় এককের ঘর দিয়ে, তারপর দশকের ঘর এবং তারপর শতকের ঘর দিয়ে। আবার এই পদ্ধতিতে গুণফল লেখা হয় ডানদিক থেকে বামদিকে।

আধুনিক পদ্ধতিঃ—এই পদ্ধতিকে বাম দিক থেকে ডানদিকের পদ্ধতিও (Left-to-right) বলা হয়। বলতে গেলে পদ্ধতিটি পুরাতন পদ্ধতির ঠিক বিপরীত। এতে প্রথমে শতকের ঘর দিয়ে গুণ আরম্ভ করা হয়, তারপর দশকের ঘর এবং সবশেষে এককের ঘর দিয়ে। গুণফলও লেখা হয় বামদিক থেকে ডানদিকে।

উদাহরণ ঃ— 3568
245

713600……200 দ্বারা প্রথম আংশিক গুণ
142720…… 40 দ্বারা দ্বিতীয় " "
17840…… 5 দ্বারা তৃতীয় " "

874160…… 245 দ্বারা সম্পূর্ণ গুণ

এই পদ্ধতির সুবিধা হ'চ্ছে গুণ আরম্ভ করার সময় যখন মস্তিষ্ক সুস্থ ও সতেজ থাকে, তখন বড় গুণ (শতক বা আর উপরের ঘর থেকে) থেকেই শুরু করা হ'চ্ছে। কাজেই ভুল হবার সম্ভাবনা অনেক কম হবে। যত মস্তিষ্ক ক্লান্ত হবে—গুণের স্তরও তত কম বা ছোট হবে। অবশ্য এ পদ্ধতিতে অভ্যস্ত হয়ে গেলে ডান দিকের শূন্যগুলি বাদ দেওয়া যেতে পারে।

মনে মনে যোগ করে গুণ করার অভ্যাসটি ও মানসিক চর্চার ফলে আয়ত্ত করা যায়। এর জন্যই আগেকার দিনে বিদ্যালয়গুলিতে মানসাঙ্কের প্রচলন ছিল। প্রথম অবস্থাতে শিশুরা গুণ শিখবে যোগের মাধ্যমে। রোমানরা Abacus বা বলফ্রেম ব্যবহার করতেন। তবে প্রাথমিক অবস্থাতে বিভিন্ন খেলা ও কাজের ভিতর দিয়ে গুণ শেখানো উচিত। নামতা ও ছাত্ররা তৈরী ক'রবে নিজেরাই—একটি সংখ্যা বার বার যোগ করে। যেমন ঃ—

3 দুইবার যোগ ক'রে হয় 6 $\therefore$ $3\times2=6$

3 তিনবার ,, ,, ,, 9 $\therefore$ $3\times3=9$

3 চারবার ,, ,, ,, 12 $\therefore$ $3\times4=12$ ইত্যাদি। এইভাবে দশ ঘর পর্য্যন্ত নামতা তারা নিজেরাই তৈরী ক'রবে। নামতার তালিকা, প্রস্তুত করার সময় তারা বিভিন্ন জিনিসের সাহায্য নিতে পারে—যেমন কাঠি, ছড়ি, পুঁতি, বলফ্রেম ইত্যাদি। তালিকা প্রস্তুত হ'য়ে গেলে তার চর্চার অভাবে তারা ভুলে যেতে পারে। বার বার চর্চা করার ফলে একটা বন্ধন (bond) সৃষ্ট হবে। এই বন্ধনটি দৃঢ় ক'রতে হবে যাতে প্রয়োজন হ'লেই ছাত্র অত্যন্ত সহজে এবং দ্রুততা মনে ক'রতে পারে। দু'টি রাশির গুণফল যে সব সময় সমান (স্থান পরিবর্ত্তন করা সত্ত্বেও, যেমন $9\times5=45=5\times9$ ইত্যাদি) এ ধারণাটি ছাত্রদের মনে সৃষ্টি ক'রে দিতে হবে।

গুণফল নির্ণয় করার সময় কতকগুলি জিনিসের প্রতি লক্ষ্য রাখতে হবে। একটু বড় গুণ হ'লেই এককের ঘরের গুণফল থেকে "সংখ্যা" বা রাশি দশকের ঘরে, আবার দশকের ঘর থেকে শতকের ঘরে নিয়ে যাওয়া হয় (যোগে যেটাকে 'হাতে থাকা' বলে)। প্রথম অবস্থায় গুণে এই 'হাতে থাকা' পর্য্যায়টি যেন না থাকে। এক অঙ্ক বিশিষ্ট রাশি দিয়ে গুণ শুরু ক'রলেই ভালো হয়। যেমন 3×3, 4×2 ইত্যাদি। এই ভাবে গুণ ক'রতে অভ্যস্ত হ'লে তারপর বড় গুণ যেমন 5×6, 15×8 ইত্যাদি দেওয়া চলতে পারে। সবশেষে বড়গুণ ক'রতে দিতে হবে। গুণক কে ভেঙ্গে নেওয়ার কৌশলটিও ছাত্রদের শিখিয়ে দিতে হবে। যেমন $123=100+20+3$ ইত্যাদি। সবচেয়ে বড় কথা হ'ল—দৈনন্দিন জীবনের সমস্যামূলক প্রশ্নের মাধ্যমে গুণের চর্চা করা হবে।

ভাগ (Division) :—ভাগ প্রক্রিয়াটি গুণ প্রক্রিয়ার বিপরীত। গুণকে যেমন পৌনঃপৌনিক যোগ বলা হয়, ভাগকে তেমনি পৌনঃপৌনিক বিয়োগ বলা যেতে পারে। প্রথম অবস্থাতে বিভিন্ন কাজ ও খেলার মাধ্যমে ছাত্ররা ভাগ সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন ক'রবে। বাস্তব অভিজ্ঞতার মাধ্যমেই ছাত্ররা ভাগের অর্থ বুঝবে। নানারকম মূর্ত্ত জিনিসের সাহায্যেও তারা ভাগ সম্বন্ধে জ্ঞান আহরণ ক'রতে পারে। ভাগের অর্থ বুঝলে তারপর তারা ভাগের পদ্ধতিগুলি শিক্ষা ক'রবে। এই পদ্ধতিগুলি যান্ত্রিক ভাবে তারা যেন না শেখে। প্রতিটি স্তরের 'কি' ও 'কেন' গুলি যেন তারা ভালোভাবে হৃদয়ঙ্গম ক'রতে পারে। ভাগের প্রথম অবস্থাতে ছোট সংখ্যা নিয়ে শুরু ক'রে ভাগ যে পৌনঃপৌনিক বিয়োগ তা ভালোভাবে বুঝিয়ে দিতে হবে।

উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে—একটি শ্রেণীতে 16 জন ছাত্র আছে। 4 জন ছাত্র নিয়ে একটি দল গঠন ক'রলে কয়টি দল হবে ?

```
16 জন ছাত্র
 4          এক দল   ⎫
───                 ⎪
12                  ⎪
 4          এক দল   ⎪
───                 ⎬ 4 দল।
 8                  ⎪
 4          এক দল   ⎪
───                 ⎪
 4                  ⎪
 4          এক দল   ⎭
───
 0
```

এইভাবে তারা শিখল যে 4 জন ক'রে দল হ'ল 4টি ; অর্থাৎ 4 দিয়ে 16 কে ভাগ ক'রলে ভাগফল হয় 4। এরপর ছাত্রদিগকে ভাজ্য, ভাজক, ভাগফল ও ভাগশেষ সম্বন্ধে ধারণা দিতে হবে। গুণের নামতা তৈরী করার সময় ছাত্ররা ছোট ছোট ভাগ করার মত ক্ষমতা অর্জন ক'রে থাকে। কঠিন কঠিন ভাগ তাদের স্তরে স্তরে শেখাতে হবে। একেবারে কঠিন ভাগ দিলে চলবে না। গুণের মতো ভাগ অঙ্কেও শতক দশক প্রভৃতি ঘরগুলি ভেঙ্গে নিতে হয়। যেমন যদি 8422 কে 22 দিয়ে ভাগ ক'রতে হয়, তবে প্রথমে সহস্রের স্থানের 8 কে 22 দিয়ে ভাগ ক'রতে হবে। কিন্তু তা ভাগ করা যায় না বলে 8 হাজারকে 80 শতে পরিবর্তিত করে ভাগ করা হয়। নামতা ব্যবহার না ক'রেও ভাজকের প্রথম অঙ্ক ও ভাজ্যের প্রথম দু'টি অঙ্কের সাহায্যে ভাগফলের প্রথম অঙ্কটি কত হ'তে পারে তার একটা আভাষ পাওয়া যেতে পারে।

ভাগ করা পদ্ধতি :—ভাগ সচরাচর দু'ভাবে করা হয়। একটি হ'চ্ছে প্রচলিত সাধারণ নিয়ম আর অপরটি হ'ল উৎপাদকের সাহায্যে।

প্রচলিত সাধারণ নিয়ম :—5425 কে 65 দ্বারা ভাগ ক'রতে হবে।

```
65)5425(83
   520
   ───
    225
    195
    ───
     30
```

এখানে ভাজক = 65, ভাজ্য = 5425। ভাজকের প্রথম অঙ্ক অর্থাৎ 6, ভাজ্যের প্রথম দু'টি অঙ্ক অর্থাৎ 54 র মধ্যে কতবার যায় তা দেখতে হবে। 54 র ভিতর 6 যায় 9 বার। কাজেই 542 এর ভিতর 65 যাবে 9 বার নয়তো 8 বার। গুণ ক'রে দেখা যায় $65 \times 9 = 585$ (542 থেকে বেশী) এবং $65 \times 8 = 520$ (542 থেকে কম) অতএব 8 বার যাবে। বর্ত্তমানে ভাগফলটি ভাজ্যের ডানদিকে বা ভাজকের বিপরীত দিকে না লিখে ভাজ্যের মাথার উপর লেখা হয়। এতে এক পলক দেখে ভাগফল সম্বন্ধে একটা প্রাথমিক ধারণা

জন্মাতে পারে। যেমন উপরের ভাগে অনুমান করা যায় যে ভাগফল ৪০র কাছাকাছি হবে। এ ছাড়া অবশ্য আর একটা কারণ আছে। ভাজ্যের প্রত্যেক সংখ্যার উপর একটি করে সংখ্যা থাকা দরকার তা হ'লে ভাজ্য কখন শেষ হচ্ছে তা সহজে বোঝা যাবে এবং ভাজ্যে শূন্য '0' থাকলে তার জন্য ভাগফলে শূন্য বসাতে আর ভুল হয় না।

উৎপাদকের সাহায্যে ভাগ করার নিয়ম :—উৎপাদকের সাহায্যেও বেশ সহজ ভাবেই ভাগ করা সম্ভব। তবে একেবারে নীচু শ্রেণীতে এ পদ্ধতি অনুসরণ করা যুক্তিযুক্ত নয় কারণ এতে অবশিষ্ট অর্থাৎ ভাগশেষ নির্ণয় করা একটু জটিল ব্যাপার। উঁচু শ্রেণীর ছাত্রদের নিকট পদ্ধতিটি সহজ বলে মনে হবে। একটি উদাহরণ দেওয়া যাক্ :—

$2589 \div 42$। $42 = 2 \times 3 \times 7$। সুতরাং ভাগটি এইভাবে করা যায়—

2 | 2589
3 | 1294   1 অবশিষ্ট
7 | 431   1 অবশিষ্ট (প্রতিদলে 2)
    61   4 অবশিষ্ট (প্রতিদলে 6)

কাজেই অবশিষ্ট $= 4 \times 6 + 1 \times 2 + 1$

$= 24 + 2 + 1$

$= 27$

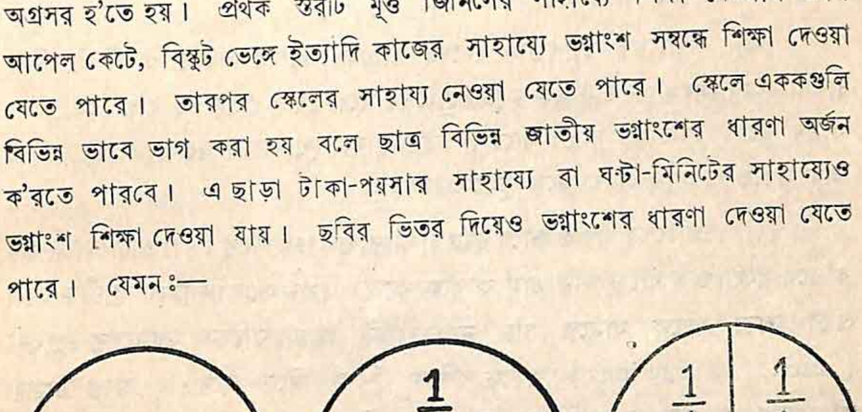
এই অবশিষ্ট নির্ণয় করার পদ্ধতিটি অপেক্ষাকৃত জটিল। প্রচলিত পদ্ধতিটি বেশ ভালো ভাবে আয়ত্ত হ'লে তবেই উৎপাদক পদ্ধতিটি শেখানো যেতে পারে। সবশেষে অঙ্ক মিলিয়ে দেখার কৌশলটি ছাত্রদের শিখিয়ে দিতে হবে। মনে রাখতে হবে :—

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ।

ভগ্নাংশ (**Fractions**) :—ভগ্নাংশের ধারণাটি অনেক প্রাচীন কাল থেকেই চলে আসছে। যতদূর জানা গেছে তাতে মনে হয় ব্যাবিলন ও মিশর দেশে ভগ্নাংশের ব্যবহার প্রথমে শুরু হয়। বর্ত্তমানের পদ্ধতির সঙ্গে অবশ্য তার বিশেষ মিল নেই। বর্ত্তমানে আমরা যে পদ্ধতিতে ভগ্নাংশ লিখে থাকি সে পদ্ধতি আবিষ্কার করেন হিন্দুরা। ব্রহ্মগুপ্ত, ভাস্কর—এঁরা এই ব্যাপারে পথিকৃত বলে মনে হয়। ভগ্নাংশ কথাটির মধ্যেই এর অর্থ ও স্বরূপ লুক্কায়িত আছে। ভগ্নাংশের অর্থ হল -ভগ্ন অংশ। কাজেই কোন রাশির বা জিনিসের ভগ্নাংশের অর্থের সঙ্গে ছাত্রদের আগে পরিচিত ক'রে দিতে হবে। অবশ্য স্কুলে আসার আগে বা ভগ্নাংশ সম্বন্ধে গণিতে জ্ঞান অর্জন করার আগেই সে ভগ্নাংশ সম্বন্ধে একটা ধারণা অর্জন ক'রে থাকে। সে জানে

আধখানা বিস্কুট বা আধখানা রসগোল্লা একখানার থেকে কম। তবে বিভিন্ন ভগ্নাংশের মধ্যে তুলনামূলক সম্বন্ধ নির্ণয় করা তখনো তার পক্ষে সম্ভব হয় না।

ছাত্রদের ভগ্নাংশ সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে হ'লে কয়েকটি বিভিন্ন স্তরের মাধ্যমে অগ্রসর হ'তে হয়। প্রথক স্তরটি মূর্ত্ত জিনিসের সাহায্যে শিক্ষা দেওয়ার স্তর। আপেল কেটে, বিস্কুট ভেঙ্গে ইত্যাদি কাজের সাহায্যে ভগ্নাংশ সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া যেতে পারে। তারপর স্কেলের সাহায্য নেওয়া যেতে পারে। স্কেলে এককগুলি বিভিন্ন ভাবে ভাগ করা হয় বলে ছাত্র বিভিন্ন জাতীয় ভগ্নাংশের ধারণা অর্জন ক'রতে পারবে। এ ছাড়া টাকা-পয়সার সাহায্যে বা ঘণ্টা-মিনিটের সাহায্যেও ভগ্নাংশ শিক্ষা দেওয়া যায়। ছবির ভিতর দিয়েও ভগ্নাংশের ধারণা দেওয়া যেতে পারে। যেমনঃ—



একটি জিনিসের অংশ হিসাবে ভগ্নাংশ যেমন প্রকাশ করা যায় একদল জিনিসের অংশ হিসাবেও তেমনি ভগ্নাংশ প্রকাশ করা যায়। যেমন 1টির অর্ধেক হ'ল $\frac{1}{2}$, চারভাগের এক ভাগ হ'ল $\frac{1}{4}$; আবার 16টি জিনিসের $\frac{1}{4}$ হ'ল 4টি, $\frac{1}{8}$ হ'ল 2টি ইত্যাদি। আবার ভগ্নাংশকে একটি সংখ্যার সম্বন্ধ হিসাবেও প্রকাশ করা যায়। যেমন ($4 \div 8 = 4 : 8 = 2 : 4 = 1 : 2 = \frac{1}{2}$) অর্থাৎ 4 এর সঙ্গে 8 এর যে সম্বন্ধ, 2 এর সঙ্গে 4 এর সেই সম্বন্ধ, এবং 1 এর সঙ্গে 2 এর সেই সম্বন্ধ, অর্থাৎ $\frac{1}{2}$। আবার পূর্ণ রাশির যেমন যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ করা চলে ভগ্নাংশেরও তেমনি যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ করা চলে।

ছাত্র প্রথমে সহজ ভগ্নাংশগুলি সম্বন্ধে একটা ধারণা অর্জন ক'রে থাকে। $\frac{1}{2}$ বা $\frac{1}{3}$ বললে সে বুঝতে পারে কোন জিনিস কে সমান 2 ভাগ বা 3 ভাগ ক'রে তার একভাগ নেওয়া। কিন্তু $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$ ইত্যাদি জাতীয় ভগ্নাংশগুলি সে সহজে বুঝতে পারে না। তখন কিন্তু বাস্তব উদাহরণের সাহায্যে (যেমন একটি কাঠিকে সমান পাঁচভাগে

কেটে দু'ভাগ নেওয়া) শিক্ষা দিলে ফল ভালো হয়। কাগজ ভাঁজ করার দ্বারাও ভগ্নাংশ শিক্ষা দেওয়া যায়।

ভগ্নাংশ শিক্ষা দিতে গিয়ে শিক্ষককে কয়েকটি অসুবিধার মধ্যে পড়তে হয়। সেগুলির কথা নীচে আলোচনা করা গেল।

(ক) ভগ্নাংশের রাশিগুলি দেখেই ছাত্ররা ভগ্নাংশ সম্বন্ধে একটি প্রাথমিক ধারণা ক'রে নেয়। $\frac{1}{7}$ ও $\frac{1}{8}$ এই দু'টি ভগ্নাংশের মধ্যে সে $\frac{1}{8}$ কেই বড় বলে মনে করে, কারণ এতে একটি বড় সংখ্যা আছে। এই অসুবিধা দূর করার জন্য ছাত্রদের 'হর' ও 'লব' সম্বন্ধে পরিষ্কার ধারণা গড়ে তুলতে হবে।

(খ) ভগ্নাংশের গুণ ও ভাগে ছাত্ররা মারাত্মক ভুল করে। তারা জানে গুণ ক'রলে সংখ্যাগুলি বাড়ে আর ভাগ ক'রলে কমে। কিন্তু ভগ্নাংশে ঠিক বিপরীত হয়। এ'টা তারা সহজে মানতে চায় না। এই স্তরে তাদের ভগ্নাংশের ভগ্নাংশ' (ıraction of fractions) সম্বন্ধে শিক্ষা শিক্ষা দিতে হবে। অবশ্য চিত্রের সাহায্যেও ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ শিক্ষা দেওয়া যেতে পারে।

(গ) ছাত্ররা ভগ্নাংশ নির্ণয় করার সময় মৌলিক এককটির কথা সময় সময় ভুলে যায়। যদি বলা হয় কোন জিনিসকে সমান তিন ভাগে ভাগ ক'রে তারপর এক একটি ভাগকে আবার সমান চার ভাগ ক'রলে—এক একটি ভাগ কত হবে—; তারা চট্ ক'রে উত্তর দিবে—$\frac{3}{4}$, কারণ চার ভাগে ভাগ করা মানেই তো এক চতুর্থাংশ নেওয়া। এরূপ ক্ষেত্রেও যথেষ্ট সাবধানতা অবলম্বন ক'রতে হবে।

(ঘ) ভগ্নাংশের যোগ-বিয়োগ শিক্ষা দেবার পর গুণ ও ভাগের শিক্ষা দিতে হবে। ভগ্নাংশের চিহ্নগুলি বিশেষ করে 'এর' (of) সম্বন্ধে ধারণা দিতে হবে। মনে রাখতে হবে যেখানেই সুযোগ পাওয়া যাবে সেইখানেই বাস্তব উদাহরণের সাহায্যে ভগ্নাংশ শিক্ষা দিতে হবে।

দশমিক ভগ্নাংশ (Decimal fractions) :—বর্ত্তমানে আমাদের দেশে যে মুদ্রা-হার প্রচলিত আছে, তার সাহায্যে ছাত্রদের দশমিক ভগ্নাংশ সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া যায়। এ ছাড়া স্কেল, থার্মোমিটার প্রভৃতির সাহায্যে ও দশমিক ভগ্নাংশ শেখানো সম্ভব।

দশমিক ভগ্নাংশ হ'ল দশমিক প্রথা অনুসারে সংখ্যার প্রসার। তবে এই পর্য্যায়ের সংখ্যাগুলি সব সময় 1 এর থেকে ছোট হবে। 'হর' হবে দশ বা দশের কোন গুণীতক। যেমন $\frac{3}{10} = \cdot 3$, $\frac{17}{100} = \cdot 17$, $\frac{7}{1000} = \cdot 007$ ইত্যাদি।

দশমিক প্রথাকে আরবদেশীয় প্রথা বলা হয়। এই প্রথাটির সুবিধা হ'ল এই যে কোন সংখ্যার কোন একটি অঙ্কের মান নির্ণয় করা যায় সেই অঙ্কটির অবস্থিতি দেখে। যেমন একটি সংখ্যা হ'ল 539। এখানে 5 আছে শতকের ঘরে এবং তার অর্থ হ'ল 500; 3 দশকের ঘরে, তার অর্থ হল 30; 9 এককের ঘরে, তার অর্থ 9।

সুতরাং $500+30+9$
$=539$।

একে স্থানাঙ্ক নির্ণয় বলে। পরবর্তী কালে বিজ্ঞানের অগ্রগতির সঙ্গে সঙ্গে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র মাপের প্রয়োজনীয়তা দেখা দিল। তখন দশ ভাগের এক ভাগ; শতাভাগ, হাজার ভাগ ইত্যাদি ভাগ ক'রে এই ক্ষুদ্র অংশগুলি কি ভাবে অঙ্কে প্রকাশ করা যায় সে বিষয়ে গবেষণা চলতে থাকল। গণিতের ইতিহাস পর্য্যালোচনা ক'রলে দেখা যায় আনুমানিক ষোড়শ শতাব্দীতে দশমিক সংখ্যার প্রসার ঘটে। ১৫৮৫ খৃষ্টাব্দে **স্টেভিনাস** নামে একজন্ ওলন্দাজ একটি পুস্তক প্রকাশ করেন। তাতে তিনি দশাংশ, শতাংশ, সহস্রাংশ প্রভৃতিকে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ইত্যাদি বলে অভিহিত ক'রেছেন। তাঁর লেখা দশমিক ভগ্নাংশের আকৃতি ছিল এইরূপ :—

(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
45	6	7	0	8

(0) হ'ল এককের ঘরে। (1) হ'ল দশ ভাগের এক ভাগ অর্থাৎ দশাংশ। (2) হ'ল 100 ভাগের এক ভাগ অর্থাৎ শতাংশ। (3) হ'ল 1000 ভাগের এক ভাগ অর্থাৎ সহস্রাংশ। তিনি অবশ্য পরে দশমিক সংখ্যা লেখার অন্য একটি পদ্ধতি আবিষ্কার করেন। যেমন—

	I	II	III	IIII
45	6	7	0	৪

অর্থাৎ আগেকার (1) (2) (3) (4) ইত্যাদি সংখ্যার বদলে একটি, দু'টি, তিনটি বা চারটি দাগ দেওয়া হ'ত। পরে পরিশ্রম ও সময় বাঁচাবার জন্য কেবলমাত্র এককের ঘরের পরে একটি, চিহ্ন দেওয়া হ'ত এবং পরবর্ত্তী ঘরগুলিতে কোন দাগ না থাকলেও সেইঘরের সংখ্যাগুলিকে তার আগের ঘরের দশমাংশ বলে ধরে নিতে হ'ত। তখন লেখার পদ্ধতি হ'ল :—

45 | 6708

কিন্তু এতেও একটা অসুবিধা দেখা গেল। দাগটি একটু ছোট হ'য়ে গেলেই

ইংরেজী 1 সংখ্যাটির মতো মনে হ'ত। তখন স্থির হ'লো দাগের পরিবর্ত্তে ছোট্ট একটি বিন্দু ব্যবহার করা হবে। খুব সম্ভব **নেপিয়ার** এই বিন্দু ব্যবহার করেন। অষ্টাদশ শতাব্দীতে এই বিন্দুর বহুল প্রচলন শুরু হয়। এই বিন্দুটিই পূর্ণসংখ্যা ও ভগ্নাংশের ব্যবধানটি দেখিয়ে থাকে। যেমন—

23·4678—এখানে 23 হ'ল পূর্ণসংখ্যা, আর 4678 হ'ল ভগ্নাংশ।

সেই রকম 3333 এই সংখাটির এককের ঘরের 3 দশকের ঘরের 3 এর $\frac{1}{10}$; আবার দশকের ঘরের 3, শতকের ঘরের 3 এর $\frac{1}{10}$; শতকের ঘরের 3, সহস্রের ঘরের 3 এর $\frac{1}{10}$। এ'টি এই ভাবে প্রকাশ করা যায়ঃ—

স.	শ.	দ.	এ.
3	3	3	3

এইখানে শিক্ষক ছাত্রদের কোন সংখ্যাকে বামদিকে সরালে তার মান দশগুণ বেড়ে যায়, এই তথ্যটি বুঝিয়ে দিতে পারেন। তাহ'লে দশমিক ভগ্নাংশ সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে হ'লে কয়েকটি স্তরে অগ্রসর হ'তে হবে। এর প্রথম স্তরটি হ'ল দশমিক ভগ্নাংশের অর্থ নির্ণয় করা। এই স্তরের কথা আমরা আগেই আলোচনা ক'রেছি। দ্বিতীয় স্তরটি হ'ল দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে ও সাধারণ ভগ্নাংশকে দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করা। ·3 এর অর্থ যে $\frac{3}{10}$, তা তারা শিখেছে। কিন্তু $\cdot37=\frac{37}{100}$, তা তারা সহজে বুঝতে পারে না। তখন তাদের বুঝিয়ে দিতে হবে যে $\cdot37=\frac{3}{10}+\frac{7}{100}=\frac{30+7}{100}=\frac{37}{100}$। তেমনি $\cdot285=\frac{285}{1000}$ ইত্যাদি ; এরপর আসে দশমিক সংখ্যার শেষে এবং দশমিক বিন্দুর পরে বা মাঝে '0' (শূন্য) র কথা। দশমিক সংখ্যার শেষের '0' র কোন মূল্য নেই। অথচ দশমিক বিন্দুর পর বা মাঝে কোন '0' থাকলে তার মূল্য আছে। যেমনঃ—

$$\cdot740=\frac{7}{10}+\frac{4}{100}+\frac{0}{1000}=\frac{700+40+0}{1000}=\frac{74\not{0}}{100\not{0}}=\cdot74$$ । তেমনি,

$\cdot79000=\cdot79$; অথচ

$\cdot074=\frac{0}{10}+\frac{7}{100}+\frac{4}{1000}=\frac{0+70+4}{1000}=\frac{74}{1000}$, সুতরাং '0' র মূল্য আছে।

কিংবা

$\cdot704=\frac{7}{10}+\frac{0}{100}+\frac{4}{1000}=\frac{700+0+4}{1000}=\frac{704}{1000}$, এখানেও '0'র মূল্য আছে।

এর পরের স্তরে আসে দশমিকের যোগ ও বিয়োগ। এতে কোন ঝামেলা নেই কেবল লক্ষ্য রাখতে হবে যেন নীচে নীচে অঙ্কগুলি বসাবার সময় দশমিক বিন্দু এক লাইনে থাকে। এ রকম ক'রলে একক, দশক, শতক বা দশমাংশ শতাংশ প্রভৃতি এক

লাইনে থাকবে ও যোগ করার সুবিধা হবে। এই স্তরের পরের স্তর হ'ল দশমিকের ভাগ ও গুণের স্তর। দশমিকের গুণ করার অনেক নিয়ম আছে। লক্ষ্য রাখতে হবে কোন্ নিয়মটি ছাত্ররা সহজে হৃদয়ঙ্গম ক'রতে পারে। বিভিন্ন নিয়মের মধ্যে কয়েকটির উল্লেখ করা হ'লঃ—

(১) যে দু'টি সংখ্যার গুণফল নির্ণয় ক'রতে হবে তাদের দশমিক বিন্দু গ্রাহ্য না ক'রে সাধারণ ভাবে গুণ ক'রে যেতে হবে। পরে যে রাশি দু'টি প্রথমে নেওয়া হয়েছিল—সেই দুই রাশিতে দশমিক বিন্দুর পর যে কয়টি অঙ্ক আছে সেই অঙ্ক কয়টির সংখ্যা নির্ণয় ক'রতে হবে। এইবার গুণফলের ডানদিক থেকে গুণে সেই কয়টি অঙ্ক বাদ দিয়ে তাদের বাম দিকে দশমিক বিন্দু বসাতে হবে। এই পদ্ধতিটি সহজ—তবে যান্ত্রিক।

(২) আর একটি পদ্ধতিতে দশমিক ভগ্নাংশকে প্রথমে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত ক'রে ঐ ভগ্নাংশগুলির গুণ ক'রতে হয়। পরে ঐ গুণফলকে আবার দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তিত করা হয়।

(৩) আর একটি পদ্ধতি হ'ল গুণক ও গুণ্যকে একরকম মানের আকারে পরিবর্ত্তিত করা। সেই মান হ'ল যে গুণক রাশি 1 ও 10 এর ভিতর থাকবে। গুণক রাশিকে এই আকারে আনতে হ'লে যত দিয়ে গুণ বা ভাগ ক'রতে হবে গুণ্যকেও ঠিক সেই রাশি দিয়ে ভাগ বা গুণ ক'রতে হবে।

এ ছাড়া আরো অনেক নিয়মে দশমিকের গুণ করা যেতে পারে। যে নিয়মটি সহজবোধ্য, সেই নিয়মটি অনুসরণ করাই শ্রেয়ঃ।

দশমিকের ভাগ করার প্রক্রিয়া ঠিক গুণেরই বিপরীত! সুতরাং গুণের সময় যে ভাবে দশমিক বিন্দু বসানো হয়, ভাগের সময় ঠিক সেই ভাবেই বসানো যেতে পারে। ভাজ্য ও ভাজককে সাধারণ সংখ্যা মনে ক'রে সাধারণ ভাবে ভাগ ক'রে যেতে হয়। তারপর ভাজ্যে দশমিকের পর যে কয়টি সংখ্যা আছে তা নির্ণয় ক'রে তার থেকে ভাজকে দশমিকের পরে যে কয়টি সংখ্যা আছে, তা বাদ দিয়ে ভাগফলে ডানদিক থেকে গুণে সেই কয়টি সংখ্যার পরে দশমিক বসাতে হবে। এ ছাড়া ভাজককে পূর্ণ সংখ্যায় পরিবর্তিত ক'রেও ভাগ করা যেতে পারে। আর একটি নিয়ম হ চ্ছে ভাজককে একটি মানে পরিবর্তিত করা (Standard form)। আরো অনেক উপায়ে দশমিকের ভাগ করা সম্ভব। কিন্তু সব চেয়ে সহজবোধ্য পদ্ধতি হ'ল— ভাজককে পূর্ণসংখ্যা করে নিয়ে ভাগ করার পদ্ধতি।

দশমিকের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ শেখার পর ছাত্রকে দশমিকের ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. শেখানো যেতে পারে। ছক কাগজের (Graph Paper) সাহায্যেও দশমিকের ভগ্নাংশের ধারণা দেওয়া যেতে পারে।

পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশ (Recurring decimal fractions) ঃ এই জাতীয় ভগ্নাংশ নির্ণয় করা অপেক্ষাকৃত কঠিন এবং ছাত্রদিগকে এই জাতীয় ভগ্নাংশ খুব বেশী ব্যবহার ক'রতেও হয় না। কিন্তু তা হ'লেও এর সম্বন্ধে একটা মোটামুটি ধারণা প্রত্যেকেরই থাকা উচিত। এই ভগ্নাংশকে আবার আবৃত্ত ভগ্নাংশও বলে।

$\frac{1}{3}$ কে যদি দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত ক'রতে হয়, তবে দেখা যাবে যে ভাগ যতই প্রসারিত করা হোক্ না কেন, ভাগের কাজটি কখনও শেষ হবে না। আবার ভাগফলে দেখা যাবে যে দশমিক অংশের পর কেবলই 3 হচ্ছে অর্থাৎ 3টি পুনঃ পুনঃ আবৃত্ত হ'চ্ছে। দশমিক ভগ্নাংশের যে অংশ পুনঃ পুনঃ আবৃত্ত হয়, তাকে বলে **আবৃত্তাংশ.** আর যে অংশের পুনঃ পুনঃ আবৃত্তি হয় না তাকে বলে **অনবচ্ছ অংশ** বা **অনাবৃত্ত অংশ**। আবৃত্ত দশমিক আবার বিশুদ্ধ আবৃত্ত ($\cdot\dot{7}$, $\cdot\dot{2}\dot{7}$) ও মিশ্র আবৃত্ত হ'তে পারে ($\cdot3\dot{0}\dot{8}$, $4\cdot5\dot{4}0\dot{8}$, ইত্যাদি)। সংক্ষেপে আবৃত্ত দশমিক লিখবার জন্য আবৃত্ত অঙ্কের মাথার উপর একটি বিন্দু ($\cdot$) বসানো হয়। কিন্তু যদি আবৃত্ত অংশে একাধিক অঙ্ক থাকে, তবে তার প্রথম ও শেষ অঙ্কের মাথায় ঐ রকম বিন্দু বসানো হয়।

সামান্য ভগ্নাংশকে দশমিকে পরিণত করার জন্য যখন ভাগ করা হয়, তখন যখনই কোন ভাগশেষ আগের কোন ভাগশেষের সমান হয়, তখনই ভাগের কাজ বন্ধ ক'রতে হয়। আগের সেই ভাগশেষটির পর ভাগফলে যে অঙ্ক থাকে, তার উপর এবং ভাগফলের শেষ অঙ্কটির উপর বিন্দু বসালে দশমিক ভগ্নাংশটি পাওয়া যাবে।

আবৃত্ত দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত ক'রতে হ'লে একটি নিয়ম মেনে চলতে হয়। ছাত্ররা কেবল নিয়মটি মুখস্থ ক'রে থাকে যে—দশমিকের ঘরে যে কয়টি ঘরের উপর আবৃত্ত চিহ্ন আছে ভগ্নাংশের হরে সেই কয়টি 9 বসাতে হয় এবং যাদের উপর চিহ্ন নেই তার জন্য 0 বসাতে হয় এবং সেই সংখ্যাটি সমস্ত সংখ্যা থেকেবাদ দিতে হয়। কিন্তু এই নিয়মটি শেখাবার আগে কয়েকটি উদাহরণ দিতে হবে—যার সাহায্যে এই নিয়মটি গড়ে তোলা যেতে পারে। প্রথমে বিশুদ্ধ আবৃত্ত দশমিকের উদাহরণ দেওয়া যাক।

ধরা যাক্ $\dot{5}$ কে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তিত করতে হবে।

এখন $\cdot\dot{5} = \cdot 5\,5\,5\,5 \ldots\ldots$

অতএব 10 গুণ $\cdot\dot{5} = 10 \times \cdot\dot{5} = 5\cdot 5\,5\,5\,5\;\;5 \ldots\ldots$ } বিয়োগ কর

এবং 1 গুণ $\dot{5} = 1 \times \cdot\dot{5} = \cdot 5\;\;5\,5\,5 \ldots\ldots$

$(10 - 1)$ বা 9 গুণ $\cdot\dot{5} = 5\cdot 0000 = 5$

$\therefore$ 1 গুণ $\cdot\dot{5} = \frac{5}{9}$.

আবার যদি $\cdot\dot{2}\dot{3}$ কে যদি সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করতে হয়, তবে

$\cdot\dot{2}\dot{3} = \cdot 232323 \ldots\ldots$

100 গুণ $\cdot\dot{2}\dot{3} = 23\cdot 23\;23 \ldots\ldots$

1 গুণ $\cdot\dot{2}\dot{3} = \cdot 23\;23 \ldots\ldots$

$\because$ 99 গুণ $\cdot\dot{2}\dot{3} = 23\cdot 0000 = 23$

$\therefore \cdot\dot{2}\dot{3} = \frac{23}{99}$

[দশমিকের পর যে কয়টি অঙ্ক থাকবে, দশমিক ভগ্নাংশকে প্রথমে 1 এর পর সেই কয়টি শূন্য দিয়ে গুণ করতে হবে ।]

তাহ'লে এর থেকে যে নিয়মটি পাওয়া গেল—, তা হ'ল ঃ—যে আবৃত্ত দশমিকে তদবস্থ অংশ নাই, তাকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করতে হ'লে দশমিক বিন্দু ও পৌনঃপুনিকসূচক বিন্দু পরিত্যাগ ক'রে যে সংখ্যা হয়, তাকে লব রূপে বসাতে হয় এবং আবৃত্ত অংশে যে কয়টি থাকে, ততগুলি 9-কে হর রূপে বসাতে হয়। এর ফলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যায়, তাকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করলেই নির্ণেয় ভগ্নাংশ পাওয়া যাবে।

মিশ্র পৌনঃপুনিক দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তন ঃ—

$7\cdot 1\dot{2}\dot{8}$ কে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তিত ক'রতে হবে।

$7\cdot 1\dot{2}\dot{8} = 7\cdot 128\;28\;28 \ldots\ldots$

1000 গুণ $7\cdot 1\dot{2}\dot{8} = 7128\cdot 28\;28 \ldots\ldots$

10 গুণ $7\cdot 1\dot{2}\dot{8} = 71\cdot 28\;28 \ldots\ldots$

$\because$ 990 গুণ $7\cdot 1\dot{2}\dot{8} = 705$ (বিয়োগ করে)

$\therefore 7\cdot 1\dot{2}\dot{8} = \frac{7057}{990} = 7\,\frac{127}{990}$

[এখানে প্রথমে 7 কে বাদ দিয়ে ·12̇4 কে ভগ্নাংশে পরিণত করে সেই ভগ্নাংশের সঙ্গে 7 পূর্ণসংখ্যা যোগ করে নির্ণেয় ভগ্নাংশে পরিণত করা যায়।]

এর থেকে যে নিয়মটি পাওয়া গেল, তা হ'ল—দশমিক বিন্দু ও পৌনঃপুনিকসূচক বিন্দু বাদ দিয়ে যে সংখ্যা হয়, তার থেকে আবৃত্ত অংশের পূর্ব পর্যন্ত সমস্ত অংশটুকু নিয়ে যে সংখ্যা তা বিয়োগ ক'রতে হবে। এই বিয়োগফলটি হবে নির্ণেয় ভগ্নাংশের লব। আবৃত্ত অংশে যতগুলি অঙ্ক আছে ততগুলি 9 এবং সেগুলির ডানদিকে তদবস্থ অংশে যতগুলি অঙ্ক আছে, ততগুলি শূন্য বসিয়ে যে সংখ্যাটি পাওয়া যাবে সেটি হবে ভগ্নাংশের হর। বার বার চর্চার ফলে ছাত্ররা এই জাতীয় ভগ্নাংশ সম্বন্ধে একটা পরিষ্কার ধারণা অর্জন ক'রতে পারবে।

বর্গমূল (Square root) :—কোন সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারাই গুণ করলে যে গুণফলটি পাওয়া যায়, তাকে প্রথম সংখ্যাটির দ্বিঘাত বা বর্গ (Square) বলে। আর প্রথম সংখ্যাটিকে ঐ গুণফলের বর্গমূল (Squire root) বলে। যেমন, $5\times5=25$, সুতরাং 25 সংখ্যাটি 5 এর বর্গ ; আবার 25 এর বর্গমূল হ'ল 5 যে কোন সংখ্যা তার বর্গের বর্গমূল হবেই। কোন সংখ্যার বর্গ বুঝাতে হ'লে সেই সংখ্যাটির ডানদিকে একটু উপরে 2 লিখতে হয় যেমন

4^2 = 4 এর বর্গ $= 4\times4=16$

আবার বর্গমূল বুঝতে হ'লে সেই সংখ্যার বাম দিকে '$\surd$' চিহ্ন বসাতে হয়। আবার সংখ্যাটির ডান দিকে একটু উপরে $\frac{1}{2}$ লিখেও বর্গমূল প্রকাশ করা যায়। যেমন :— $5^{\frac{1}{2}}$ এর অর্থ 5 এর বর্গমূল। অতএব $5^{\frac{1}{2}}$ এবং $\sqrt{5}$ একই।

বর্গমূল সম্বন্ধে শিক্ষা দেবার আগে দেখতে হবে ছাত্রদের বর্গ সম্বন্ধে ভালো ধারণা আছে কি না। বর্গের ধারণা হ'লে তারপর আসবে বর্গমূলের ধারণা।

বর্গমূল শেখাতে হ'লে প্রথমে উৎপাদকের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় করার নিয়ম শেখাতে হবে। এইটিই বর্গমূল নির্ণয়ের সহজ উপায়। উৎপাদকের প্রত্যেক জোড়ার জন্য বর্গমূল একটি ধরতে হবে। যেমন $\sqrt{576} = \sqrt{2\times2\times2\times2\times2\times2\times3\times3} = \sqrt{2^6\times3^2} = 2^3\times3 =$ ৪ $\times 3 = 24$, অর্থাৎ তিন জোড়া 2 এর জন্য তিনটি 2 এবং এক জোড়া 3 এর জন্য একটি 3 নেওয়া হয়েছে। ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করার সময় লব ও হরের বর্গমূল পৃথকভাবে নির্ণয় করতে হয়। ঐ বর্গমূল দু'টিকে লব ও হরের স্থানে বসালে যে ভগ্নাংশটি পাওয়া যাবে সেইটিই প্রদত্ত ভগ্নাংশের বর্গমূল হবে। তবে ছাত্রদিগকে একটি বিষয় বিশেষ ভাবে শিক্ষা দিতে হবে। সেটি হ'ল—মিশ্র সংখ্যাকে বা মিশ্র ভগ্নাংশকে প্রথমে অপ্রকৃত ভগ্নাংশে পরিণত ক'রে নিতে

হবে। দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করতে হ'লে সেটিকে আগে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করে নিতে হবে।

[কোন প্রদত্ত সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করতে হ'লে দেখতে হবে কোন্ সংখ্যাকে আবার সেই সংখ্যা দিয়েই গুণ করলে গুণফল ঐ প্রদত্ত সংখ্যাটি হয়। এইজন্য প্রদত্ত সংখ্যাটির উৎপাদকগুলি নির্ণয় করে সংখ্যাটিকে উৎপাদকগুলির গুণফলরূপে প্রকাশ করা হয়।]

আর একটি নিয়মে বর্গমূল শেখানো হয়। এই নিয়মে সাধারণতঃ বর্গমূল নির্ণয় করতে হ'লে দু'টি করে অঙ্ক একসঙ্গে করে জোড়া করে নিতে হয়। এর কারণ হচ্ছে (শিক্ষার্থীরা আগেই জানে) এক অঙ্কের অথবা দুই অঙ্কের সংখ্যার বর্গমূল এক অঙ্কের সংখ্যা। তিন অথবা চার অঙ্কের সংখ্যার বর্গমূল হয় দুই অঙ্কের সংখ্যা ইত্যাদি। ভাগ ক'রে বর্গমূল নির্ণয় করার পদ্ধতিটি উৎপাদকের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয়ের পদ্ধতিরই অনুরূপ। অঙ্কগুলির জোড়া নির্ণয় ক'রতে হয় বামদিক থেকে ডানদিকে। দশমিক থাকলে দশমিকের বামেও জোড়া ক'রে নিতে হয় এবং সেই অনুসারে পূর্ণ সংখ্যা হবে। বর্গাঙ্কিত কাগজ বা বর্গক্ষেত্রের ছবির সাহায্যেও বর্গমূল সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া যায়। আর এই ছবির সাহায্যে ভাজক কেন সব সময় ভাগফলের দ্বিগুণ কর'তে হয় তা বুঝিয়ে দেওয়া যায়।

অনুপাত ও সমানুপাত (Ratio and Proportion) :—ছাত্ররা ঐকিক নিয়ম সম্বন্ধে শিক্ষা লাভ করার পর অনুপাত ও সমানুপাত সম্বন্ধে শিক্ষা লাভ ক'রবে। অনুপাত ও ভগ্নাংশ প্রায় সমগোত্রীয়। একটি সংখ্যার থেকে আর একটি সংখ্যা বা কোন জিনিসের পরিমাণ থেকে আর একটি জিনিসের পরিমাণ কতগুণ (বেশী বা কম)—তা যে সংখ্যাটি প্রকাশ করে তাকেই অনুপাত বলে। যেমন 10 টাকা ও 2 টাকার অনুপাত হল 5 কারণ 10 টাকা 2 টাকার থেকে পাঁচগুণ বেশী।

একটা জিনিস প্রায়ই লক্ষ্য করা যায়। ছাত্ররা অনুপাতের অন্তর্নিহিত অর্থটি হৃদয়ঙ্গম না ক'রেও কিন্তু অনুপাত নির্ণয় করতে পারে। এটা করে অবশ্য সম্পূর্ণ যান্ত্রিক ভাবেই। অনুপাত ও সমানুপাত যে তুলনামূলক এটা তারা প্রথম অবস্থাতে বুঝতে পারে না। এই জন্য প্রাথমিক স্তরে বাস্তব উদাহরণের সাহায্যে অনুপাত সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া উচিত। এক ফুট মাপের স্কেল ও গজের মাপকাঠির সাহায্যে কিংবা মার্বেল প্রভৃতির সাহায্যে অনুপাত সম্বন্ধে প্রাথমিক শিক্ষা দেওয়া যেতে পারে। তারপর অমূর্ত্ত বস্তু, সংখ্যা প্রভৃতি প্রয়োগ করা যেতে পারে। অনুপাত সম্বন্ধে একটা ধারণা অর্জন করার পর ছাত্রদের অনুপাতের চিহ্ন সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে হবে। ভাগও

এক জাতীয় অনুপাত। ভাগের চিহ্ন হ'ল ÷, কিন্তু সুবিধার জন্য অনুপাতের চিহ্নে ভাগ চিহ্নের মাঝখানের দাঁড়িটি বাদ দেওয়া হয় (:)। আর একটা জিনিস ছাত্রদের বুঝিয়ে দিতে হবে যে অনুপাত নির্ণয় করা হয় প্রথমটিকে দ্বিতীয়টি দ্বারা ভাগ ক'রে। এই ভাগ করা চলে একমাত্র সমজাতীয় জিনিসের মধ্যে। কাজেই অনুপাত যখন নির্ণয় করা হয়, তখন সমজাতীয় জিনিসের মধ্যেই নির্ণয় করা হয়। আর একটি প্রয়োজনীয় জ্ঞাতব্য বিষয় হ'ল দুটি জিনিসের মধ্যে অনুপাতকে ইচ্ছেমত বাড়ানো বা কমানো যেতে পারে কিন্তু তাতে মূল জিনিসগুলির মানের কোন পরিবর্তন হয় না। যেমন—

1·50 প ও 6 টাকার অনুপাতকে 1 : 4 বা 2 : 8 বা 4 : 16 বা $\frac{3}{2}$: 6 ইত্যাদি বিভিন্ন ভাবে লেখা হলেও 1·50 ও 6 টাকার মধ্যে অনুপাতটি সব সময় একই থাকছে।

অনুপাতের পর আসে সমানুপাত। অবশ্য সমানুপাত নির্ণয় করতে হ'লে ছাত্রদের ভগ্নাংশের গুণ বা ভাগ করার মতো পূর্বজ্ঞান থাকা বাঞ্ছনীয়। সমানুপাত সম্বন্ধে প্রথমে এই ভাবে শিক্ষা দেওয়া যেতে পারে :—

4 গজ দড়ির সঙ্গে 12 গজ দড়ির যে সম্পর্ক, 8 গজ দড়ির সঙ্গে সেই সম্বন্ধ কত গজ দড়ির ?

10 টাকার সঙ্গে 100 টাকার যে সম্পর্ক, কত টাকার সঙ্গে 50 টাকার সেই সম্পর্ক ?

যখন দু'টি অনুপাত সমান হয়, তখন তাকে সমানুপাত বলে। যেমন 4 গজ দড়ি ও 12 গজ দড়ির অনুপাত হ'ল 4 : 12 বা 1 : 3 এখন 8 গজের সঙ্গে কত গজের অনুপাত 1 : 3 ?

$$8 : x = 1 : 3 \text{ or } \frac{8}{x} = \frac{1}{3} \text{ or } x = 24 \text{ গজ}$$

সুতরাং 8 গজ 24 গজের মধ্যে সেই একই অনুপাত। এই রকম দু'টি অনুপাতের বিবৃতিকে সমানুপাতের বিবৃতি বলা হয়, আর এটি লেখা হয় এইভাবে :—

4 : 12 : : 8 : 24

সমানুপাত সম্বন্ধে ছাত্রদের ধারণা পরিষ্কার হ'লে কয়েকটি অঙ্ক দিয়ে সমানুপাতের অর্থ সহজ করে দেওয়া যায়। তারপর বিভিন্ন জাতীয় সমানুপাত (Direct এবং Increase) সম্বন্ধেও ছাত্রদের শিক্ষা দেওয়া যেতে পারে। বাস্তব জীবনের দৈনন্দিন সমস্যা থেকে সমানুপাতের অঙ্ক নির্বাচন ক'রলে ভালো হয়।

সমানুপাতের জন্য গণিতে পৃথক কোন অধ্যায়ের প্রয়োজন নেই। ভগ্নাংশের অধ্যায়েই অনুপাত ও সমানুপাতকে অন্তর্ভুক্ত করা যেতে পারে।

মেট্রিক পদ্ধতি (**Metric System**) :—দশমিকের ভাগ ও গুণের পদ্ধতির উপর মেট্রিক পদ্ধতিটি প্রতিষ্ঠিত। অনেক আগের থেকেই ভারতবর্ষে ওজন ও মুদ্রার ব্যাপারে মেট্রিক পদ্ধতির প্রচলন করার প্রচেষ্টা চলে আসছিল। প্রথম দিকে অবশ্য বিশেষ সাফল্য অর্জিত হয় নাই। 1955 সালে কেন্দ্রীয় সরকার পরিকল্পনা কমিশন ও রাষ্ট্র-সরকারগুলির সঙ্গে আলোচনা ক'রে সমগ্র ভারতব্যাপী ওজন ও মুদ্রার ক্ষেত্রে সমনীতি মেট্রিক পদ্ধতি প্রচলন করার পরিকল্পনা গ্রহণ করেন। এর মূখ্য উদ্দেশ্য ছিল সমগ্র দেশে পরিমাপের ক্ষেত্রে সমতা আনয়ন করা। 1955 সালেই লোকসভার অধিবেশনে মেট্রিক পদ্ধতিতে ওজনের পরিকল্পনাটি গ্রহণ করা হয়। 1957 সালের 1লা এপ্রিল থেকে মেট্রিক পদ্ধতিতে মুদ্রা গণনার (দশমিক মুদ্রা) পদ্ধতিটি প্রচলিত হয়। এর ফলে আগেকার আনা-পয়সা-পাই ইত্যাদির পরিবর্ত্তে নয়া পয়সা (পরবর্ত্তী কালে পয়সা, পয়সে) ব্যবহৃত হতে থাকল। মেট্রিক পদ্ধতির ওজন প্রচলিত হয় 1956 সাল থেকে। সরকারের অবশ্য পুরোপুরি পরিবর্তনের জন্য দশ বৎসর সময় দেবার পরিকল্পনাও ছিল। 1960 সালের 1লা অক্টোবর থেকে ব্যবসা বাণিজ্যে মেট্রিক পদ্ধতিতে ওজন করার পদ্ধতিটি আবশ্যিক করা হয়। সেই থেকে ওজন মণ-সের-ছটাকের পরিবর্তে কুইন্টাল-কিলোগ্রাম-গ্রাম ইত্যাদিতে করা হয় এবং বিদেশে মালপত্র রপ্তানী করার সময়ও ঐ ওজন ব্যবহৃত হয়। প্রথম প্রথম এই পদ্ধতি ব্যবহারে কিছু অসুবিধাও ছিল। প্রাচীন ও নূতন, দু'টি পদ্ধতি যখন পাশাপাশি প্রচলিত ছিল তখন অসুবিধার মাত্রা বেশীই ছিল। সরকার থেকে "পরিবর্তন তালিকা"ও (Conversion Table) প্রকাশ করা হয়। কিন্তু প্রাচীন পদ্ধতি সম্পূর্ণ অবলুপ্ত হবার পর অসুবিধার মাত্রাও অনেক কমে যায়। দু-একটি অসুবিধার উদাহরণ দেওয়া যাক :—

1 আনা = 6 নঃ পঃ , 1 টাকা = 16 আনা = 16 × 6 = 96 নঃ পঃ

কিন্তু 1 টাকা = 100 নঃ পঃ (স্বীকৃত)

তেমনি 3 আনা = 18 নঃ পঃ (হিসেব মত) না হয়ে 19 নঃ পঃ (স্বীকৃত)। অবশ্য গোড়াতেই 1 টাকা = 100 নঃ পঃ ধরে সরকার থেকে পরিবর্ত্তনের সূত্র নির্ণয় করা হয়েছিল।

তেমনি 18 সের = 16 কিলোগ্রাম ; আবার 36 সের = 33 কিলোগ্রাম ; কিন্তু

হওয়া উচিত ছিল 32 কিলোগ্রাম। এগুলিকে এখন অবশ্য দূরীভূত করা সম্ভব হয়েছে।

মেট্রিক পদ্ধতির সুবিধা :— মেট্রিক পদ্ধতি ব্যবহারের কতকগুলি সুবিধা আছে। তার মধ্যে প্রধান প্রধান সুবিধাগুলি হ'ল :—

(১) শেখা সহজ, ব্যবহার করা আরো সহজ।

(২) সমস্ত দেশে একই রকম পরিমাপ ব্যবহার করা সম্ভব।

(৩) হিসেব পত্র খুব সহজে এবং নির্ভুলভাবে করা সম্ভব। কেবলমাত্র দশমিকের সাহায্যেই মানের পরিবর্ত্তন করা যায়।

পদ্ধতিটির সুবিধার জন্য হয়তো কিছুদিনের মধ্যে এটি একটি আন্তর্জাতিক পদ্ধতি হিসাবে স্বীকৃতি অর্জন ক'রবে। দশমিকের অঙ্ক করার সময় ছাত্ররা মেট্রিক পদ্ধতির নিয়মগুলিও শিখতে পারে। অতিরিক্ত শেখার মধ্যে তাকে বিভিন্ন এককের নামগুলি শিখতে হবে। এইগুলি প্রয়োজন মত বাস্তব অভিজ্ঞতার উপর ভিত্তি করে তাকে শেখানো যেতে পারে।

শতকরা (Percentage)—শতকরার অর্থ হ'ল—প্রতি শতে ; অর্থাৎ একশত'র মধ্যে কত। শতকরাকে আমরা এমন একটি ভগ্নাংশ বলতে পারি যার হর 100। যেমন 5%এর অর্থ হল $\frac{5}{100}$ ইত্যাদি। সেইজন্য ভগ্নাংশ শিক্ষা দেবার সময়ই শতকরা সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া চলতে পারে। কিন্তু শতকরা হিসাব কেন করা হয়, সে বিষয়ে ছাত্রদিগকে পরিষ্কার জ্ঞান দিতে হবে। যেখানে বিভিন্ন মাপের মধ্যে তুলনা করতে হয়, সেখানে একটি প্রামান্য মাপের প্রয়োজন হয়। 100কে এইরূপ একটি প্রমাণ সংখ্যা বলে ধরে নেওয়া হয়েছে।

শতকরার চিহ্নটির (%) বিবর্ত্তন সম্বন্ধেও ছাত্রদের একটা ধারণা গড়ে তোলা যায়। শতকরা বলতে যেহেতু প্রতি শ'তে (অর্থাৎ 100 দ্বারা ভাগ) বোঝায়, সেইজন্য প্রথম অবস্থাতে তা প্রকাশ করা হত (÷) চিহ্নের সাহায্যে। পরে নানা বিবর্ত্তনের মধ্যে বর্তমান চিহ্নটি এসেছে।

শতকরার অধিকাংশ অঙ্কই অনুপাত ও সমানুপাতের অঙ্ক। সুদকষা, লাভ ও ক্ষতি, ষ্টক-ডিস্কাউণ্ট প্রভৃতি বিভিন্ন ক্ষেত্রে শতকরা হিসাব ব্যবহৃত হয়। তবে ব্যবসায় জগত বা দৈনন্দিন জীবন থেকে সমস্যা সংগ্রহ করে শতকরা হিসাবে সেগুলি সমাধান করলে ভালো হয়।

সুদকষা (Simple Interest)—শতকরা হিসাব বেশ ভালো করে বুঝলে তারপর সুদকষা সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া উচিত। সুদকষার মূল অর্থ হ'ল সুদ নির্ণয়

করা। এখন এই সুদ কি বা সুদ কেন দেওয়া হয়, সে বিষয়ে ছাত্রদিগকে শিক্ষা দিতে হবে। তবে শিশু অবস্থাতে ধার দিয়ে সুদ আদায় করা সম্বন্ধে ধারণা না দিয়ে ব্যাঙ্কের সুদ, পোষ্ট অফিস সেভিংস ব্যাঙ্কের সুদ ইত্যাদি সম্বন্ধে ধারণা দেওয়াই ভালো। তারপর সুদ নির্ণয়ের পদ্ধতিটি তাকে ভালো করে বুঝিয়ে দিতে হবে। এ সম্বন্ধে কোন সূত্র যেন সে তোতাপাখীর মত মুখস্ত না করে। ঐকিক নিয়ম সম্বন্ধে জ্ঞান থাকলে সুদ নির্ণয় করা সহজ হয়।

সুদ কষার কতকগুলি অঙ্ক করার পর ছাত্রদিগকে এই সূত্রটি ব্যবহার করার নির্দেশ দেওয়া যেতে পারে।

$$S.\ I = \frac{\textbf{Principal} \times \textbf{Rate} \times \textbf{Time}}{100} \text{ বা } I = \frac{P \times R \times T}{100}$$

$$A = P + I$$

গ. সা. গু. ও ল. সা. গু (**H. C. F.** and **L. C. M.**) **:—** দুই বা ততোধিক সংখ্যার গ. সা. গু নির্ণয় করা যায় সচরাচর দু'ভাবে। (১) উৎপাদকের সাহায্যে এবং (২) সংখ্যাকে পুনঃ পুনঃ ভাগ করে। ধরা যাক্ 473 এবং 129 এর গ. সা. গু. নির্ণয় করতে হবে।

উৎপাদকের সাহায্যে :—11 | 473 / 43 ; 3 | 129 / 43 দুইটির মধ্যে সাধারণ উৎপাদকের উৎপাদক হল 43, অতএব গ. সা. গু = 43.

ভাগের সাহায্যে : —129)473(3

```
      387
      ---
       86 ) 129 ( 1
             86
          -------
           43)86(2
              86
          -------
```

∴ গ. সা. গু = 43.

পুনঃপুনঃ ভাগের ফলে গ. সা. গু কেমন করে নির্ণয় করা হয়, সেটি ছাত্রদের পরিষ্কার বোঝা দরকার। নীচু শ্রেণীতে ছাত্ররা সম্পূর্ণ যান্ত্রিক ভাবে ভাগ করে যায়। কিন্তু উঁচুশ্রেণীতে কয়েকটি উপপাদ্যের সাহায্যে নিয়মটি ব্যাখ্যা করা যেতে পারে।

প্রথম উপপাদ্য :—যদি x সংখ্যাটি y সংখ্যার গুণনীয়ক হয়, তবে x সংখ্যা y সংখ্যার যে কোন গুণিতকেরও গুণনীয়ক হবে।

x সংখ্যা y সংখ্যার গুণনীয়ক

অর্থাৎ $y = x \times K$ (K একটি পূর্ণসংখ্যা)

$$\therefore\ y \times a = (x \times K) \times a$$
$$= x \times (K \times a)$$

অর্থাৎ x সংখ্যা $y \times a$ সংখ্যার গুণনীয়ক।

দ্বিতীয় উপপাদ্য :—যদি x সংখ্যাটি y ও z সংখ্যা দুইটির সাধারণ গুণনীয়ক হয়, তবে x সংখ্যাটি y ও z সংখ্যা দুইটির যে কোনও গুণিতকের যোগ বা বিয়োগ ফলেরও সাধারণ গুণনীয়ক হবে। অর্থাৎ x সংখ্যাটি $my+ \ nz$ এর সাধারণ গুণনীয়ক হবে।

তৃতীয় উপপাদ্য :—x দ্বারা y কে ভাগ করলে যদি z অবশিষ্ট থাকে, তবে x এবং y এর গ. সা. গু. y এবং z এর গ. সা. গু. এর সমান হবে। দুটি সংখ্যার গ. সা. গু. কেন পুনঃ পুনঃ ভাগ ক'রে পাওয়া যায়—তা নীচের উদাহরণ থেকে বোঝা যাবে। ধরা গেল X ও Y দুটি সংখ্যা যাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করতে হবে।

$$\begin{array}{l}
X)\,Y\,(P \\
\quad PX \\
\hline
\quad Z)\,X\,(Q \\
\qquad ZQ \\
\hline
\qquad L)\,Z\,(R \\
\qquad\quad LR \\
\hline
\qquad\quad M)\,L\,(S \\
\qquad\qquad MS \\
\hline
\end{array}$$

Lকে M দ্বারা ভাগ করার পর আর কোন অবশিষ্ট নাই। সুতরাং L ও Mএর গ.-সা. গু. M।

এখন X ও Y এর গ. সা. গু.

$= Z$ ও X এর গ. সা. গু.

$= L$ ও Z এর গ. সা. গু.

$=$ M ও L এর গ. সা. গু.

সুতরাং X ও Y এর গ. সা. গু. $= M$ হবে।

ল. সা. গু. $\times$ গ. সা. গু. $=$ সংখ্যা দুইটির গুণফল।

ল. সা. গু. নির্ণয় করার সময় দুটি রাশি থাকলে একটি রাশির সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র গুণিতকটি নির্ণয় ক'রতে হবে এবং সেই গুণিতকটি দ্বিতীয় সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য হবে। কিন্তু এই সূত্রটি ব্যাখ্যা করার সময় বাস্তব ও প্রকৃত উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করলে ভালো হয়।

ধরা যাক্ সংখ্যা দু'টি হল 15 এবং 10.

এখন $15=5\times3$; $10=5\times2$

সংখ্যা দুইটির গ. সা. গু $=5$ এবং ল. সা. গু $=30$

∴ ল. সা. গু × গ. সা. গু $=5\times30=150$

আবার সংখ্যা দুইটির গুণফলও $15\times10=150$

উদাহরণটিতে দেখা গেল, সংখ্যা দুইটির ল. সা. গু = তাদের গ. সা. গু × অন্য উৎপাদকগুলি

আবার এক একটি সংখ্যা = গ. সা. গু × অপর উৎপাদক

∴ **সংখ্যা দুইটির গুণফল** = (গ. সা. গু × অপর উৎপাদক) × (গ. সা. গু × অপর উৎপাদক)

= গ. সা. গু × অন্য উৎপাদকগুলি × গ. সা. গু.

= **গ. সা. গু × ল. সা. গু**।

অঙ্ক সম্বন্ধে কয়েকটি জ্ঞাতব্য বিষয়ঃ—গণিতের বিষয়বস্তু ও পদ্ধতির কতকগুলি দিকে বিশেষ দৃষ্টি দেওয়া বাঞ্ছনীয় বলে মনে হয়। এগুলি সম্বন্ধে সংক্ষিপ্ত আলোচনা করা হ'ল।

(ক) **অপ্রয়োজনীয় যাথার্থ্য (False accuracy)**: গণিতে যা উত্তর চাওয়া হয়েছে বা যে কয়টি স্তর উল্লেখ করতে বলা হয়, তার বাইরে যাওয়ার একটা স্বাভাবিক প্রবণতা ছাত্রদের মধ্যে দেখা যায়। এ অভ্যাসটি অত্যন্ত বদভ্যাস এবং এটি বন্ধ করা প্রয়োজন। কেন বন্ধ করা প্রয়োজন—তা ছাত্রদের যুক্তির সাহায্যে বুঝিয়ে দিতে হবে। অনেক সময় দৈর্ঘ্য মাপ করতে গিয়ে এক ইঞ্চির আট ভাগের একভাগ বা দশ ভাগের এক ভাগ কিংবা দশমিকের অষ্টম বা দশম স্থান পর্যন্ত আসন্নমান ছাত্ররা নির্ণয় করে থাকে। তারা ভাবে হিসাবে তারা আরো নিখুঁত, আরো সূক্ষ্ম হচ্ছে। কিন্তু ঐ জাতীয় আসন্ন মান নির্ণয় করা কেবল অপ্রয়োজনীয়ই নয়, অকিঞ্চিৎকরও। যত দূরে যাওয়া যাবে ততই মানের যাথার্থ্য ক্রমশঃ কমে আসবে। তেমনি জ্যামিতির সম্পাদ্যে

অনেক সময় চাওয়া না হলেও তারা প্রমাণ দিতে অভ্যস্ত হয়ে থাকে। এও বন্ধ করতে হবে।

(খ) **অনুমান** (Estimate :—কোন সমস্যার সঠিক সমাধান করতে অনুমান প্রয়োগ করার কৌশলটি ছাত্রদের শিক্ষা দিতে পারলে অনেক ক্ষেত্রে হয়রাণির হাত থেকে তাদের বাঁচানো যায়। সমাধান বা উত্তরটি ছোটই হোক .আর বড়ই হোক্ অনুমানের সাহায্যে তার প্রকৃতি সম্বন্ধে একটা আভাস পাওয়া যায়। যেমন: ছাত্রকে হয়তো 488 এবং 27 এর গুণফল নির্ণয় করতে বলা হয়েছে। গুণফল নির্ণয় করার আগে সে অনুমান করে নিতে পারে গুণফল কোন সংখ্যার কাছাকাছি হবে। নিশ্চয় গুণফলটি 15,000 (500×30) থেকে কম এবং 12,200 (488×25) থেকে বেশী। এ জানা থাকলে তার পক্ষে গুণফল নির্ণয় করার সুবিধা হয় বা গুণ ঠিক হচ্ছে কিনা—সে তা বুঝতে পারে। তবে লক্ষ্য রাখতে হবে অনুমান প্রক্রিয়াটি যেন বেশীর ভাগ ক্ষেত্রেই মৌখিক হয় এবং সময় যেন তার জন্য বেশী না লাগে। অনুমান প্রক্রিয়াটিকে প্রাথমিক ভাবে 'মিল করার' (check) প্রক্রিয়া বলা যেতে পারে। এর ফলে ছাত্ররা মারাত্মক ভুল করার হাত থেকে নিষ্কৃতি পায়।

(গ) **মিল করা** (**Check**) :—কোন সমস্যার সমাধান হয়ে গেলে বা কোন অঙ্কের উত্তর নির্ণীত হয়ে গেলে সেই সমাধানটি বা উত্তরটি যে নির্ভুল হয়েছে তা পরীক্ষা করে দেখা দরকার। অঙ্কটি দ্বিতীয়বার না করেও উত্তরটি মিল করা সম্ভব। অনেক গণিতবিদ বলে থাকেন—ছাত্রকে প্রথম থেকেই নির্ভুলভাবে অঙ্ক করার অভ্যাসটি অর্জন করিয়ে দিতে হবে। ("Train the child to absolute correctness the first time") কিন্তু অনেক কারণের জন্য তা সম্ভব হয় না। ছাত্ররা ভুল করেই থাকে আর এই ভুল করার সম্ভাবনা থাকে বলেই তারা উত্তরটির 'সত্যতা যাচাই করতে চায়। কিন্তু প্রশ্ন হ'ল: সে এই সত্যতা যাচাই করবে কোথা হতে? অনেক গণিত পুস্তকে উত্তর দেওয়া থাকে; তার সাহায্যে যাচাই করা যেতে পারে। আবার ছাত্র নিজেই তার উত্তরের সত্যতা যাচাই করতে পারে। এর মধ্যে ছাত্রের নিজের চেষ্টাতে সত্যতা যাচাই করার পদ্ধতিটিই সবচেয়ে ভালো মনে হয়, কারণ এতে তার আত্মবিশ্বাস বাড়ে। তাছাড়া উত্তরের সত্যতা যাচাই করাও তো একটি সমস্যার সমাধান করা। ছাত্র সঠিক উত্তর চায়। সে সঠিক উত্তর খুঁজে বের করার পদ্ধতিটি নিজে নিজেই আবিষ্কার করবে। তার উত্তরটিই যে সঠিক উত্তর, সেটি সে নিজে নিজেই পরীক্ষা করবে। ছাত্রজীবনের শেষে বাস্তব জীবনে তার সামনে অনেক সমস্যা আসবে। সেগুলি সমাধান করার সময় তার সাহায্যের

জন্য তখন কোন পাঠ্যপুস্তক বা শিক্ষক থাকবে না। কিন্তু সমস্যাগুলির সঠিক সমাধান হওয়া চাই। সেই জন্য প্রথম থেকেই নিজে নিজে সমাধানটি যাচাই করার ক্ষমতা অর্জন করতে হবে।

শ্রেণীকক্ষের অঙ্ক ইত্যাদি যাচাই করার বিভিন্ন পদ্ধতি আছে। এর মধ্যে কতকগুলির উল্লেখ করা হ'ল। যোগের উত্তর যাচাই করার পদ্ধতি আমরা আগেই আলোচনা করেছি। পাশাপাশি রেখে বা উপর-নীচে যোগ ক'রে এবং 9 বাদ দিয়ে যোগফল ঠিক হয়েছে কি না যাচাই করা যায়। বিয়োগ অঙ্কে 9 বাদ দিয়ে বিয়োগফল যাচাই করা যায়। আবার বিয়োগ ফলের সঙ্গে বিয়োজ্য যোগ ক'রেও উত্তরের সত্যতা যাচাই করা সম্ভব। গুণ অঙ্কও 9 বাদ দিয়ে মেলান যায়। আবার ভাগ ক'রেও গুণের উত্তর মেলান সম্ভব। তেমনি ভাগ অঙ্কও 9 বাদ দিয়ে মেলান যায়, আবার গুণ ক'রেও মেলান যায়, কারণ ভাজক × ভাগফল + অবশিষ্ট = ভাজ্য। এই ভাবে বিভিন্ন সমস্যার সমাধানগুলি মেলান সম্ভব। যেখানে অঙ্ক ছোট থাকে, সেখানে সমাধানটির পুনরাবৃত্তি করাই ভালো। বড় অঙ্ক হ'লে প্রত্যেকটি স্তর ভালোভাবে পরীক্ষা করে দেখতে হয়। এর জন্য অনেকে 'রাফ্' অঙ্ক করার পক্ষপাতী। এতে প্রাথমিক ভাবে একটা অনুমানপ্রসূত যাচাই হয়ে যায়। আবার বীজগণিতের সমাধান জাতীয় সমস্যাতে এমন কতকগুলি সর্ত্ত আরোপ করা থাকে যে সঠিক উত্তর না হলে আপনা আপনি তা ধরা পড়ে যায়। বর্গমূল জাতীয় সমস্যাগুলির সমাধানও খুব সহজে মেলান সম্ভব।

(ঘ) **রাফ্ কাজ (Rough work)** :—অনেক ছাত্র পাকাপাকি ভাবে অঙ্কটি করার আগে 'রাফে' অঙ্কটি করে থাকে। অনেক শিক্ষকও সঠিক উত্তরের জন্য ছাত্রদিগকে এই রাফ্ কাজ করাতে উৎসাহিত ক'রে থাকেন। কিন্তু এই পদ্ধতিটি সবসময় গ্রহণযোগ্য নয়। 'রাফ্-কাজ' (রাফ্ কথাটির অর্থ হ'ল আবর্জনা) কথাটির মধ্যেই একটা নীচতাবোধ আছে। ছাত্ররাও যেন রাফ্ কাজকে ঠিকমত মর্য্যাদা দেয় না। ফলে তারা সংখ্যাগুলি স্পষ্ট ও পরিষ্কার করে লেখে না, বাক্যগুলিও অসম্পূর্ণ থেকে যায়। তাছাড়া প্রত্যেকটি অঙ্ক দু'বার ক'রে ক'রতে হয় বলে সময় ও পরিশ্রম অনেক বেশী লাগে। রাফ্ কাজের অস্পষ্টতা ও অসম্পূর্ণতার জন্য পরিষ্কার ভাবে অঙ্কটি লিখবার সময় ভুল হওয়া স্বাভাবিক। এইজন্য পুরো অঙ্কটি রাফে করার অভ্যাসটি বন্ধ করতে হবে। যে সমস্ত হিসাব অত্যন্ত প্রয়োজনীয়, কেবল সেইগুলিই রাফে করা যেতে পারে। এর জন্য একটি আলাদা কাগজ ব্যবহার করা যেতে পারে। আবার যে পৃষ্ঠাতে অঙ্কটি পরিষ্কার ভাবে লেখা হবে, সেই পৃষ্ঠার একদিকে মার্জিন (1″ বা $1\frac{1}{2}$″)

রেখে তাতেও করা যেতে পারে। এতে পরিষ্কার পরিচ্ছন্ন ভাবে অঙ্ক করার অভ্যাস অর্জিত হবে, ভুল হবার সম্ভাবনাও অনেক কম হবে। অঙ্কটি হয়ে গেলে উত্তরটি ঠিক হয়েছে কি না, তা প্রতিটি স্তর পরীক্ষা করে দেখতে হবে।

(ঙ) **গণিতে পঞ্চম-নিয়ম —সাধারণ জ্ঞান (Fifth rule in Arithmetic—Common Sense)** :—গণিতের মূল নিয়ম হ'ল চারটি—যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ। ছাত্ররা যান্ত্রিকভাবেই নিয়মগুলি শিখে থাকে। আবার অনেক ক্ষেত্রে তারা নিয়মগুলি অন্তর্দৃষ্টির সাহায্যে শিখে বিভিন্ন ক্ষেত্রে প্রয়োগ ক'রতেও পারে। কিন্তু কখন কোন্ পরিস্থিতিতে কোন্ নিয়মটি প্রয়োগ ক'রতে হবে—তা ঠিক করার জন্য ছাত্রকে তার সাধারণ জ্ঞানের সাহায্য নিতে হবে। তা ছাড়া কোন একটি অঙ্ক করতে গেলে একটি স্তরের পর অপর কোন্ স্তরটি আসবে তা জানা না থাকলে সঠিক সমাধানে কিছুতেই পৌছানো যাবে না। আবার সমস্যাগুলিও সব এক জাতীয় হয় না। কেবলমাত্র যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করার পদ্ধতিগুলি জানা থাকলেই সমস্যার সমাধান করা সম্ভব নয়। তার উপর আর একটি জিনিস প্রয়োগ করতে হয়—আর সেটি হ'ল সাধারণ জ্ঞান।

ছাত্রকে ঠিকমত গণিত শিক্ষা দিতে হ'লে কেবলমাত্র সংখ্যাজ্ঞান ও কয়েকটি মূলনীতি শেখানোই যথেষ্ট নয়। ভবিষ্যৎ জীবনে সে যাতে সার্থক ভাবে গণিত প্রয়োগ করতে পারে—সে বিষয়েও তাকে শিক্ষা দিতে হবে। গণিত সম্বন্ধে, তার সঠিক পদ্ধতি সম্বন্ধে একবার জ্ঞান আহরণ করতে পারলে ভবিষ্যতে আর কোন অসুবিধা হবার সম্ভাবনা থাকে না।

গণিতে দক্ষতা অর্জন করতে হলে সাধারণ জ্ঞানের প্রয়োগ অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। সেই জন্য ছাত্রদের জ্ঞানের পরিধি এবং তার প্রয়োগ ক্ষমতা যাতে বৃদ্ধি পায়-তার ব্যবস্থা করতে হবে। ছাত্ররা যে সমস্ত সমস্যার সঙ্গে পরিচিত, তার থেকে কিছু পৃথক কতকগুলি সমস্যা তাদের সামনে উপস্থাপিত করা যেতে পারে। এগুলির সমাধান করতে গিয়ে ছাত্রকে তার সাধারণ জ্ঞান প্রয়োগ করতেই হবে। তাছাড়া কতকগুলি সমাধানের ক্ষেত্রে ছাত্রদের কয়েকটি ভুল ধারণা থেকে যায়। সেগুলি সাধারণ জ্ঞানের সাহায্যে শুদ্ধ করে দেওয়া যেতে পারে। একটা উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে। অধিকাংশ ছাত্রের ধারণা থাকে—যে সমস্ত সমস্যাতে বিভিন্ন সংখ্যা এবং পরিমান থাকে; যেগুলির একটিতে কোন পরিবর্ত্তন হলে অপরগুলিতেও পরিবর্ত্তন হয়—সেই সমস্ত সমস্যাগুলির ঐকিক নিয়মে সমাধান করা সম্ভব। কিন্তু এ ধারণা ভুল। ধরাযাক্ একটি সমস্যা হ'ল :—যে ঘড়িতে 6 টার ঘন্টা বাজতে 6 সেকেণ্ড

সময় লাগে, সেই ঘড়িতে 12টার ঘণ্টা বাজতে কত সেকেণ্ড সময় লাগবে? এ সমস্যার সমাধান সরাসরি ঐকিক নিয়মে করা সম্ভব নয়। এ রকম বিভিন্ন ভুল ধারণা থাকা সম্ভব যার তালিকা দিতে গেলে সেটি অত্যন্ত দীর্ঘ হয়ে যাবে। মোট কথা হ'ল এই যে-গণিতের সমস্যা সমাধানের আগে সাধারণ জ্ঞানের প্রয়োগ করে দেখে নিতে হবে কোন্ পদ্ধতিতে অগ্রসর হতে হবে। গণিতের মূল চারটি নিয়মের মতো সাধারণ জ্ঞানের প্রয়োগটিও অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বলেই এটিকে গণিতের পঞ্চম নিয়ম বলা হয়।

বিভিন্ন একক সম্বন্ধে আলোচনা :—গণিতে আমরা বিভিন্ন একক ব্যবহার করে থাকি। ছাত্রদিগকেও এই সমস্ত একক সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া হয়ে থাকে। বিভিন্ন একক সম্বন্ধে ধারণা দেওয়ার সঙ্গে সঙ্গে কেমন করে ও কিভাবে সেই এককগুলির ব্যবহার আরম্ভ হয়েছে—সে সম্বন্ধে যদি আলোচনা করা যায়, তবে ছাত্ররা আগ্রহ বোধ ক'রবে এবং তাদের কৌতূহল প্রবৃত্তিটিও কিছু পরিমানে মিটানো সম্ভব হবে। কতকগুলি একক সম্বন্ধে সংক্ষেপে আলোচনা করা হ'ল। প্রথমেই ধরা যাক্ সময়ের একক। সময়ের একক বিভিন্ন যেমন ঘণ্টা, দিন, সপ্তাহ, পক্ষ, মাস, বৎসর প্রভৃতি। একক নির্ধারণের ক্ষেত্রে অনেক সময় ধর্মীয় অনুশাসনের প্রভাব লক্ষ্য করা যায়। প্রত্যেক ধর্মেই দেখা যায় সারা বৎসরে কতকগুলি ধর্মীয় অনুষ্ঠানের ব্যবস্থা অনেক প্রাচীন কাল থেকেই চলে আসছে। এই অনুষ্ঠানসূচী অবশ্য প্রস্তুত করতেন পুরোহিত ও জ্যোতিষিগণ। তাঁরা আকাশে বিভিন্ন নক্ষত্রের অবস্থান লক্ষ্য ক'রে দিনগুলি স্থির ক'রতেন। এই অনুষ্ঠানসূচী জানবার জন্য সকলে পঞ্জিকার প্রয়োজন অনুভব ক'রতে লাগল। এখন পঞ্জিকার আধুনিকতম সংস্করণ ক্যালেণ্ডার প্রায় প্রত্যেক বাড়ীর দেওয়ালের শোভা বর্দ্ধন ক'রছে। রোমানরা ক্যালেণ্ডার কথাটি ব্যবহার ক'রত কেবলমাত্র ছুটির দিনের তালিকা তৈরী করার জন্য।

সময়ের একটি মূল্যবান একক হ'ল দিন। প্রত্যেক দেশেই সময়কে দিন হিসাবে ভাগ করা হয়েছে। তবে দিনের মাপ সবদেশে এক নয়। এই মাপটিও বিভিন্ন দেশে বিভিন্ন ভাবে ধরা হয়। কোন কোন দেশে সূর্য্য একবার ঠিক মাথার উপর আসার পর আবার যখন মাথার উপর আসে এর মাঝের সময়কে দিন বলে ধরে নেওয়া হয়। তবে এই সময়টা বৎসরের সকল সময় একরকম হয় না। ঋতুর তারতম্যের সঙ্গে সঙ্গে সময়ও ছোট-বড় হয়। তবে এক বছরের সমস্ত সৌর দিবসের গড় নির্ণয় করে দেখা গেছে গড়ে ১ দিন ২৪ ঘণ্টার মত হয়। কিন্তু দিন শুরু হবে কখন এ নিয়ে বিভিন্ন দেশে মতভেদ আছে। ব্যাবিলনিয়ানরা সূর্য্য ওঠার

সঙ্গে দিনের আরম্ভ ঠিক করতেন। রোমান, ইহুদী, এথেনিয়ান প্রভৃতি অনেকে সূর্য্যাস্তের সময় থেকে দিনের আরম্ভ ধরতেন। এখনও পাশ্চাত্য দেশগুলিতে মধ্যরাত্রি (রাত্রি ১২টা বা Zero hour) থেকে দিনের আরম্ভ ধরা হয়। ভারতবর্ষে সূর্য্যোদয়ের সঙ্গে সঙ্গে দিনের আরম্ভ ধরা হয়।

এরপর সময়কে ভাগ করা হ'ল—মাস হিসাবে। মাস ভাগ করার ব্যাপারেও মতের এবং পদ্ধতির বিভিন্নতা দেখা গেল। এক অমাবস্যা থেকে আর এক অমাবস্যা পর্য্যন্ত বা এক পূর্ণিমা থেকে আর এক পূর্ণিমা পর্য্যন্ত সময়কে অনেক দেশে একমাস বলে ধরা হ'ল। আবার কতকগুলি স্থির নক্ষত্রের সঙ্গে সম্পর্ক রেখে লক্ষ্য রাখা হ'ল—চন্দ্র পৃথিবীর চারিদিকে ঘুরে আসতে কত সময় নেয়। এই সময়কেও একমাস (চান্দ্র মাস) ধরা হ'ল। এতে ২৮ দিনে এক মাস হ'ত। আবার কোন কোন দেশে সূর্য্য ও চন্দ্র একই রেখায় অবস্থিত হওয়ার পর আবার সেইস্থানে ফিরে আসার জন্য যে সময় লাগে, সেই সময়টিকে একমাস বলে ধরা হ'ত। এতে একমাস হ'ত প্রায় ২৯½ দিনে। তবে সুবিধার জন্য মাসগুলি ৩০ দিনে ধরা হয়। অবশ্য সব মাস ৩০ দিনে হয় না। বঙ্গাব্দে কোন কোন মাস ৩২ দিন—আবার কোন মাস ২৮ দিনেও হয়। খৃষ্টাব্দে এক ফেব্রুয়ারী ছাড়া আর সব মাসই হয় ৩০, নয়তো ৩১ দিনে হয়। কেবল ফেব্রুয়ারী মাস ২৮ দিনে হয়, তাও আবার লিপ্‌ইয়ার হলে ১ দিন বাড়ে।

মাসের পর এল বৎসরের হিসাব। তবে বৎসর ঠিক করতে অনেক দিন সময় লেগেছে। কোন একটি নক্ষত্রকে নির্দিষ্ট করে রেখে পৃথিবী সূর্য্যের চারিদিকে একবার সম্পূর্ণ ঘুরে আসতে কত সময় নিচ্ছে, তাই দেখে বৎসর ঠিক করা হ'ল। এই সময়টি হ'ল ৩৬৫¼ দিন। এক মেষ সংক্রান্তি (Vernal Equinox) থেকে আর এক মেষ সংক্রান্তি পর্য্যন্ত সময়টিকে এক বৎসর বলে ধরা হয়েছিল। এই হ'ল বৎসর ঠিক করার গোড়ার কথা।

বৎসর যে কবে থেকে গণনা করা শুরু হয়েছে সে নিয়ে মতবিরোধ আছে। খৃষ্ট ধর্মাবলম্বীরা যীশুখৃষ্টের জন্মের দিন থেকে বৎসর গণনা ক'রেছেন। হিন্দুদের বৎসর গণনা শুরু হয়েছে কোনও একটি মেষ সংক্রান্তির পরের প্রথম অমাবস্যা থেকে। হিন্দুদের শকাব্দ বলে আর একটি বৎসর গণনা হয়। এ'টি সম্ভবতঃ কুষাণ রাজ কণিষ্কের শক-বিজয়ের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত। তাছাড়া লক্ষণ সেনের রাজত্বকালে লক্ষণ বঙ্গাব্দ বলে আর এক প্রকার বৎসর গণনার প্রথা প্রচলিত ছিল। মুসলমানদের দিন আরম্ভ হয় সূর্য্যাস্তের সঙ্গে সঙ্গে। তাদের বৎসর গণনা শুরু হয় ৬২২ খৃষ্টাব্দের ১০ই

জুলাই থেকে। কথিত আছে সেইদিন হজরত মোহাম্মদ মক্কা থেকে মদিনায় চলে যান।

বৎসর ও মাস স্থির করার পর আরো স্থবিধার জন্য পক্ষ ও সপ্তাহে মাসগুলিকে ভাগ করা হয়। পূর্ণিমা ও অমাবস্থার মধ্যে সময়ের পার্থক্যকে পক্ষ বলে ধরা হয়। আবার চন্দ্রকলার হ্রাস-বৃদ্ধি দেখে সপ্তাহ-তিথি ইত্যাদি স্থির করা হয়। সময় নির্ণয়ের প্রাথমিক স্তরে মানুষকে জ্ঞান আহরণ ক'রতে হয় প্রাকৃতিক ঘটনাবলীর সাহায্যে। এর জন্য অবশ্য তাকে অত্যন্ত সতর্ক ভাবে বিভিন্ন ঘটনা পর্য্যবেক্ষণ করতে হয়েছিল। বীজ থেকে গাছ হওয়া, পালিত জন্তুর সন্তান প্রসব হওয়া, নদীর জোয়ার ভাঁটা, এক ঋতু থেকে আর এক ঋতুর পরিবর্ত্তন প্রভৃতি বিভিন্ন ঘটনা থেকেই সে সময় সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করে।

দিনকে আবার ভাগ করা হ'ল ঘণ্টা-মিনিট-সেকেণ্ডে। এ ভাগও কিন্তু একদিনে করা সম্ভব হয়নি। দিনকে ঘণ্টাতে ভাগ করতেই মানুষকে অত্যন্ত কষ্ট করতে হয়েছিল। প্রথম অবস্থাতে ঘণ্টা ঠিক করা হ'ত কোন একটা গাছের বা পাহাড়ের ছায়া দেখে। সূর্য্যের আকাশে অবস্থানের সঙ্গে সঙ্গে ছায়ার দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন হ'ত। কিন্তু পরে দণ্ডের ছায়ার সাহায্যে ঘণ্টা ঠিক করা হ'ত। মাটির উপর দণ্ডটি খাড়া ভাবে পুঁতে দেওয়া হ'ত। তারপর তার ছায়াটির গায়ে আড়াআড়ি ভাবে কতকগুলি দাগ টানা হ'ত। এর থেকেই সূর্য্যঘড়ির (Sun dial) সৃষ্টি। হুগলীর ইমামবাড়িতে এখনও একটি সূর্য্যঘড়ি আছে যেটির সাহায্যে ঠিকভাবে সময় নির্ণয় করা সম্ভব। সকল দেশেই মোটামুটিভাবে দিন ও রাত্রিকে ১২ ঘণ্টা করে ধরা হয়েছে। এইভাবে দিন ও রাত্রিকে ১২ ভাগে ভাগ করার কারণ হ'ল যে এর কতকগুলি সাধারণ ভগ্নাংশ (যেমন ১/২, ১/৩, ১/৪, ১/৬, প্রভৃতি) খুব সহজে নির্ণয় করা যায়।

দিনের বেলাতে তো সূর্য্যের আলোতে ছায়ার সাহায্যে সময় হিসাব করা হ'ত। কিন্তু রাত্রে তো আর সূর্য্য থাকে না। কাজেই রাত্রে ছায়ার সাহায্যে সময় হিসাব করা সম্ভব হ'ত না। আবার মেঘলা দিনে যখন সূর্য্য উঠত না তখনও সময় হিসাব করা কঠিন হ'ত। তখন সময় হিসাব করা হ'ত মোমবাতির সাহায্যে। কতটা সময় অতিক্রান্ত হ'ল তা ঠিক করা হ'ত কতখানি মোমবাতি পুড়েছে ঃ তা দেখে। আবার চীনদেশে ধূপকাঠির সাহায্য সময় ঠিক করা হ'ত। পরবর্তীকালে জলঘড়ি ও বালু-ঘড়ির সাহায্যে সময় ঠিক করা হ'ত। অবশ্য প্রথম অবস্থাতে সময় ঠিক করার কাজটা করতেন পুরোহিত ও ধর্মযাজকেরা। কারণ তাঁরাই ছিলেন সে যুগের শিক্ষিত সম্প্রদায়। ছায়া-কাঠি, জলঘড়ি ও বালুঘড়ি থেকে সময় ঠিক করে গির্জার ঘণ্টা

বাজানো হ'ত। ইংরেজী clock শব্দটি celtic শব্দ থেকে এসেছে বলে অনেকে মনে করেন কারণ celtic শব্দটির অর্থ হ'ল ঘণ্টা। আবার ফরাসী cloche শব্দটির অর্থও হ'ল ঘণ্টা। বর্তমান যুগের যান্ত্রিক ঘড়ি আবিষ্কারের আগে রোমানরা wheel clock ব্যবহার করতেন। অনেকগুলি চাকা একত্রিত করে ঘড়ি চালানোর পদ্ধতি মধ্যযুগেও লক্ষ্য করা যায়। প্রথম যান্ত্রিক ঘড়ি আবিষ্কৃত হয় জার্মানীতে ১৩৭৯ খৃষ্টাব্দে আর এই আবিষ্কার করেন Heinrich De Dick

পৃথিবীর প্রায় সবদেশেই প্রথম অবস্থাতে দৈর্ঘ্য মাপ করা হ'ত শরীরের কোন অঙ্গের মাপের সাহায্যে। মিশর, ব্যাবিলন প্রভৃতি দেশে মাপ করা হ'ত হাত দিয়ে, গ্রীস, রোমে পা দিয়ে, আঙ্গুল দিয়ে, হাতের তালু দিয়ে। এখন কোন কোন জায়গায় এ রকম পদ্ধতিতে মাপ করার ব্যবস্থা প্রচলিত আছে। ইংল্যাণ্ডে দৈর্ঘ্য মাপ করা হ'ত আঙ্গুল দিয়ে। মুখের থেকে আঙ্গুলের ডগা পর্য্যন্ত দূরত্বকে ধরা হ'ত এক গজ। ইংরেজী yard কথাটি সম্ভবতঃ Gyrd কথা থেকে এসেছে যার অর্থ হ'ল লাঠি বা ছড়ি। মুখ থেকে আঙ্গুলের ডগা পর্য্যন্ত মাপ ভিন্ন ভিন্ন লোকের ক্ষেত্রে ভিন্ন হ'ত। একটা প্রামাণ্য মাপ ঠিক করবার জন্য ইংল্যণ্ডের রাজা প্রথম হেনরীর মুখের থেকে হাতের আঙ্গুলের ডগা পর্য্যন্ত মাপ নিয়ে একটি ছড়ি মাপা হ'ল এবং আইন করে ঠিক করা হ'ল যে ঐ মাপটিই হবে গজের প্রামাণ্য মাপ। সেই ছড়িটি এখনও ইংল্যাণ্ডের এক যাদুঘরে রাখা আছে। দোকানে যে গজকাঠি দেখতে পাওয়া যায় তা ঐ মাপের।

ওজন মাপ করা হ'ত বিভিন্ন শস্যের ওজনের মাপ ধরে। আমাদের দেশে ধান, যব, কুঁচফল প্রভৃতির সাহায্যে ওজন নির্ণয় করা হ'ত। মুদ্রার পরিমাপ এসেছে কিন্তু অনেক পরে। প্রথম অবস্থাতে মুদ্রা পরিমাপ করার কোন প্রয়োজনই হ'ত না কারণ তখন জিনিসের মূল্য দেওয়া হ'ত অন্য জিনিসের পরিবর্তে (Barter System)। তার পর কড়ির সাহায্যে কেনা বেচার কাজ শুরু হ'ল। পরে যখন তামা, রূপা ইত্যাদি ধাতুর প্রচলন শুরু হ'ল তখন বিভিন্ন জাতীয় মুদ্রার প্রচলন ও শুরু হয়।

এইভাবে ছাত্রদের বিভিন্ন একক সম্বন্ধে একটা ধারণা অর্জন করতে সাহায্য করা যেতে পারে।

সপ্তদশ অধ্যায়

বীজগণিত শিক্ষণ

(Teaching of Algebra)

বীজগণিতের প্রতিশব্দ 'algebra' কথাটির উৎপত্তি আরব দেশে। 'al' শব্দাংশটি আরবী শব্দাংশ এবং অনেক আরবী শব্দে ও এই শব্দাংশটির প্রয়োগ দেখা যায় যেমন Alchemy (Chemistry), Alcohol ইত্যাদি। হিন্দুদের ভিতর ভাস্কর (১১৫০ খ্রীঃ) প্রথম সাধারণ অঙ্কের জন্য নাম দিয়েছিলেন 'বীজগণিত' অর্থাৎ বীজের গণনা বা মূল অথবা মৌলিক সংখ্যার গণনা। বর্তমানে Algebra বলতে যা বোঝা যায়, তার নাম ছিল অব্যক্ত গণিত। বীজগণিতে জানা সংখ্যা নিয়েই গণনা করা হয়, কিন্তু অব্যক্ত গণিতে অজানা সংখ্যা সম্বন্ধে গণনা করা হ'ত।

Algebra শব্দটির উল্লেখ আরব দেশের আব্ খৌরীজিমি (৮২৫ খ্রীঃ) নামক একজন গণিতজ্ঞের লেখায় পাওয়া যায়। শব্দটি সম্ভবতঃ Aljebral-muqabulah শব্দের অপভ্রংশ। ১৬০০ খ্রীষ্টাব্দে ইংরেজদের মধ্যেও শব্দটির ব্যবহার দেখা যায়। শেষ পর্যন্ত উচ্চারণের ও লেখার সুবিধার জন্য শব্দটি ছোট করে করা হয় Algebra। সেই সময়কার একটি পুস্তকে Algebra সম্বন্ধে বলা হয়েছে—

"Cancel minus terms and then
Restore to make your Algebra
Combine your homogeneous terms and
This is called Muqhaballah."

Al-jabr শব্দটির অর্থ হ'ল ঋণাত্মক রাশির পার্শ্ব পরিবর্তন। Muqabulah শব্দটির অর্থ হ'ল ধনাত্মক রাশির পার্শ্ব পরিবর্তন ও সরল করা। তাহলে সমস্ত অর্থ টি দাঁড়াল এই রকম :—সমীকরণের এক দিক থেকে অপর দিকে কোন রাশির পার্শ্বান্তরিত করণ, তার চিহ্নের পরিবর্তন এবং সমীকরণের উভয় দিক থেকে সমান সমান রাশি বিয়োগ করণ।

জ্যোতির্বিদ্যা ও যন্ত্রবিজ্ঞান এর নানাবিধ সমস্যার সমাধান করতে গিয়ে গণনা ও তার সঙ্গে বীজগণিতের সৃষ্টি হয়েছে। গ্রীক ও হিন্দুরা যে গণিত বা বীজগণিত

ব্যবহার করতেন-তা বর্তমানের থেকে অনেকাংশেই ভিন্ন ছিল। তাঁরা কতকগুলি নিয়ম অনুসরণ করে গণনা করতেন আর কতক ক্ষেত্রে সমস্যা সমাধান করতেন। কিন্তু এই সমস্যা সমাধানে তাঁরা কোন বিমূর্ত্ত সংখ্যা ব্যবহার করতেন না। বিমূর্ত্ত সংখ্যার ব্যবহার ও সাঙ্কেতিক প্রতীকের ব্যবহার খুব ধীরে ধীরে শুরু হয়েছে। অবশ্য সাঙ্কেতিক প্রতীকের প্রচলনের ক্ষেত্রে বিভিন্ন মতবাদের অবতারণা করা হয়েছিল।

প্রথমে যখন নিয়ম ও সমস্যাগুলি পুরোপুরি ভাষাতেই লেখা হ'ত, তখন তাকে বলা হ'ত Rhetoric Algebra বা আড়ম্বরপূর্ণ ভাষার বীজগণিত। পরে যখন প্রতীক চিহ্ন ব্যবহার করে সমস্যার সমাধান করা হ'ত তখন তাকে বলা হ'ত Symbolic Algebra। পাটীগণিতের মত বীজগণিতও সংখ্যার বিজ্ঞান। কিন্তু কিছুটা পার্থক্য আছে দু'টির মধ্যে। পাটীগণিতে যে ভাবে সংখ্যাগুলি লেখা হয়, বীজগণিতে সেভাবে হয় না। বীজগণিতে সংখ্যার বদলে বর্ণ বা অক্ষর (letters) ব্যবহার করা হয়। যতদূর জানা গেছে, তাতে মনে হয় হিন্দুরাই বীজগণিত শাস্ত্রের উদ্ভাবক। ৫২৫ খৃষ্টাব্দে আর্যভট্ট সর্বপ্রথম বীজগণিত প্রণয়ন করেন। তারপর ব্রহ্মগুপ্ত, ভাস্করাচার্য প্রভৃতি গণিতবিদেরা এই শাস্ত্রের প্রভূত উন্নতি করেন। দ্বাদশ শতাব্দীর মধ্য ভাগে ভাস্করাচার্য দুই প্রকার গণিতের উল্লেখ করেন—ব্যক্ত ও অব্যক্ত।

"দ্বিবিধগণিতমুক্তং ব্যক্তমব্যক্তং সংজ্ঞং।
ব্যক্তং পাটীগণিতমব্যক্তং বীজগণিতং ॥"

তাঁর মতে পাটীগণিত ব্যক্ত গণিত ও বীজগণিত অব্যক্ত গণিত।

পরিমাণগত সম্বন্ধ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রতীক ব্যবহারের সাহায্যে বীজগণিত একটি নূতন দিগন্ত বিস্তৃত করেছে। সমস্যার উপর গুরুত্ব না দিয়ে বীজগণিত সমস্যা সমাধানের প্রক্রিয়ার উপর বেশী গুরুত্ব দিয়ে থাকে। পাটীগণিতের মত বীজগণিতও যে সংখ্যার বিজ্ঞান, সে কথা আগেই বলা হয়েছে। পাটীগণিত ও বীজগণিতের মধ্যে সীমারেখা নির্ণয় করা খুবই কঠিন ব্যাপার। আবার বীজগণিতের সঙ্গে জ্যামিতির সম্বন্ধ ও অত্যন্ত ঘনিষ্ঠ। বীজগণিতকে বলা হয় সামান্যীকৃত অঙ্ক (generalised arithmetic); অর্থাৎ অনেকগুলি অঙ্কের সমাধান করার পর যখন একটি সাধারণ নিয়মে উপনীত হওয়া যায়, তখনই বীজগণিত এসে যায়। তেমনি বীজগণিতকে লিখিত জ্যামিতি (written geometry) এবং জ্যামিতিকে চিত্রিত বীজগণিত (Pictured algebra) বলা হয়।

গোড়ার কথা চিন্তা ক'রলে দেখা যায়, পাটীগণিত থেকেই বীজগণিতের উৎপত্তি। পাটীগণিতে সাধারণতঃ দুটি ভিন্ন জাতীয় চিন্তাধারা যুক্ত করা হয়। চিন্তাধারা দু'টি হ'ল :—(১) কোন একটি পরিস্থিতি পর্য্যালোচনা করে কি করা উচিত, তা নির্ণয় করা এবং (২) কি করা উচিত, তা নির্ণয় করার পর সেইভাবে কাজ করা। বীজগণিতে সচরাচর প্রথম চিন্তাধারাটির প্রয়োগ করা হয়। পাটীগণিত ও বীজগণিতকে একই বিষয় বলা যেতে পারে—তবে বিভিন্ন দৃষ্টিভঙ্গী ও মনোভাব নিয়ে দেখার বিষয়। একটা উদাহরণ দিয়ে বিষয়টি বোঝান যাক্ :—

ধরা যাক্ ছাত্রকে ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে হবে। তাকে প্রথমে বুঝিয়ে দেওয়া হ'ল যে কোন একটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হ'ল সেই ক্ষেত্রে যত বর্গ একক পরিমান স্থান থাকে, তাই। এই বর্গ এককটী বিভিন্ন হতে পারে। এরপর ছাত্রকে একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে দেওয়া চলতে পারে। বর্গক্ষেত্রটিকে কয়েকটি সমান ভাগে ভাগ ক'রে ছাত্র তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করবে। তেমনি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে গিয়ে ছাত্র ছবি এঁকে ও সমান সমান ঘর কেটে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে। এইভাবে ছবি এঁকে কয়েকটি সমস্যা সমাধান করার পর ছাত্র নিজেই বুঝতে পারবে যে ছবি আঁকার আর কোন প্রয়োজন নেই। সে একটি নিয়ম খুঁজে পেয়ে যাবে এবং ছবি না একেই সেই নিয়মের সাহায্যে সে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে। যতক্ষণ ছাত্র সমস্যাগুলির সমাধান করে যাচ্ছে, ততক্ষণ সে পাটীগণিত ব্যবহার করছে। কিন্তু যখনই সমস্যা সমাধান করার পরিবর্ত্তে সমাধান করার নিয়মটির দিকে তার মনোযোগ নিবদ্ধ হচ্ছে তখনই সে বীজগণিত ব্যবহার করছে। এই নিয়মের সাহায্যেই সে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবে। এই ধরনের সব প্রশ্নই যখন একটি নিয়মের সাহায্যে করা যাবে তখনই তাকে বলা যেতে পারে সামান্যীকরণ (generalization),

বীজগণিতের ব্যবহারিক প্রয়োজনীয়তা যে অনেক বেশী তা বুঝতে পারা যায় যখন আমরা প্রতীকের ব্যবহার করে থাকি। কোন একটি বিষয় বা সিদ্ধান্তকে সংক্ষেপে প্রকাশ করতে হ'লে প্রতীক ব্যবহার করতে হয়। আবার ঠিক প্রতীকটি ব্যবহার করতে হ'লে বা প্রতীকের ভাষায় প্রকাশ করতে হ'লে বিষয়টির সঠিক বিশ্লেষণ করা দরকার। আবার সামান্যীকরণের ক্ষেত্রেও এই প্রতীক সাহায্য করে। একটি বিবৃতিকে বিভিন্ন কত ভাবে এবং বিভিন্ন কত ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা সম্ভব তা প্রতীকের সাহায্যেই বোঝা যায়। প্রতীক ব্যবহার করা না হ'লে অঙ্কের ধারাকে বিশ্লেষণ করা সম্ভব হ'লেও সে বিশ্লেষণ আর বেশীদূর অগ্রসর হ'তে পারত না।

বীজগণিতের প্রধান অবদানই হ'ল প্রতীক—যার সহায়তায় বিশ্লেষণের কাজটি সহজ হয় এবং ফলাফলটিও অত্যন্ত সংক্ষেপে প্রকাশ করা সম্ভব হয়। অবশ্য এই প্রতীক যে কেবলমাত্র বিদ্যালয়ের পাঠ্যতালিকাভুক্ত বীজগণিতে প্রয়োগ করা হয়—তা নয়। যখনই কোন না কোন ক্ষেত্রে কিছু তত্ত্ব ও তথ্য অনুসন্ধান করার প্রয়োজন হয়, তখনই কাজের সুবিধার জন্য বিশেষ একজাতীয় বীজগণিত ব্যবহার করা হয়। অর্থনীতি, পরিসংখ্যান ইত্যাদি বিভিন্ন বিষয়ে বিভিন্ন জাতীয় 'প্রতীকমূলক বীজগণিত' ব্যবহার করা হয়। তবে বিভিন্ন জাতীয় হলেও সব বীজগণিতেরই উদ্দেশ্য কিন্তু এক। যেখানে তত্ত্বের অনুসন্ধান ও তথ্যের প্রকাশে ভাষা একটি বাধা হয়ে দাঁড়ায়, সেখানেই বীজগণিত তার প্রতীকের সাহায্যে সেই বাধা দূর করার চেষ্টা করে। আড়ম্বরপূর্ণ ভাষা, বিভিন্ন জাতীয় শব্দ ইত্যাদির সাহায্যে যে ভাব প্রকাশ করা যায়, সেই ভাবটি সহজ, সরল, সুস্পষ্ট ও সংক্ষিপ্তভাবে প্রকাশ করা সম্ভব প্রতীকের সাহায্যে। অনেকে মনে করেন, বীজগণিতের প্রতীক ব্যবহার করা যেতে পারে যে কোন সংখ্যার পরিবর্ত্তে। কিন্তু এ ধারণা ভুল। প্রতীক হচ্ছে গাণিতিক বিবৃতি প্রকাশের সংক্ষিপ্ত উপায় (Shorthand)। আবার বীজগণিতের সাহায্যে যন্ত্রচালিতের মত কঠিন গণনার কাজ এবং জটিল সমস্যার সমাধান করা সম্ভব। যে সমস্ত সমস্যাতে সংখ্যা, মাপ, পরিমাণ ইত্যাদি যুক্ত আছে, সেইখানেই বীজগণিতের সাহায্যে সহজে সমাধান করা সম্ভব। বীজগণিতকে যদি একটি যন্ত্র বলা যায়, তবে বলতে হয় গণনা এবং হিসাবের ক্ষেত্রে এটি একটি নির্ভুল যন্ত্র। এ ছাড়া বীজগণিত সৃজনধর্মী (creative)। বীজগণিতের সঙ্গে সঙ্গে ঋণাত্মক সংখ্যা, কাল্পনিক সংখ্যা (imaginary numbers) ইত্যাদির উদ্ভব হয়েছে।

বীজগণিত শিক্ষা দেবার মূল উদ্দেশ্য হ'ল ছাত্রদের গণিতের বিশ্লেষণ ও গাণিতিক বিবৃতি প্রকাশের শিক্ষা দেওয়া। প্রাথমিক স্তরে বীজগণিত শিক্ষা দেবার সময় দু'টি বিষয়ের প্রতি বিশেষ ভাবে মনোযোগ দিতে হবে। **একটি হ'ল**—সমস্যাটি বিশ্লেষণ করা, যাতে বিশ্লেষণ করার পর গাণিতিক পদ্ধতি প্রয়োগ করা যেতে পারে এবং **দ্বিতীয়টি হ'ল**—প্রাথমিক বিশ্লেষণের উপর ভিত্তি করে বিবৃতি (যুক্তি ইত্যাদি) প্রকাশ করা। কেবলমাত্র সমাধান করার দক্ষতা অর্জন করলেই বীজগণিত শিক্ষার কাজ শেষ হয়ে যায় না। বীজগণিতে মানসিক শিক্ষা বা চর্চা যে হয়, তা সত্য ; কিন্তু তার থেকেও প্রয়োজনীয় জিনিস হচ্ছে যে বীজগণিত কৃষ্টিমূলক (Cultural) শিক্ষায় সাহায্য করে। সাধারণ ছাত্র হয়তো পরবর্ত্তীকালে উচ্চস্তরের বীজগণিতের সমস্যার সমাধান করবে না বা সে বলবিদ্যা, ক্যালকুলাস ইত্যাদি পড়বে না। কিন্তু তার বোঝা

দরকার যে এমন কতকগুলি বিবৃতি আছে—যেগুলি সব জায়গাতে প্রয়োগ করা চলতে পারে। এগুলিকে সাধারণ বিবৃতি বলা যেতে পারে এবং এগুলি সাধারণভাবে অনেক ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। এইরূপ কোন বিবৃতি সাধারণভাবে দিতে হ'লে বীজগণিতের সাহায্য না নিয়ে কোন উপায় নাই। জীবনের বিভিন্ন স্তরে, বিভিন্ন পেশা এবং বৃত্তির ক্ষেত্রেও বীজগণিত প্রয়োগ করা হয়। ছাত্র কিছু করুক আর না করুক, এই বিষয়টির ব্যবহার ও প্রয়োজনীয়তা সম্বন্ধে তার একটা প্রাথমিক ধারণা থাকা দরকার। তার অন্ততঃ এটুকু বোঝা উচিত যে বীজগণিত ছাড়া কোনও বৈজ্ঞানিক সত্যের সামান্যীকরণ সম্ভব নয়। এমন অনেক ক্ষেত্র আছে যেখানে বীজগণিত ছাড়া ভাবপ্রকাশ করা অত্যন্ত কঠিন হ'ত। যেমন Binomial Expansion টি প্রতীক ছাড়া কখনই প্রকাশ করা সম্ভব হ'ত না। ভাষার সাহায্যে প্রকাশ ক'রতে গেলে তা অত্যন্ত জটিল ও কষ্টসাধ্য হ'ত। একমাত্র প্রতীকের সাহায্যেই ঐ সাধারণ বিবৃতিটি অত্যন্ত সহজভাবে প্রকাশ করা সম্ভব। আবার সাধারণ ছাত্র যাতে গণিত চর্চার ফলে আনন্দ উপভোগ করতে পারে সে বিষয়েও লক্ষ্য রাখতে হবে। অভিজ্ঞতার মাধ্যমে যে ফল লাভ করা যায়, তাতে যদি আনন্দের উপকরণ না থাকে, তবে বিষয়টি অত্যন্ত নীরস হয়ে পড়ে। ছাত্ররা বীজগণিতের সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে সেই আনন্দের আসরে উপস্থিত হয়। এই আনন্দ যাতে চিরস্থায়ী হয়, সে ব্যবস্থাও করা প্রয়োজন। প্রথম অবস্থাতেই নানা-রকম প্রতীক ছাত্রের সামনে উপস্থিত করা কেবলমাত্র অপ্রয়োজনীয়ই নয়, ক্ষতিকরও। $+, -, \times, \div, \therefore, \because, =$ ইত্যাদি কতকগুলি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় প্রতীকের অর্থ এবং ব্যবহার তাকে পরিষ্কার ভাবে বুঝিয়ে দিলেই যথেষ্ট। তেমনি বীজগণিতের বিভিন্ন সূত্রের মধ্যে যে'টী সবচেয়ে প্রয়োজনীয় ; $a(b+c)=ab+ac$, এই সূত্রটি বুঝাতে হবে। তারপর $\sqrt{}$, log, sin ইত্যাদির প্রয়োগকৌশল এবং ব্যবহারের সীমা (limit) বুঝাতে হবে। এর জন্য চর্চার একান্ত প্রয়োজন। কিন্তু এই চর্চা যখন একান্তই অপরিহার্য্য হয়ে পড়বে, কেবলমাত্র তখনই চর্চা করতে হবে। আবার যতটুকু চর্চা করা প্রয়োজন ঠিক ততটুকুই যেন করা হয়—তার বেশী যেন না হয়।

বীজগণিত কেন পড়ানো হবে ?—বীজগণিত কেন পড়ানো হবে এ প্রশ্নের উত্তর কেবলমাত্র একটি বক্তব্যের মধ্যে সীমাবদ্ধ নেই। বীজগণিত পাঠের মূল উদ্দেশ্যগুলিকে আমরা কয়েকটি ভাগে ভাগ করতে পারি। এর মধ্যে প্রধান প্রধান **উদ্দেশ্যগুলি** হল—

(১) **গণিতের অন্যান্য শাখাতে বীজগণিতের প্রয়োগ,**

(২) **বীজগণিতের নিজস্ব ধারণাগুলির শিক্ষাগত মূল্য,**

(৩) বীজগণিত শিক্ষার ফলে অন্যান্য ক্ষেত্রে দক্ষতা অর্জন।

বীজগণিতে যে সমস্ত ধারণা অর্জন করলে অন্যান্য সব ক্ষেত্রেই সুফল পাওয়া যায় সেগুলি হ'ল—

(ক) সমীকরণের সাহায্যে সমস্যার সমাধান

(খ) সামান্যীকরণের ক্ষমতা অর্জন এবং সূত্রের প্রয়োগ

(গ) আপেক্ষিক পরিবর্ত্তন (Functionality).

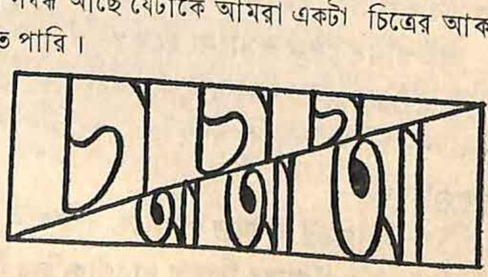
সমস্যার সমাধান :—বিশুদ্ধ গণিতিক পদ্ধতি বলতে যা বুঝায়, সমীকরণের সাহায্যে কোন সমস্যার সমাধান করার পদ্ধতি তার থেকে সম্পূর্ণ পৃথক। এটি সম্পূর্ণ নূতন একটি পদ্ধতি এবং এর নতুনত্বের জন্য ছাত্ররা এতে যথেষ্ট আগ্রহ বোধ করে। এ ছাড়া পাটিগণিতের অনেক জটিল সমস্যার সমাধান এই পদ্ধতির সাহায্যে অত্যন্ত সহজে করা সম্ভব। পদ্ধতিটি ব্যবহারের ফলে সময়ও অনেক কম লাগে।

সামান্যীকরণ ও সূত্র প্রয়োগ :—সামান্যীকরণের ক্ষমতা অর্জন এবং সূত্র প্রয়োগ করার কৌশলটি আয়ত্ত করা-দু'টিই সমান গুরুত্বপূর্ণ। বিশেষ জাতীয় ঘটনা অনেক ঘটে থাকে এবং সেগুলি প্রকাশ করা হয় বিশেষ বিশেষ বিবৃতির মাধ্যমে। এই বিশেষ বিশেষ ঘটনা, বিবৃতি বা সূত্রগুলি সামান্যীকরণের মাধ্যমে সাধারণ ভাবে প্রকাশ করা হয়। যেমন $3\times7=7\times3$, $5\times6=6\times5$। ভাষায় প্রকাশ করতে হ'লে বলতে হবে—যখন দুটি রাশি গুণ করা হয়, তখন রাশিগুলি কি ভাবে সাজানো হচ্ছে তার উপর গুণফল নির্ভর করে না। 3 আর 7 কে যে ভাবেই সাজানো হোক্ না কেন, গুণফল সবসময় 21 ই হবে। বীজগণিতের ভাষায় সূত্র প্রয়োগ করে বলা যেতে পারে : $ab=ba$. বীজগণিতের সূত্র বা অভেদ হ'ল ভাষার সংক্ষিপ্ততম রূপ। এর সাহায্যে চিন্তাধারাকে পরিমিত করা সম্ভব (economy of thought)। যে সমস্ত লোক দৈনন্দিন জীবনে গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগ করে থাকেন, তাদের পক্ষে বীজগণিতের সূত্র প্রয়োগ করা অপরিহার্য্য।

আপেক্ষিক সম্বন্ধ নির্ণয় বা পরিবর্ত্তন :—বীজগণিতের আর একটি গুরুত্বপূর্ণ কাজ হ'ল আপেক্ষিক পরিবর্ত্তন সম্বন্ধে একটা ধারণা অর্জনে সহায়তা করা। চাপ এবং আয়তনের মধ্যে একটা সম্বন্ধ আছে যেটাকে আমরা একটা চিত্রের আকারে মোটামুটি এইভাবে প্রকাশ করতে পারি।

চা = চাপ

আ = আয়তন



চিত্রটি থেকে দেখা যাচ্ছে, চাপ যখন বেশী, আয়তন তখন কম ; আবার চাপ যখন কম, আয়তন তখন বেশী। এই চাপ ও আয়তনের মধ্যে একটা নির্দ্দিষ্ট সম্পর্ক আছে যার জন্য একটিতে কোন পরিবর্ত্তন হ'লে অপরটিতেও আপেক্ষিক একটা পরিবর্ত্তন হবে। এই সম্বন্ধটি গাণিতিক এবং একে আপেক্ষিক সম্বন্ধ বা **Functionality** বলে। এই সম্বন্ধটিকে বীজগণিতের সূত্র **PV**$=R$**T**-র সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। এখানে চাপ ও আয়তনকে বলা হয় চলক (**variable**)। একটি চলকের আর একটি চলকের সঙ্গে আপেক্ষিক একটা সম্বন্ধ থাকে **function**)। দু'টি চলকের মধ্যে যে সম্বন্ধ, তা বিভিন্ন ভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে। কেবলমাত্র সূত্রের সাহায্যেই নয়, লেখচিত্র বা অন্যান্য চিত্রের সাহায্যেও এই সম্বন্ধটি প্রকাশ করা সম্ভব। লিখিত শব্দকে যেমন মৌখিক শব্দের চাক্ষুষ প্রতিরূপ বলা যায়, লেখচিত্রকেও তেমনি বীজগণিতের সূত্রের চাক্ষুষ প্রতিরূপ বলা যেতে পারে। এই আপেক্ষিক সম্বন্ধ নির্ণয় করা যায় বীজগণিতের সাহায্যে ; পাটীগণিতের সাহায্যে তা প্রকাশ করা যায় না।

মানসিক দক্ষতা অর্জন : কোন সমস্যার সমাধান হয়ে গেলেই বীজগণিতের কাজ শেষ হয়ে যায় না। শিক্ষককে লক্ষ্য রাখতে হবে সমস্যার সমাধান করতে গিয়ে ছাত্র যে দক্ষতা অর্জন করল, সেই দক্ষতা যেন ভবিষ্যৎ জীবনেও কাজে লাগে। কোন একটি বিশেষ সমস্যার সমাধান করার ক্ষেত্রে দক্ষতা অর্জন করানোই যেন শিক্ষকের উদ্দেশ্য না হয় ; জীবনের বিভিন্ন ও বিচিত্র সমস্যাবলীর সমাধানেও যেন সে অনুরূপ দক্ষতা অর্জন করতে পারে সেদিকেও তাঁর বিশেষ দৃষ্টি দিতে হবে।

বীজগণিতের কাজ :—বীজগণিতের কাজ তাঁর উদ্দেশ্যগুলির মধ্যেই নিহিত আছে। তবুও আলোচনার সুবিধার জন্য আমরা বীজগণিতের কাজগুলিকে কয়েকটি সুনির্দ্দিষ্ট ভাগে ভাগ ক'রতে পারি। সেগুলি হ'ল :—

১। পাটীগণিতের তত্ত্বমূলক পদ্ধতির সম্প্রসারণ এবং সেগুলির ভিত্তি দৃঢ় করা।

২। গণনা বা হিসাব সংক্রান্ত ব্যাপারে ছাত্রের দক্ষতা বৃদ্ধি করা। সেই সঙ্গে ছাত্রের অভ্যাসের ভিত্তিটিও দৃঢ় করা।

৩। সমীকরণ পদ্ধতিটি উন্নততর করা এবং সমীকরণের সাহায্যে পাটীগণিত, জ্যামিতি, পদার্থ বিদ্যা ইত্যাদি বিষয়ের অন্তর্ভুক্ত বিভিন্ন বিষয়ের সমাধান করা।

৪। স্কুলের পাঠ শেষ করার পর ছাত্র যদি গণিত সম্বন্ধে শিক্ষা অর্জন করতে চায়, তবে তার ভিত্তি সুদৃঢ় করা এবং অন্যান্য বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে প্রয়োজনবোধে বীজগণিতের নীতি প্রয়োগ করা।

৫। সংক্ষিপ্ত ভাষা ও প্রতীকের সাহায্যে অমূর্ত্ত বিষয় শিখনের উন্নততর ব্যবস্থা করা।

৬। মানসিক উন্নতিবিধানের যন্ত্র হিসাবে পরিগণিত হওয়া।

৭। বিজ্ঞানের সত্য ঘটনাগুলিকে সমান্বীকরণের মাধ্যমে সংক্ষিপ্ত অথচ পূর্ণাঙ্গ সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা।

বীজগণিত কখন শুরু করা যেতে পারে ঃ— বীজগণিত কখন শুরু করা যেতে পারে, সে বিষয়ে নির্দ্দিষ্ট কোন বয়স বা স্তর নির্ণয় করা সম্ভব নয়। তবে একথা বলা যেতে পারে যে পাটীগণিত শিক্ষার সঙ্গে সঙ্গেই বীজগণিতের শিক্ষা চলবে। তবে বীজগণিতকে যখন গণিতের একটি পৃথক পূর্ণাঙ্গ বিষয় হিসাবে ধরা হয়েছে তখন এর নিয়মাফিক (formal) পাঠ শুরু করাও প্রয়োজন। পাটীগণিতের পাঠের মাধ্যমে বীজগণিত সম্বন্ধে পরোক্ষভাবে (Informal) শিক্ষা দেওয়া হয়ে থাকে। এতে ছাত্রদিগকে সংক্ষিপ্তভাবে ভাষায় প্রকাশ করা বা বীজগণিতের ভাষা সম্বন্ধে একটা ধারণা দেওয়া যেতে পারে। এইভাবে অনুপাত, সমানুপাত, সরল সুদকষা, শতকরা হিসাব, বর্গ, বর্গমূল প্রভৃতি সম্বন্ধে শিক্ষা দিবার সময় বীজগণিতের সমীকরণ, ঘাত প্রভৃতি সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া যেতে পারে। ঋণাত্মক রাশি ব্যবহার না করেও পাটীগণিতে বীজগণিতের সমস্যা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জনে ছাত্রদের সাহায্য করা যেতে পারে। যেমন ঃ—একটি বস্তাতে A কুইন্টাল চাল আছে। অপরটিতে B কুইন্টাল। দু'টি বস্তাতে মোট কত চাল আছে? একটি বর্গাকৃতি ঘরের দৈর্ঘ্য P ফুট হ'লে ক্ষেত্রফল কত? এ জাতীয় সমস্যা সংখ্যাসূচক মানের সাহায্যেও প্রকাশ করা যায়। এইভাবে ছাত্রসংখ্যা সম্বন্ধে এবং সংখ্যার বদলে অক্ষরের ব্যবহার সম্বন্ধে একটা ধারণা সে অর্জন করতে পারবে এবং তখন তার পক্ষে নিয়মানুগ পদ্ধতিতে বীজগণিতে শিক্ষা গ্রহণ করার পক্ষে আর কোনরকম অসুবিধাই থাকবে না। এই নিয়মানুগ পদ্ধতিতে শিক্ষাদানের কাজটি ছাত্রের ১০-১১ বৎসর বয়সে শুরু করা যেতে পারে। অবশ্য বীজগণিতে সাফল্য প্রথমদিকে নির্ভর করে ছাত্র কিভাবে পাটীগণিত সম্বন্ধে শিক্ষা গ্রহণ করেছে এবং কতটা শিক্ষা গ্রহণ করেছে তার উপর। আবার এ কথাও জোর করে বলা যেতে পারে না যে বীজগণিতে বেশ দক্ষতা অর্জন করলে তা পাটীগণিত শিক্ষার সহায়ক হবে। প্রতি ক্ষেত্রেই ছাত্রের একটা প্রাথমিক জ্ঞান ও আগ্রহবোধ থাকা প্রয়োজন। বীজগণিত শিক্ষা দেবার প্রাথমিক স্তরগুলি প্রায়ই খারাপ পদ্ধতির জন্য অত্যন্ত দীর্ঘ ও অপ্রয়োজনীয় হয়ে পড়ে। এইজন্যই ঐ স্তরে পূর্বজ্ঞানের এবং বাস্তব জ্ঞানের উপর ভিত্তি করে সহজ সমীকরণ ও সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে অগ্রসর হ'লে সুফল পাওয়া যায়। এই স্তরে শিক্ষণীয় বিষয়টি যেন অনাবশ্যক তত্ত্বে ও তথ্যে ভারাক্রান্ত হয়ে না উঠে।

বীজগণিতের পাঠক্রমে যে গুলি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় ও একান্ত অপরিহার্য, সেগুলি হ'ল—

(ক) **সূত্র নির্ণয় ও তার ব্যবহার।**

(খ) **লেখচিত্র অঙ্কন ও তার ব্যবহার।**

(গ) **দিক্-নির্দেশক সংখ্যা (Directed Numbers)।**

(ঘ) **লগারিথম-এর তথ্য ও তার ব্যবহার।**

(ঙ) **আপেক্ষিক সম্বন্ধ নির্ণয় (Functionality) ও সামান্যীকরণ (Generalisation)।**

বীজগণিত শিক্ষার কয়েকটি মূল নীতি :—

১। বীজগণিতে পাঠক্রমটি এমনভাবে নির্দ্ধারণ করতে হবে, যাতে বীজগণিত শিক্ষার লক্ষ্যে উপনীত হতে পারা যায়। এর জন্য পাঠক্রমটি থেকে সবরকম অপ্রয়োজনীয় বিমূর্ত্ত ও সম্পূর্ণ যান্ত্রিক বিষয়গুলি বাদ দিতে হবে।

২। বীজগণিতের পাঠক্রমটি কেবলমাত্র তথ্য ভারাক্রান্ত হলে চলবে না। নীরস তথ্য অনেক ছাত্রই হৃদয়ঙ্গম করতে পারে না। কাজেই বীজগণিতের পাঠক্রমে যতদূর সম্ভব কম তথ্য থাকবে।

৩। পাঠক্রমে সেই সমস্ত অধ্যায়ের উপর গুরুত্ব আরোপ করতে হবে যেগুলি চর্চার ফলে বিচারশক্তির বিকাশ হয়। প্রাথমিক বীজগণিত শিক্ষা যেন অত্যন্ত যান্ত্রিক না হয় ; বরং যাতে চিন্তা, যুক্তি ও বিচার শক্তির উন্মেষ ও বিকাশ হয়, সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে।

৪। বীজগণিতের ব্যবহারিক দিকটির দিকেও বেশী করে নজর দিতে হবে। বিভিন্ন বিষয়ে বীজগণিতের নীতিগুলি প্রয়োগ করা হয়। যে সমস্ত অধ্যায়গুলি জ্যামিতি, পাটীগণিত বা অন্যান্য বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে প্রায়ই প্রয়োগ করা হয়, সেগুলির ব্যবহারিক মূল্যের জন্যই তাদের উপর অধিকতর গুরুত্ব আরোপ করতে হবে।

৫। যে সমস্ত অধ্যায় কেবলমাত্র উচ্চতর শিক্ষার জন্য প্রয়োজন, সে সমস্ত অধ্যায় বাদ দেওয়া চলতে পারে।

সংক্ষেপে বলা যেতে পারে, বীজগণিতের পাঠক্রমে এমন বিষয়ই অন্তর্ভুক্ত করা হবে, যেগুলি প্রয়োজনীয়, চিত্তাকর্ষক এবং সেই সঙ্গে চিন্তাশক্তির উদ্বোধক।

বীজগণিত শিক্ষাদানে ত্রুটী :—বীজগণিতের অনেক সুবিধা থাকলেও এর শিক্ষাদানে কতকগুলি ত্রুটী লক্ষ্য করা যায়। যে জিনিসটি প্রায়ই লক্ষ্য করা যায়,

তা হ'ল—ছাত্ররা অত্যন্ত যান্ত্রিক ভাবেই বীজগণিতের সমস্যাগুলির সমাধান করে যায়। এগুলির আভ্যন্তরীণ অর্থ তারা যেন বুঝতেই চায় না। অবশ্য এই ত্রুটী দূর করা সম্ভব। কোন একটি সূত্র ব্যাখ্যা করার পরই সেই সূত্র প্রয়োগ করে কতকগুলি সমস্যার সমাধান ছাত্রদের করতে হবে। এই সমস্যাগুলি বীজগণিতের ক্ষেত্র থেকেই যে নিতে হবে এমন কোন কথা নেই। মাঝে মাঝে পাটীগণিত থেকে সমস্যা নির্বাচন করলে বৈচিত্র্যহীনতা দূর হয়। ছাত্ররা যেন প্রতীকের অর্থ বেশ ভালো ভাবে বুঝতে পারে সেদিকেও বিশেষ দৃষ্টি দিতে হবে। এ ছাড়া আর যে সমস্ত ত্রুটী বা অসুবিধা দেখা দেয়, সেগুলি দূর করতে হলে কতকগুলি নিয়ম মেনে চলতে হবে। এগুলির মধ্যে অত্যন্ত প্রয়োজনীয় এমন কয়েকটি নিয়মের উল্লেখ করা হ'ল।

১। তথ্য যতদূর সম্ভব কম করতে হবে। অপ্রয়োজনীয়, বিমূর্ত্ত ও অবাস্তব তথ্য পাঠক্রম থেকে বাদ দিতে হবে।

২। যে সমস্ত অধ্যায়ের পাঠের ফলে মৌলিক চিন্তা করার ক্ষমতা বৃদ্ধি পায়, সেই সমস্ত অধ্যায়ের উপর গুরুত্ব আরোপ করতে হবে।

৩। যে সমস্ত অধ্যায় প্রায়ই গণিতের অন্য শাখাতে অথবা অন্য বিষয়ে ব্যবহৃত হয়, সেগুলির উপর অধিকতর গুরুত্ব আরোপ করতে হবে।

৪। ছাত্রের বোধগম্য হবে না—এমন অধ্যায় বা যে অধ্যায়ে 'যুক্তিযুক্ত নীতি' অনুসৃত হয়নি, সে রকম অধ্যায় পাঠক্রম থেকে বাদ দিতে হবে। বীজগণিত সম্বন্ধে প্রয়োজনীয় জ্ঞান অর্জন করার আগেই বীজগণিত শিক্ষা দেওয়া যেমন ক্ষতিকর, বীজগণিত সম্বন্ধে স্বল্পজ্ঞান লাভ করার আগেই বীজগণিত সম্বন্ধে জটিলতর শিক্ষা দেওয়া তেমনি ক্ষতিকর।

৫। যে সমস্ত পদ্ধতি বীজগণিতে একান্ত প্রয়োজনীয় বা যেগুলি প্রায়ই প্রয়োগ করতে হয়, সেই সমস্ত পদ্ধতির পুনরাবৃত্তি করা আবশ্যক। পদ্ধতিগুলির ব্যবহারিক প্রয়োগও বিশেষ সুফলদায়ক।

৬। বীজগণিত শিক্ষা দিবার সময় আরোহী পদ্ধতি (Inductive Method) অনুসরণ করাই বাঞ্ছনীয়।

৭। সূত্রগুলি যেন মুখস্থ করে গতানুগতিক ভাবে প্রয়োগ করা না হয়। যখনই প্রয়োজন হবে তখনই যেন যুক্তি তর্কের অবতারণা করা হয়।

৮। বীজগণিত শিক্ষার প্রাথমিক স্তরে দৈনন্দিন জীবন থেকে সমস্যাগুলি নির্বাচন করতে পারলে খুব ভালো হয়। সমস্যা যত বাস্তব হবে ছাত্রের আগ্রহও তত বৃদ্ধি পাবে।

বীজগণিতে অনুবন্ধ (**Correlation**) :—বীজগণিতকে বলা হয় সাধারণীকৃত পাটীগণিত। আবার বীজগণিতকে গণিতের কেন্দ্রীয় অধ্যায়ও (Central Topic) বলা হয়। কিন্তু অধিকাংশ শিক্ষকই পাটীগণিত ও বীজগণিতকে দুটি পৃথক বিষয় হিসাবে মনে করে থাকেন এবং তাদের ধারণা—যখন পাটীগণিত শেষ হয় তখন বীজগণিত শুরু হয় (শিক্ষনের ক্ষেত্রে)। কিন্তু এ ধারণা সম্পূর্ণ ভুল। বরং বীজগণিতে ছাত্র প্রতীক ব্যবহার করতে শিখেছে বলে সেই জ্ঞান পাটীগণিতের ক্ষেত্রেও প্রয়োগ করা চলতে পারে। এর ফলে পাটীগণিতের অনেক জটিল সমস্যার খুব সহজে সমাধান করা সম্ভব হয়, আবার অনেক অপ্রয়োজনীয় স্তরও বাদ দেওয়া যায়। ক্রয়মূল্য, বিক্রয়মূল্য ও লাভের সম্বন্ধটি বোঝাতে গিয়ে পাটীগণিতে যথেষ্ট ভাষা ব্যবহার ক'রতে হয়। কিন্তু সেই সম্বন্ধটি বীজগণিতের প্রতীকের সাহায্যে এইভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে :—

$S=C+P$ যখন $S=$ বিক্রয় মূল্য, $C=$ ক্রয় মূল্য, $P=$ লাভ

তেমনি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল প্রকাশ করা যেতে পারে $A=L\times B$ এই সূত্রের সাহায্যে, যখন $A=$ ক্ষেত্রফল, $L=$ দৈর্ঘ্য ও $B=$ প্রস্থ। এইভাবে সমস্যা সমাধান করতে গিয়ে প্রতীক ব্যবহার করলে সমাধানের পথটি যে সহজ হবে, সে বিষয়ে কোন সন্দেহ নাই।

বীজগণিত হ'ল সাধারণীকৃত পাটীগণিত। কাজেই গণিতের এই দু'টি শাখার মধ্যে কোন পার্থক্য থাকা উচিৎ নয়। কিন্তু বিষয়গুলি সম্বন্ধে বিজ্ঞানসম্মত দৃষ্টিভঙ্গীর অভাবের জন্য এবং ত্রুটীপূর্ণ পদ্ধতির জন্য বীজগণিত প্রায় যান্ত্রিক স্তরে উপনীত হয়। পাঠ্যপুস্তকেও সূত্রটি বর্ণনা করার পর দু-একটি উদাহরণ দিয়ে ছাত্রদের সামনে একটি 'অনুশীলনী' উপস্থাপিত করে। ছাত্ররাও যান্ত্রিকভাবে সূত্র প্রয়োগ করে অনুশীলনীর অঙ্কগুলি করে যায়। কিন্তু তারা সূত্র বা প্রতীকের ব্যবহারিক প্রয়োগ বা প্রয়োজনীতা হৃদয়ঙ্গম করতে পারে না। এ জাতীয় ঘটনা বন্ধ করা প্রয়োজন। এগুলির যান্ত্রিক প্রয়োগের চেয়ে ব্যবহারিক প্রয়োগের মূল্য অনেক বেশী। বীজগণিত শুরু করা যেতে পারে পাটীগণিতের মাধ্যমে। একদিকে ব্যাকরণের সঙ্গে বীজগণিতের যথেষ্ট মিল আছে। ব্যাকরণে কোন সাধারণ সূত্র তৈরী করতে হ'লে তার আগে অনেক পর্য্যবেক্ষণের প্রয়োজন। তেমনি বীজগণিতে কোন সাধারণ সূত্র তৈরী করতে হ'লে পাটীগণিতের কতকগুলি সমস্যা পর্য্যবেক্ষণ করা প্রয়োজন। ব্যাকরণে একবার সূত্র তৈরী হয়ে গেলে সমজাতীয় উদাহরণের ক্ষেত্রে সেই সূত্র প্রয়োগ করা যায়। বীজগণিতেও সূত্রে উপনীত হতে পারলে সেই সূত্র সমজাতীয় সমস্যার (তা সে

সমস্যা বীজগণিত, পাটীগণিত বা জ্যামিতি যেখানেই হোক্ না কেন) ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যেতে পারে। কেবলমাত্র প্রতীকটির কোন মূল্য থাকে না যতক্ষণ না সেই প্রতীকটিকে পাটীগণিতে সমপরিমান কোন রাশির বা সংখ্যার সাহায্যে প্রকাশ করা যাচ্ছে। $a^2-b^2=(a+b)\ (a-b)$, এই সূত্রটির তখনই একটা অর্থ পাওয়া যাবে যখন a ও b কে কোন সংখ্যা দ্বারা অপসারিত করে ঐ সম্বন্ধটি সত্য বলে যাচাই করা যাবে। a এর বদলে 5 এবং b এর বদলে 3 ধরলে a^2-b^2 এর বদলে পাই 5^2-3^2। সূত্র অনুযায়ী যা হওয়া উচিত, তা হল

$$5^2-3^2=(5+3)\quad(5-3)$$

অথবা $25-9=8\times2=16$. সম্বন্ধটি সত্য, অতএব সূত্রটিও সত্য বলেই প্রমাণিত হল।

বীজগণিতের প্রাথমিক শিক্ষা পাটীগণিতের সাহায্যেই হওয়া বাঞ্ছনীয়। ছাত্র প্রথমে সংখ্যা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করবে। তারপর তার সংখ্যাজ্ঞান হয়ে গেলেই সংখ্যার বদলে প্রতীক ব্যবহার করা যেতে পারে। $a^2-b^2=(a+b)\ (a-b)$ এই সূত্রটি নির্ধারণ করার আগে সংখ্যার সাহায্যে দু'টি বর্গের অন্তরফল নির্ণয় ক'রতে হবে।

বীজগণিতকে আমরা ভাষার সংক্ষিপ্তরূপ (Shorthand) বলেছি। বীজগণিতের সাহায্যে গণিতের অনেক নিয়ম বা সূত্রকেও অত্যন্ত সংক্ষিপ্ত আকারে ও সহজে প্রকাশ করা সম্ভব।

উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে ঃ—

$$\text{Simple Interest}=\frac{\text{Principal}\times\text{Rate}\times\text{Time}}{100}$$ এই নিয়মটিকে

$$I=\frac{P\times R\times T}{100}$$ এই সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা সম্ভব।

ছাত্রদের মাঝে মাঝে প্রতীকগুলি ব্যাখ্যা করতে বলা হবে। যখনই তারা প্রতীকের বদলে আসল জিনিস ব্যবহার করবে –তখনই সূত্রটিতে রাশি বা সংখ্যা ব্যবহার করে সূত্রটির সত্যতা যাচাই করার কথাও তাদের বলতে হবে। পাটীগণিতের মত বীজগণিতেও মানসাঙ্কের প্রচলন থাকবে। এর জন্য খুব ছোট ছোট সমস্যা নির্বাচন করতে পারা যায়। বাস্তব জীবন থেকে সমস্যাগুলি নির্বাচন করতে পারলে খুবই ভালো হয়। কঠিন অধ্যায় বা কঠিন নিয়মগুলি স্তরে স্তরে শেখাতে হবে। তবে

কোন একটি স্তরে আসার আগে দেখতে হবে সেই স্তরের আগের স্তরের পূর্বজ্ঞান তার আছে কি না। জ্ঞান অবিচ্ছিন্ন হওয়াই বাঞ্ছনীয়।

জ্যামিতিতে যুক্তি ও বিচারকরণের প্রয়োজনীয়তা বেশী। বীজগণিতেও জ্যামিতির মত যাথার্থ্য, যুক্তি ও বিচারশক্তির প্রয়োজন কম তো নয়ই, বরং বেশী। বীজগণিতে অধ্যায়ের স্তরবিন্যাসটি মনোবিজ্ঞানসম্মত ও যুক্তিসম্মত হওয়া প্রয়োজন। প্রথম দিকের অধ্যায়গুলি সহজ, সরল ও চিত্তাকর্ষক হওয়া বাঞ্ছনীয়। বীজগণিতে নির্দ্দিষ্ট কাজ, নির্ভুল উত্তর ও অধ্যায়গুলির ব্যবহারিক প্রয়োগ জ্যামিতির মতোই। তবে জ্যামিতিতে বিচারশক্তির প্রয়োজন একটু বেশী আর সেই বিচার শক্তির মানও বেশ উচ্চ। বীজগণিতের কতকগুলি অধ্যায় যান্ত্রিকভাবেই শিখতে হয়। কাজেই মৌলিকতা বা চিন্তাধারার নূতনত্ব দেখাবার খুব বড় একটা সুযোগ পাওয়া যায় না। তবে বীজগণিতের বিষয়বস্তু সম্বন্ধে জ্ঞান জ্যামিতির জ্ঞানের থেকেও বেশী গুরুত্বপূর্ণ।

এখন বীজগণিতের সঙ্গে জ্যামিতি ও পাটীগণিতের সম্বন্ধের কথা আলোচনা করা যাক। প্রথমে দেখা যাক্ **পাটীগণিতে বীজগণিতের প্রয়োগ** :—

ধরা যাক্ সমস্যাটি হ'ল :—Divide Rs. 128/- among A. B and C so that A may get Rs. 8 less than B and C gets Rs. 7 more than B.

পাটীগণিতের নিয়মে সমস্যাটির সমাধান করতে গেলে অনেক যুক্তি তর্কের অবতারণা করতে হয়। পদ্ধতিও বেশ জটিল। কিন্তু বীজগণিতের পদ্ধতি অনুযায়ী সমাধান করলে কাজটি অত্যন্ত সহজ হয়ে যায়। A এর অংশ x এর সমান ধরলে B এর অংশ হবে $x+8$ এবং C এর অংশ $x+8+7$, ; তাহলে সে সূত্রটি পাওয়া যাবে তা হল :—

$$x+(x+8)+(x+15)=128 \text{ টাকা।}$$

এর থেকে x এর মান পাওয়া যায়—35 টাকা। এই ভাবে A, B, ও Cর অংশ কত টাকা করে পড়বে, তা নির্ণয় করা যায়।

তেমনি সমস্যাটি যদি হয়—The Sum of two numbers is 20 and their difference is 6. What are the numbers ?

কিংবা সরল কর :—$\dfrac{(3\cdot756)^2-(2\cdot244)^2}{3\cdot756+2\cdot244}$, তখন বীজগণিতের সূত্র প্রয়োগ ক'রলে সমাধান অত্যন্ত সহজেই করা যাবে।

এবার দেখা যাক **জ্যামিতিতে কিভাবে বীজগণিত** প্রয়োগ করা যেতে

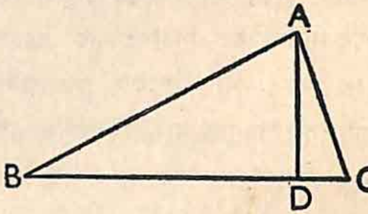
পারে। জ্যামিতিকে অনেক ক্ষেত্রেই বীজগণিতের নীতিগুলি মেনে চলা হয়। একটা উদাহরণ দেওয়া যাক ঃ

AD is perpendicular from the vertex A upon the base BC of a triangle ACB. It $AD^2 = BD.\ DC$, Prove that the triangle is right-anglad.

এর সমাধানটি বীজগণিতের সাহায্যে এই ভাবে করা যেতে পারে ঃ—

$AB^2 = AD^2 + BD^2 \cdots\cdots\cdots (i)$

$AC^2 = AD^2 + CD^2 \cdots\cdots\cdots (ii)$



যোগ করে $AB^2 + AC^2$

$= BD^2 + CD^2 + 2AD^2$

$= BD^2 + CD^2 + 2BD.DC$

$= (BD + CD)^2$

$= BC^2$

$\therefore$ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

এই রকম আরো অনেক উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে।

উপরের দৃষ্টান্তগুলি থেকে দেখা যাচ্ছে পাটীগণিত ও জ্যামিতির অনেক সমস্যার সমাধানের ক্ষেত্রে বীজগণিতের নীতিগুলি ব্যবহার ক'রে অত্যন্ত সহজে ও সংক্ষিপ্ত উপায়ে সমাধান করা সম্ভব। পদ্ধতিটি ছাত্রদের নিকটও বেশ সহজ বোধ্য হয়। কাজেই যখনই সুবিধাজনক মনে হবে তখনই পাটীগণিত বা জ্যামিতিতে বীজগণিত প্রয়োগ করা চলতে পারে।

তবে একথা মনে রাখতে হবে যে সমস্ত সমস্যাগুলির পাটীগণিতের বা জ্যামিতির নিয়মে সহজে সমাধান করা সম্ভব—সেগুলির ক্ষেত্রে বীজগণিতের নিয়ম প্রয়োগ না ক'রলেও চলবে। আবার অনেক ক্ষেত্রে বীজগণিতের প্রয়োগ কষ্টকল্পিত, দীর্ঘ ও কষ্টসাধ্য হয়ে পড়ে। সেই সমস্ত ক্ষেত্রে বীজগণিতের প্রয়োগ না করাই ভালো। গণিতের প্রত্যেকটি শাখারই নিজস্ব নিয়ম ও কর্ম পদ্ধতি থাকা বাঞ্ছনীয়। যেখানে পাটীগণিত ও জ্যামিতির পদ্ধতিটি কঠিন ও দীর্ঘ বলে মনে হবে কিংবা পদ্ধতিটিতে অনেক যুক্তি-তর্কের অবতারণা ক'রতে হয়, তখন বীজগণিত প্রয়োগ ক'রলে সুফল পাওয়া যাবে। অন্যথায় প্রত্যেকটি শাখার নিজস্ব পদ্ধতি অনুসরণ করা উচিত।

বীজগণিত শিক্ষণ পদ্ধতি ঃ—সমীকরণ ও তার ব্যবহারকে বীজগণিতের কেন্দ্রস্থিত বিষয়বস্তু বলা যেতে পারে। বীজগণিতের কঙ্কালের শুকনো হাড়ের উপর সমীকরণই রক্ত ও মাংস সংযোজন ক'রে তাকে একটি পূর্ণাঙ্গ রূপ দিয়ে থাকে।

বীজগণিতের ইতিহাস পর্য্যালোচনা করলে দেখা যায় হিন্দুদের গণিতশাস্ত্রেও অনেক আগে থেকেই সমীকরণের উল্লেখ পাওয়া যায়। প্রাচীনকালে হিন্দুরা বড় বড় সংখ্যা নিয়ে নানাপ্রকার সমস্যার সমাধান করতেন। অনেকে বলে থাকেন সংখ্যাবিজ্ঞান ও বীজগণিতে ভারতবর্ষ গ্রীকদের থেকেও বেশী উন্নতি করেছিল। আলেকজান্দ্রিয়া স্কুলের Diophantus বীজগণিত নিয়ে যথেষ্ট চর্চা করেছিলেন কিন্তু তিনি সমীকরণকে একটি অসম্ভব বস্তু বলে উড়িয়ে দিয়েছিলেন। কিন্তু ঋণাত্মক রাশি, irrational সংখ্যা প্রভৃতি আবিষ্কারের সঙ্গে সঙ্গে সমীকরণও অসম্ভব বস্তু আর থাকল না। বীজগণিতের বিবর্ত্তনে দেখা যায় প্রথমে এ'টি ছিল আড়ম্বরপূর্ণ ভাষায় প্রকাশিত (Rhetoric Algebra)। তারপর কিছু সংক্ষিপ্ত করে তা লেখা হতে লাগল (Syncopated Algebra)। সবশেষে প্রতীক চিহ্নের ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান করা হ'তে লাগলো (Symbolic Algebra)। একটা উদাহরণ দিলেই ব্যাপারটা পরিষ্কার বুঝা যাবে।

Rhetoric Algebra :—10টি চেয়ার ও 5টি টেবিলের দাম মোট 200 টাকা।

Syncopated Algebra :—10টি চেয়ার + 5টি টেবিল = 200 টাকা।

Symbolic Algebra :—$10x+5y=200$

গণিত ও অন্যান্য বিজ্ঞান পাঠের মূল প্রয়োজনীয়তা হ'ল অজানাকে জানা। প্রকৃতি পর্যবেক্ষণ করার সময়, উচ্চতর বিজ্ঞান সম্বন্ধে আলোচনার সময় বা দৈনন্দিন জীবনের সমস্যাগুলির সমাধান করার সময় গণিতের সাহায্য নিতে হয়। অধিকাংশ সমাধানই করা হয় সমীকরণের সাহায্যে। এই জন্যই সমীকরণকে বীজগণিতের মেরুদণ্ড বলা হয়। বীজগণিতে যে সমস্ত পদ্ধতির কথা বলা হয়, সে পদ্ধতিগুলি আসলে সমীকরণেরই পদ্ধতি। প্রতীক চিহ্নের ব্যবহার, রাশির স্থানান্তরীকরণ, চিহ্ন পরিবর্ত্তন সমস্তই সমীকরণের অঙ্গ। একটু আগেই বীজগণিতের ইতিহাস পর্যালোচনা করে আমরা দেখেছি প্রথম অবস্থাতেও সমীকরণই ছিল বীজগণিতের একমাত্র পদ্ধতি।

বীজগণিত শ্রেণীকক্ষে আরম্ভ করার তিনটি সুস্পষ্ট পদ্ধতি প্রচলিত আছে। পদ্ধতিগুলি হ'ল :—(১) প্রথম চারটি নিয়মের পদ্ধতি (**Four Rules Method**)

(২) সমস্যা পদ্ধতি (**Problem Method**).

(৩) সূত্র-গঠনের পদ্ধতি (**Formulae Method**).

বীজগণিতে যে সমস্ত পাঠ্যপুস্তক প্রচলিত আছে। সেগুলিতে এই তিনটি পদ্ধতির মধ্যে দু'টি পদ্ধতিকে বাদ দিয়ে যে কোন একটি পদ্ধতি অনুসরণ করা হয়।

এটি কিন্তু বিজ্ঞান সম্মত নয়। যে কোন পাঠ্যপুস্তকে অন্ততঃ দু'টি বিভিন্ন পদ্ধতি অনুসরণ করা উচিত। এখন প্রত্যেকটি পদ্ধতি সম্বন্ধে কিছু কিছু আলোচনা করা যাক।

Four Rules Method বা চারটী নিয়মের পদ্ধতিট হ'ল :—বীজগণিতের প্রথম চারটি নিয়ম (যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ) সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া হয়। কিন্তু পদ্ধতি হিসাবে এটি অত্যন্ত কার্যকরী বা চিত্তাকর্ষক পদ্ধতি নয়। তার কারণ হিসাবে বলা যেতে পারে—

(১) পদ্ধতিটি অত্যন্ত অসন্তোষজনক, কারণ এটি কঠিন না হলেও যান্ত্রিক এবং সেইজন্য মোটেই চিত্তাকর্ষক নয়।

(২) ছাত্রদের ভবিষ্যৎ উন্নতির কোন সুযোগ থাকে না।

(৩) প্রথম পদ্ধতি হিসাবে ব্যবহার করলে পদ্ধতিটিকে নীরস, অর্থহীন ও কৃত্রিম বলে মনে হয়।

(৪) ছাত্রদের চিন্তাশক্তি, যুক্তি ও বিচার করণের ক্ষমতার কোন উন্নতি হয়না।

(৫) বিষয়টির ঐতিহাসিক ক্রমোন্নতির সঙ্গে পদ্ধতিটির কোন সংযোগ নেই।

(৬) ছাত্র ও শিক্ষক কারো সুবিধার জন্য কোন সুনির্দ্দিষ্ট নিয়মের ব্যবস্থা নেই।

(৭) ছাত্রদের সৃজনীশক্তির বিকাশের কোন সুযোগ থাকে না। নিয়মগুলি পূর্ব নির্ধারিত থাকে বলে তারা অন্ধ বা যান্ত্রিকভাবে চাপিয়ে দেওয়া নিয়মগুলি অনুসরণ করে চলে।

পদ্ধতিটি যে সম্পূর্ণরূপে ত্রুটিপূর্ণ একথা নিঃসন্দেহে বলা যায় না। London Mathematical Association এর মতে' a certain amount of teaching of the four rules is inevitable in the early stages." এই পদ্ধতিতেই ছাত্র বীজগণিতের বর্ণমালা ও ব্যাকরণের সঙ্গে পরিচিত হয়। কাজেই প্রাথমিক জ্ঞান অর্জন করার জন্য বা উচ্চতার জ্ঞানের ভিত্তি প্রস্তুত করার জন্য পদ্ধতিটির প্রয়োজন আছে, এ কথা বলা যেতে পারে। নিয়ম চারটির চর্চা করতে করতে ছাত্র কিছুটা মানসিক দক্ষতাও অর্জন করবে।

সমস্যা পদ্ধতি ও সূত্রগঠনের পদ্ধতিতে প্রথম চরেটি নিয়ম যান্ত্রিকভাবে অনুসরণ করতে হয় না। যেখানে প্রয়োজন হবে, সেখানে ছাত্র নিজের থেকেই প্রয়োজনীয় নিয়মটি ব্যবহার করবে। যেহেতু এটি নিয়ম অতএব অনুসরণ করতেই হবে—এ ধারণার পরিবর্তে ছাত্র তার যুক্তি ও বিচার শক্তি প্রয়োগ করে নিয়মটির

সত্যতা ও যথার্থ্যতা যাচাই ক'রে নিতে পারে। সমস্যা পদ্ধতির সাহায্যে বীজগণিত শিক্ষা দেওয়ার পক্ষে কয়েকটি যুক্তির অবতারণা করা যায়। এর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণগুলি হ'ল :—

১। বিষয়টির ঐতিহাসিক বিবর্তনের সঙ্গে পদ্ধতিটি সামঞ্জস্য রক্ষা করা চলে।

২। সমস্যা পদ্ধতিতে সমাধান করা অনেকটা ধাঁধার উত্তর দেওয়ার মত। কাজেই এই পদ্ধতিতে ছাত্রের কৌতূহল ও অনুসন্ধিৎসা প্রবৃত্তিকে জাগ্রত ক'রে তার আগ্রহের পরিমান বাড়ানো যেতে পারে।

৩। ব্যবহারিক ক্ষেত্রেও পদ্ধতিটি উপকারী ব'লে এর সম্বন্ধে একটা বাস্তববোধ ছাত্রদের মনে গ'ড়ে উঠে।

৪। বাঁধাধরা যান্ত্রিক নিয়ম অনুসরণ না ক'রে ছাত্র তার নিজস্ব যুক্তি ও বিচার শক্তি প্রয়োগ ক'রতে পারে।

৫। যে সমস্ত ছাত্রের এই পদ্ধতিতে বীজগণিত শিক্ষা শুরু হয় তারা অন্যান্য ছাত্রদের চেয়ে তুলনামূলক ভাবে বীজগণিতে দক্ষ হয়।

কিন্তু পদ্ধতিটির কতকগুলি ত্রুটীও আছে। বীজগণিতের সমস্ত সমস্যার সমাধান এই পদ্ধতির সাহায্যে ক'রলে পদ্ধতিটি সম্বন্ধে একটা ভ্রান্ত ধারণার সৃষ্টি হ'তে পারে। পদ্ধতিটিকে 'সর্ব-রোগ-হর ওষুধের' মত মনে হ'তে পারে। এতে পদ্ধতিটির গুরুত্ব কিছুটা হ্রাস পেতে পারে। সমস্যা পদ্ধতির মূল কথাই হ'ল সমীকরণ। সমস্যা পদ্ধতির সমস্যাগুলি এমনভাবে নির্বাচিত ক'রতে হবে যেন সবগুলিরই সরল সমীকরণের সাহায্যে সমাধান না করা যায়। সমস্যাগুলি বিষয়টির বিভিন্ন অংশ থেকে সংগ্রহ ক'রতে হবে। ছাত্রদের মুখস্থ করার যে একটা প্রবল প্রবণতা থাকে, সেটা সম্পূর্ণরূপে বন্ধ ক'রতে হবে। এ ছাড়া সমীকরণ ক'রতে গেলে অজানা রাশিটিকে x ধরতে হয়। কিন্তু এই xটি কেবলমাত্র একটি অজানা রাশি নয়, এ'টি একটি চলক (variable)। অথচ বারবার সমীকরণ করা সত্ত্বেও ছাত্র xকে কেবলমাত্র একটি অজানা রাশি বলেই মনে ক'রতে থাকে, এ'টি যে একটি চলক একথা তার মনে থাকে না। আবার অধিকাংশ সমীকরণে কেবলমাত্র যোগ ও বিয়োগের চর্চা করাই হ'য়ে থাকে। যেমন :—"কোন সংখ্যার সঙ্গে 6 যোগ ক'রলে 10 হয়?"—এই সমস্যাটিতে ছাত্র অজানা সংখ্যাটিকে x ধরে এইভাবে সমীকরণটি খাড়া করে:—

$$x+6=10 \; ; \quad \therefore \quad x=10-6=4.$$

সমীকরণগুলি এমনভাবে নির্বাচিত ক'রতে হবে যাতে অন্যান্য নিয়মগুলিও (গুণ, ভাগ) প্রয়োগ ক'রতে হয়।

সমস্যা পদ্ধতিতে যে x কে কেবলমাত্র অজানা রাশি বলে ধরা হ'ত, সূত্র-গঠন পদ্ধতিতে সেই x যে একটি চলক—এ কথা মনে রেখে সমাধান করা হয়। যদি একথা বলা যায় যে বীজগণিতে সমস্যা সমাধানের সময় পদ্ধতিতে প্রথমেই প্রতীক-চিহ্ন ব্যবহার ক'রতে হবে—তা হ'লে সমস্যা পদ্ধতি ও সূত্রগঠন পদ্ধতির মধ্যে মূলগত কোন পার্থক্যই থাকে না। তবে এই দু'টি পদ্ধতির মধ্যে কোন্‌টি প্রথমে ব্যবহার করা ভালো, কোন্ পদ্ধতিতে ছাত্রদের শিখন পাকা হয়, সে নিয়ে শিক্ষক ও শিক্ষাবিদ্‌দের মধ্যে মতভেদ আছে। London Mathematical Societyর মতে—"It may be said definitely that it is a mistake to lay emphasis on either problems or formulae to the exclusion of the other." যাই হোক এখন সূত্রগঠন পদ্ধতির সুবিধা অসুবিধাগুলির সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক্। প্রথমে সুবিধাগুলির কথাই ধরা যাক্।

১। বিষয়টির ধারা বা মূলসূত্র সম্বন্ধে একটা পরিষ্কার ধারণা পাওয়া যায়। সাধারণ সত্যের প্রতীকের মাধ্যমে প্রকাশে এবং প্রতীকের সাহায্যেই নূতন সত্য আবিষ্কার করার মধ্যে চিন্তার সংক্ষেপীকরণ করা সম্ভব।

২। প্রথম অবস্থাতে বিষয়টির যে ব্যবহারিক প্রয়োগ হ'য়েছিল—তার সঙ্গে এই পদ্ধতিটির একটা যোগসূত্র স্থাপিত হয় বলে পদ্ধতি সম্বন্ধে ছাত্রের আগ্রহ বৃদ্ধি পায়। সে সমস্ত ঘটনা বা নিয়মকে সূত্রের মাধ্যমে প্রকাশ ক'রতে চাইবে।

এইবার অসুবিধাগুলির কথা আলোচনা করা যাক্।

১। পদ্ধতিটি শিক্ষকের পক্ষে খুবই উপযোগী এবং সুনির্দিষ্ট; কিন্তু ছাত্রের পক্ষে, (বিশেষতঃ যারা একটু দেরীতে বুঝতে পারে) পদ্ধতিটি বেশ জটিল।

২। পদ্ধতিটিতে শিক্ষক বা ছাত্র—কারো জন্যই খুব বেশী পথ-নির্দেশ (guiding line) থাকে না।

৩। পদ্ধতিটি ব্যবহার ক'রতে হ'লে আগের থেকেই কতকগুলি সাধারণ নিয়ম জেনে রাখতে হয়।

৪। কখন কোন্ সূত্র প্রয়োগ ক'রতে হবে সে সম্বন্ধে শিক্ষা দেবার জন্য ছাত্রদের বার বার অভ্যাস করাতে হয়। এ'তে ছাত্রদের অযথা বেশ খানিকটা পরিশ্রম ক'রতে হয়।

এখন সমস্যা পদ্ধতি ও সূত্রগঠন পদ্ধতির একটা তুলনামূলক আলোচনা করা যাক্।

প্রথমতঃ দু'টি পদ্ধতিই মূলতঃ সমস্যার সমাধানের উপর ভিত্তি ক'রে প্রতিষ্ঠিত বলে ছাত্রদের কৌতূহল ও অনুসন্ধিৎসা প্রবৃত্তি জাগরিত হয়। ফলে তারা বিষয়টি পাঠে অধিকতর আগ্রহী হয়।

দ্বিতীয়তঃ সূত্রগঠন পদ্ধতিতে বেশ কিছুটা পূর্বজ্ঞানের প্রয়োজন। এই পূর্বজ্ঞান না থাকলে পদ্ধতিটি অনুসরণ করা খুবই জটিল হ'য়ে পড়ে। কিন্তু সমস্যা সমাধান পদ্ধতিতে কোন পূর্বজ্ঞানের প্রয়োজন হয় না।

তৃতীয়তঃ সূত্রগঠন পদ্ধতিটি সমস্যা পদ্ধতির চেয়ে বেশী গতানুগতিক ও যান্ত্রিক।

চতুর্থতঃ সমস্যা পদ্ধতি অপেক্ষা সূত্রগঠন পদ্ধতিতে প্রতীকের ব্যবহার বেশী।

পঞ্চমতঃ দু'টি পদ্ধতিতেই সচরাচর সমীকরণের মাধ্যমে ঈপ্সীত ফলে পৌছানো যায়। কাজেই একথা বলা যেতে পারে যে পদ্ধতি দু'টির বিষয়টির ঐতিহাসিক ক্রম-বিবর্তনের সঙ্গে একটা সামঞ্জস্য আছে।

ষষ্ঠতঃ দু'টি পদ্ধতিতেই প্রথম নিয়ম চারটি যান্ত্রিকভাবে বা হঠাৎ এসে পড়ে না। যখন যে নিয়মটির প্রয়োজন হয়—তখনই সেই নিয়মটি ব্যবহার করা হয়।

সপ্তমতঃ দু'টি পদ্ধতিতেই কোন কাল্পনিক শক্তি বা ক্ষমতার নিকট নতি স্বীকার না ক'রে ছাত্রকে তার নিজস্ব চিন্তা, যুক্তি ও বিচারশক্তি প্রয়োগ ক'রতে উৎসাহ দেওয়া হয়।

অষ্টমতঃ সূত্রগঠনের পদ্ধতিটি অপেক্ষাকৃত সংক্ষিপ্ত বলে এতে দ্রুত ফল লাভ করা যায়। কিন্তু সমস্যা পদ্ধতিতে ফললাভে বিলম্ব ঘটে।

এই আলোচনা থেকে দেখা যাচ্ছে পদ্ধতি দু'টির মধ্যে কোন একটি পদ্ধতিকে সম্পূর্ণ গ্রহণযোগ্য পদ্ধতি বলে বিবেচনা করা যায় না। বিভিন্ন পদ্ধতি প্রচলিত থাকলেও ছাত্ররা সমস্যার সমাধানের স্তরগুলি, এমনকি উত্তর পর্যন্ত মুখস্থ ক'রে পরীক্ষার খাতায় লিখে আসে। এ'তে তারা নম্বর হয়তো একটু বেশীই পায়, কিন্তু বীজগণিত শিক্ষা তাদের হয় না। এই অসুবিধা দূর করার বিষয়ে London Mathematical Associationএর বক্তব্য হ'ল :—

"Equation should, with beginners, arise either from problems or from the use of formulae when one of the letters in the formulae is unknown."

দুই পদ্ধতিতে বিভিন্ন উপায়ে সমীকরণ খাড়া ক'রে একইভাবে সমাধান করা যেতে পারে। আবার পদ্ধতি দু'টির মধ্যে অনুবন্ধ স্থাপন করার জন্য একই

সমীকরণের পৃথক পৃথক ভাবে দু'টি পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করা যেতে পারে। অনেকে আবার পদ্ধতি দু'টির একটা সংযুক্ত পদ্ধতিকে বীজগণিত শিখনের সবচেয়ে ভালো পদ্ধতি বলে মনে ক'রে থাকেন। এর স্বপক্ষে তাঁদের যুক্তি হ'ল ঃ—

- ☐ সংখ্যার বদলে অক্ষর (প্রতীক) ব্যবহার ক'রতে হয়। ছাত্ররা এর জন্য অধিকতর আগ্রহ অনুভব করে।
- ☐ বিষয়টির শিখন গণিতের জ্ঞানের উপর নির্ভরশীল। ফলে পাটীগণিতের সঙ্গে বীজগণিতের একটা ঘনিষ্ঠ অনুবন্ধ স্থাপিত হ'য়ে যায়।

এই পদ্ধতিতে পদ্ধতিটির উদ্দেশ্য, অর্থ, তত্ত্বমূলক ও ব্যবহারিক মূল্য সব কিছুই ছাত্রের নিকট পরিষ্কার হ'য়ে যায়।

পাটীগণিত সম্বন্ধে শিক্ষা লাভ করার সময়ই ছাত্রকে সংখ্যার বদলে প্রতীক ব্যবহার ক'রতে শিক্ষা দেওয়া যেতে পারে। বীজগণিত শিক্ষা শুরু করার আগেই কিন্তু সহজভাবে প্রতীক-ব্যবহার করা সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে হবে। যেমন ঃ—

(ক) এক টাকাতে কত পয়সা! পাঁচ টাকাতে? N টাকাতে?

(খ) 100 টাকার 10% = কত? 20% = কত? S% = কত?

(গ) একটি বাগানের দৈর্ঘ্য 10′ এবং প্রস্থ দৈর্ঘ্যের চেয়ে x' কম। বাগানটির ক্ষেত্রফল ও পরিসীমা কত?

এগুলির সমাধান করার সময় লক্ষ্য রাখতে হবে যেন প্রতিটি স্তর ছাত্র পরিষ্কার ভাবে বুঝতে পারে। অন্যথায় প্রতীক ব্যবহারের মূল উদ্দেশ্যটিই নষ্ট হ'য়ে যাবে। যেমন ঃ—

এক গজে কত ফুট? দু' গজে? দশ গজে? x গজে?

ছাত্র এইভাবে শিখবে ঃ

1 গজ = 1 × 3 ফুট = 3ফুট, 2 গজ = 2 × 3 ফুট = 6 ফুট,

10 গজ = 10 × 3 ফুট = 30 ফুট, x গজ = $x \times 3$ ফুট = $3x$ ফুট

যদি x সংখ্যক লোক y দিনে কোন একটি কাজ ক'রতে পারে, ত'বে সেই কাজটি z সংখ্যক লোক কতদিনে ক'রবে?

x সংখ্যক লোক কাজটি করে y দিনে

সমাধান ঃ

∴ 1 জন " " " $y \times x$ "

∴ z সংখ্যক " " " $\frac{y \times x}{z}$ "

এই পদ্ধতিতে শ্রেণীকক্ষে অপ্রত্যক্ষ ভাবে (Informal) বীজগণিত শুরু করা যেতে পারে। কতকগুলি সহজ সাধারণ সূত্র জানা থাকলে পদ্ধতিটি যথেষ্ট কার্য্যকরী হয়। ক্ষেত্রফল নির্ণয়, আয়তন নির্ণয়, বহুভুজের কোণ সমষ্টি নির্ণয় ইত্যাদি কতকগুলি সূত্র জেনে রাখা প্রয়োজন। তবে অধিকাংশ ক্ষেত্রেই ছাত্রদের এই সাধারণ সূত্রগুলি জানা থাকে না বলে পদ্ধতিটি যথেষ্ট কার্য্যকরী হ'য়ে উঠতে পারে না।

যাই হোক্ যে পদ্ধতিই অনুসরণ করা যাক্ না কেন, শিক্ষককে কয়েকটি বিষয়ের দিকে সতর্ক মনোযোগ দিতে হবে। যেমন :—

১। যে কৌশলে সমাধান করা হ'চ্ছে, সে কৌশলটি যেন শ্রেণীর সমস্ত ছাত্র আয়ত্ত ক'রতে পারে।

২। বিভিন্ন অমূর্ত্ত উহাহরণের ক্ষেত্রে কৌশলটি প্রয়োগ ক'রে দক্ষতা অর্জন ক'রতে হবে ;

৩। কেবল বর্ত্তমানে নয়, ভবিষ্যতেও যেন তারা কৌশলটি ব্যবহার ক'রতে পারে।

অনেক সময় বীজগণিতকে পাটীগণিতের সংক্ষিপ্ত রূপ বলা হয়। এইভাবেও পাটীগণিতের বিভিন্ন নিয়ম বা সূত্রকে বীজগণিতের সাহায্যে সংক্ষিপ্তভাবে প্রকাশ করা যায় এবং সমস্যাগুলি সমীকরণের সাহায্যে সমাধান করা যায়। এর জন্য প্রথমে অবশ্য সহজ উদাহরণ নিয়ে এগিয়ে যেতে হয়। যেমন :—কোন্ সংখ্যার সঙ্গে 6 যোগ ক'রলে সংখ্যাটি 15 হবে ? এই বিবৃতি থেকে একটি সমীকরণ পাওয়া যাচ্ছে। সে'টি হ'ল :

$$\text{সংখ্যাটি}+6=15$$

অথবা সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ ক'রলে, সংখ্যার বদলে x ধরে

$$x+6=15.$$

এইবার শিক্ষককে বলতে হবে সমীকরণের দুই দিক দাঁড়িপাল্লার দু'টি দিকের মত। দাঁড়িপাল্লাতে যেমন ভারসাম্য ঠিক রাখার জন্য দু'দিকের পাল্লাতে সমান সমান ওজন যোগ বা বিয়োগ ক'রতে হয়, সমীকরণেও তেমনি সমান চিহ্নের দু'দিকেই সমান সমান রাশি যোগ বা বিয়োগ ক'রতে হয়। অতএব $x+6=15$ এই সমীকরণে যদি কেবলমাত্র x পেতে হয়, তবে $x+6$ থেকে 6 বাদ দিতে হবে। কিন্তু একদিক থেকে বাদ দিলে ভারসাম্য থাকে না বলে উভয় দিক থেকেই 6 বাদ দিতে হবে। ফলে সমীকরণটি দাঁড়াল :—

$$x+6-6=15-6$$

অথবা $x=9$. সুতরাং সংখ্যাটি হ'ল 9

বীজগণিতের আর একটি পদ্ধতি হ'ল—এ'টিকে সাধারণীকৃত পাটীগণিত বলে মনে করা। পাটীগণিতের বিভিন্ন নিয়ম ও সূত্রকে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ ক'রে সমীকরণের সাহায্যে সমাধান ক'রে প্রয়োজনীয় ফল পাওয়া যায়। যেমন:—

$$\text{Area} = \text{L} \times \text{B}, ; \text{Simple Interest} = \frac{\text{P} \times \text{R} \times \text{T}}{100}$$ ইত্যাদি।

পাটীগণিতে এরকম বিভিন্ন জাতীয় সূত্র দেখতে পাওয়া যায়।

পদ্ধতিগুলির মূল কথাই হ'ল—যে পদ্ধতিই অবলম্বন করা হোক্ না কেন, পদ্ধতিটি ব্যবহারের ফলে বিষয়টির অন্তর্নিহিত অর্থ যেন ছাত্রদের নিকট পরিষ্কারভাবে ফুটে উঠে ; ছাত্ররা যেন বিষয়টি সম্বন্ধে যথেষ্ট আগ্রহ অনুভব করে এবং বিষয়টির ব্যবহারিক মূল্যটিও যেন তারা উপলব্ধি ক'রতে পারে।

বীজগণিত শিক্ষার প্রথম উদ্দেশ্য হ'ল ছাত্রদিগকে বীজগণিতের সরল সূত্রগুলিকে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ ক'রতে শিক্ষা দেওয়া। বলতে গেলে, প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ ক'রতে শিক্ষা দেওয়াকেই বীজগণিতের প্রথম পাঠ বলা যেতে পারে। অবশ্য প্রতীকগুলি এমন ভাবে নির্বাচন ক'রতে হবে যেন তার থেকেই কিসের বদলে প্রতীকটি ব্যবহার করা হ'চ্ছে সহজেই বোঝা যায়। যেমন:—ক্ষেত্রফলের প্রতীক A (area) পরিসীমার P (Perimeter), দৈর্ঘ্যের L (Length) ইত্যাদি। সূত্রগুলিও এমনভাবে নিতে হবে যেন সেগুলি সহজ হয় এবং ছাত্রদের পূর্ব পরিচিত হয়।

প্রতীকের সাহায্যে সূত্রটি প্রকাশ করার পর সে'টি ব্যবহার ক'রতে হবে। সাধারণতঃ 'অগ্রগামী' পদ্ধতিতে (Forwards) সূত্র ব্যবহার করা হয়। যেমন:— কোন বহুভুজের কোণ সমষ্টি সাধারণতঃ $S=2n-4$ এই সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। এখন যদি n দেওয়া থাকে, তবে S নির্ণয় করার পদ্ধতিকে অগ্রগামী পদ্ধতি বলা হয়। আবার কতকগুলি সূত্র পশ্চাদ্গামী পদ্ধতিতে (backwards) ব্যবহার করা হয়। যেমন ঐ সূত্রে যদি C এর মান দেওয়া থাকে এবং n এর সংখ্যা নির্ণয় ক'রতে হয়, তবে সেই পদ্ধতিকে পশ্চাদগামী পদ্ধতি বলা হয়। আবার 'লুকানো-সংখ্যার, (hidden number) সাহায্যেও বীজগণিত শুরু করা সম্ভব। কোন্ সংখ্যার সঙ্গে 5 যোগ করলে যোগফল 12 হবে—এ সমস্যার সমাধান খুব ছোট ছেলেও ক'রতে পারবে।

কেবলমাত্র প্রতীকের সাহায্যে সূত্র গঠনের দিকে মনোযোগ দিলেই চলবে না ; সূত্রকে আবার ভাষায় প্রকাশ করার শিক্ষাও দিতে হবে। এর জন্য অবশ্য অনুশীলন ও চর্চার কিছুটা প্রয়োজন। যেখানে প্রতীক ব্যবহার ক'রতে হবে—সেখানে এর প্রবর্ত্তন যেন যান্ত্রিক না হয়। আবার কোন জিনিসের বদলে কি প্রতীক ব্যবহার ক'রতে হবে তা—নির্ণয় ক'রতে যেন ছাত্রকে বেশী বেগ পেতে না হয়। কেবলমাত্র সংখ্যার বদলে প্রতীক ব্যবহার ক'রলেই প্রতীকের ব্যবহার শেখা হ'য়ে গেছে—এ কথা বলা চলে না। বিভিন্ন জিনিসের মধ্যে যে বিশেষ সম্বন্ধ বজায় থাকে, প্রতীক ব্যবহারের ফলে সেই সম্বন্ধটি যেন বজায় থাকে। যেমন :—

$A = 4\pi r^2$ $\quad S = ut + \frac{1}{2} ft^2$ $\quad C = \frac{5}{9}(F - 32).$

আবার ছাত্রদিগকে সূচক সম্বন্ধেও প্রথমদিকে শিক্ষা দিতে হবে। $a + a = 2a$, কিন্তু $a \times a = a^2$, এই পার্থক্যটি তাকে বোঝাতে হবে। কতকগুলি বাস্তব সমস্যার সাহায্যে সূচক সম্বন্ধে ছাত্রদিগকে শিক্ষা দেওয়া যায়। যেমন :—একটি ইটের বিভিন্ন দিকের মাপ হ'ল x, $2x$ এবং $3x$। ইটটির এক একটি দিকের ক্ষেত্রফল ও আয়তন কত? বিভিন্ন ভাবে সূত্র প্রকাশ ক'রতে শিখলে এবং সূত্রগুলিকে ভাষায় প্রকাশ ক'রতে শিখলে ছাত্র যেখানেই নতুন কোন বীজগণিতের সূত্র দেখতে পাবে সেইটিই ব্যাখ্যা করার চেষ্টা ক'রবে। অর্থাৎ তার শ্রেণীকক্ষের জ্ঞান সে শ্রেণীকক্ষের বাইরে যে জগৎ, তার বিভিন্ন সমস্যার সমাধানেও প্রয়োগ ক'রতে শিখবে। এইভবেই পুঁথির জ্ঞানের সঙ্গে জীবনের একটা ঘনিষ্ঠ যোগসূত্র স্থাপন করা সম্ভব।

———

॥ অষ্টাদশ অধ্যায় ॥

জ্যামিতি শিক্ষা পদ্ধতি

(Teaching of Geometry)

জ্যামিতি ঃ—এই শব্দটির মধ্যেই জ্যামিতি শিক্ষার উদ্দেশ্য লুক্কায়িত আছে। জ্যামিতি শব্দটি এসেছে জ্যা ও মিতি এই দু'টি শব্দ থেকে। জ্যা—অর্থ পৃথিবী এবং মিতি'র অর্থ হ'ল পরিমাপ করা। Geometry কথাটির অর্থও পৃথিবী পরিমাপ করা —(Geo = Earth, meter = to measure)। জ্যামিতির ইতিহাস পর্যালোচনা ক'রলে দেখা যায় প্রত্যেক দেশে জ্যামিতির উদ্ভব হ'য়েছে ক্ষেত্র পরিমাপেরভিতর দিয়ে। জ্যামিতি মানুষের খেয়াল-খুসীমত তৈরী কতকগুলি তথ্য নয়। মানুষের বিভিন্ন প্রয়োজনের তাগিদে এবং পৃথিবীর রহস্য উদঘাটন ক'রতে গিয়েই এই শাস্ত্রের উদ্ভব হ'য়েছে। আমাদের দেশে বৈদিক যুগে যজ্ঞের বেদী নির্মান ক'রতে গিয়ে ত্রিভুজাকার, চতুর্জাকৃতি ইত্যাদি বিভিন্ন জাতীয় জ্যামিতিক আকারের উল্লেখ পাওয়া যায়। এই যজ্ঞস্থল পরিমাপ বা যজ্ঞবেদী নির্মান ক'রতেন যাঁরা—তাঁদের বলা হ'ত অধ্বর্য্য। তাঁদের কাজের সুবিধার জন্য তাঁরা জ্যামিতির কতকগুলি সত্য আবিষ্কার ক'রে তার নাম দিয়েছিলেন—শূল্বসূত্র। পরবর্তী কালে এই শূল্বসূত্র থেকে জ্যামিতি আরো উন্নত হয় এবং এই উন্নতির মূলে ব্রহ্মগুপ্ত, ভাস্করাচার্য্য, মুনীশ্বর গণক প্রভৃতির নাম উল্লেখযোগ্য। ভাস্কর তাঁর বই 'লীলাবতী'তে দেওয়াল, পুষ্করিণী, কূপ, ছায়া প্রভৃতির ক্ষেত্রে জ্যামিতি ব্যবহারের কথা লিখেছেন। মিশর দেশের ইতিহাস পর্যালোচনা ক'রলে দেখা যায়—প্রতি বৎসর নীলনদের প্লাবনের পর জমির হিসাব রাখতে গিয়ে ও তীরে বাঁধ বাঁধতে গিয়ে নানাপ্রকার মাপের দরকার হয়; আর তার ভিতর দিয়েই জ্যামিতি উন্নত হয়। রোম দেশের নগর তৈরী ক'রতে গিয়ে জ্যামিতি আরম্ভ হয়। গ্রীস্ দেশে জ্যামিতির উন্নতি হয় শিল্পকলার ভিতর দিয়ে। যতদূর জানা গেছে— গ্রীকরা মিশরীয়দের নিকট হ'তেই জ্যামিতি সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করে। পীথাগোরাস, ইউক্লিড্ প্রভৃতি গ্রীক দার্শনিকের জ্যামিতির ক্ষেত্রে অবদান যথেষ্ট। অবশ্য এ্যারিষ্টটল, প্লেটো, আর্কিমিডিস প্রভৃতির নামও উল্লেখযোগ্য। প্লেটোর মতে— Geometry draws the Soul towards truth." আবার তাঁর Academy-র প্রবেশদ্বারে এই কথা ক'টি উৎকীর্ণ ছিল ঃ "Let no one ignorant of

Geometry, enter here" প্রথম দিকে জ্যামিতির সত্যগুলি সুসংবদ্ধভাবে লিপিবদ্ধ ক'রে রাখার কোন ব্যবস্থাই ছিল না। এ বিষয়ে প্রথম পুস্তক হ'ল—ইউক্লিডের Elements. ইউক্লিড তাঁর এই পুস্তকে প্রায় 500 উপপাদ্য সন্নিবিষ্ট করেন। পরবর্ত্তী কালে আর্কিমিডিস এবং এ্যাপোলোনিয়াস আরো অনেক নূতন উপপাদ্য প্রবর্ত্তন করেন। ইউক্লিডের এই পুস্তকের বিষয়বস্তু থেকেই ইউক্লিডিয় জ্যামিতির উদ্ভব হয় এবং তার থেকে আবার অন্য শ্রেণীর জ্যামিতির (যথা - Solid, Spherical এবং সবশেষে Non-Eucledian জ্যামিতি) উদ্ভব হয়।

প্রথম অবস্থাতে জ্যামিতি সম্বন্ধে ধারণা জন্মাতে হ'লে বাস্তব উদাহরণের সাহায্য নিতে হয়। শিক্ষক প্রথমে স্বর্ণকার, কর্মকার, রাজমিস্ত্রী, ছুতোর মিস্ত্রী, নাপিত, বৈজ্ঞানিক, এঞ্জিনিয়ার প্রভৃতির উদাহরণের সাহায্যে জ্যামিতি ব্যবহারের প্রয়োজনীয়তা ও উপযোগিতা সম্বন্ধে শিক্ষা দেবেন। পরে ছাত্ররা মনের দিকে আর একটু উন্নত হ'লে জ্যামিতির বিভিন্ন দিকের সঙ্গে তাদের পরিচয় করিয়ে দিতে পারা যায়। জ্যামিতির সঙ্গে তারা যত বেশী ক'রে পরিচিত হবে—ততই তারা দেখবে যে এই বিষয়টি পৃথিবীর নানা রহস্য বুঝতে তাদের সাহায্য ক'রে যাচ্ছে। প্লেটোর মতে—God eternally geometrises। এর উদাহরণ আমরা প্রাণীজগত বা উদ্ভিত জগতে দেখতে পাই। এক একটি পাতার, এক একটি ফলের এক এক রকম বিশেষ আকৃতি থাকে। আনারসের গায়ে বহুভুজের সুস্পষ্ট ইঙ্গিত। ফার্ণ পাতা, তেতুল পাতা ইত্যাদি সমান্তরাল ভাবে সাজানো থাকে। আবার পেঁপে, নারকেল প্রভৃতি গাছ বেশ বেলন আকৃতি বিশিষ্ট। আবার প্রাণীজগতে দেখা যায়—মাকড়সার জাল বহুভুজ আকৃতির। মৌমাছির মৌচাক ষড়ভুজ। ঈশ্বরের সৃষ্টির এই রহস্য উদ্ঘাটন ক'রতে গিয়েই মানুষ জ্যামিতির পরিচয় পেয়েছে। আকাশের দিকে দৃষ্টিপাত ক'রলে দেখা যায় চন্দ্র-নক্ষত্র-সূর্য্য ইত্যাদিকে বৃত্তাকার দেখায়। সূর্য্যের চারপাশে পৃথিবীর যে কক্ষপথ তাও অর্ধ-বৃত্তাকার। তখন মানুষ বৃত্ত, অর্ধ-বৃত্ত সম্বন্ধে ভাবতে শুরু ক'রলো। ক্রমশঃ নদীর বিস্তৃতি বা পাহাড়ের উচ্চতা মাপ করার জন্যও মানুষ জ্যামিতি ব্যবহার ক'রতে শিখলো। প্রকৃতিতে যে সমস্ত জ্যামিতিক আকৃতি সে দেখেছে সেই আকৃতি বিশিষ্ট দৈনন্দিন ব্যবহারের জন্য প্রয়োজনীয় জিনিস তৈরী ক'রতে সে শিখল (Man also geometrises)। আপাতদৃষ্টিতে মনে হয় রেখা, ত্রিভুজ, বহুভুজ, বৃত্ত ইত্যাদি নিয়ে আলোচনা করাই জ্যামিতির উদ্দেশ্য। কিন্তু এ'টাই জ্যামিতি শিক্ষার চরম উদ্দেশ্য নয়। এর থেকে ছাত্ররা যে জ্ঞান অর্জন ক'রবে তা তারা দৈনন্দিন জীবনের নানা কাজে প্রয়োগ ক'রবে

এবং সেইসঙ্গে ঈশ্বরের সৃষ্টিকেও বুঝতে সাহায্য ক'রবে। হার্বার্ট স্পেন্সার তাঁর Education নামক বইখানিতে বলেছেন—The education of the child must accord, both in mode and arrangement, with the education of mankind considered historically. জ্যামিতি শিক্ষা কার্য্যকরী করতে হ'লে বিষয়টির ইতিহাসের ক্রমবিকাশের ধারা অনুযায়ী শেখাতে হবে।

জ্যামিতি সম্বন্ধে সবচেয়ে প্রাচীন তথ্য পাওয়া গেছে মিশরের একখানি গ্রন্থে। এই গ্রন্থে জ্যামিতিতে যে জ্ঞানের আভাষ পাওয়া যায় তা হ'চ্ছে কতকগুলি নিয়ম—যেগুলি অভিজ্ঞতা থেকে আবিষ্কৃত হ'য়েছে। একটি বড় আয়তক্ষেত্রের তল মাপা হ'ত কয়েকটি ছোট আয়তক্ষেত্রের সাহায্যে। এই স্তরেই মাপ করার জন্য একক ব্যবহার করার প্রয়োজনীয়তা অনুভূত হ'য়েছিল। অনেকগুলি আয়তক্ষেত্রের মাপ প্রথম দিকে মেপে বার করা হ'ত। ক্ষেত্রগুলির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের মাপ পাশে লিখে রাখা হ'ত। হঠাৎ আবিষ্কৃত হ'ল যে ক্ষেত্রফল হ'ল দৈর্ঘ্য × প্রস্থের সমান। যত বেশী সংখ্যক ক্ষেত্রের মাপ পরীক্ষা করা যাবে—তত বেশী নির্ভরযোগ্য সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যাবে। তবে এই আবিষ্কার হয় যুক্তিশাস্ত্র অনুসারে (logically), কিন্তু এর প্রমাণ পাওয়া যায় না। কোন বিজ্ঞানসম্মত (Scientific) জ্যামিতির অংশ একে বলা যায় না। কিন্তু বিজ্ঞানসম্মত ধারা অনুযায়ী একেবারে সূত্র প্রয়োগ ক'রেই বলা যেতে পারে যে ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ। এ'টি তত্ত্ব হিসাবে ছাত্রের মনে থাকে এবং যখনই সে কোন বাস্তব সমস্যার সম্মুখীন হয়, তখনই সে এই সূত্রটি প্রয়োগ করে।

দু'টি পদ্ধতির মধ্যে কিছুটা পার্থক্যও আছে। অভিজ্ঞতা থেকে পুনঃ পুনঃ পরীক্ষার ফলে যা আবিষ্কার করা হয়, তার ভিত্তি হ'ল ইন্দ্রিয়ানুভূতি ও পরীক্ষণ। বিশেষ বিশেষ কতকগুলি দৃষ্টান্ত থেকে একটি সাধারণ তথ্যে উপনীত হওয়া যায়। কিন্তু অন্য পদ্ধতিটির ভিত্তি হ'চ্ছে কতকগুলি বিজ্ঞানসম্মত ধারণা ও সূত্র। এই ধারণা ও সূত্রগুলি আবার পূর্ব-নির্ধারিত কতকগুলি ধারণা, সূত্র ইত্যাদি কঠোর যুক্তির উপর প্রতিষ্ঠিত। একটিকে বলা হয় পরীক্ষামূলক জ্যামিতি, আর একটি হ'ল বিজ্ঞানসম্মত জ্যামিতি। একটি শাখা কাজ ক'রছে কতকগুলি বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্তের উপর নির্ভর ক'রে, আর কতকগুলি সাধারণ উপপাদ্যের উপর নির্ভর ক'রে কাজ করে অপর শাখাটি। প্রাচীন পদ্ধতি ছিল ব্যবহারিক পদ্ধতি। অধিকাংশ তথ্য আবিষ্কৃত হ'য়েছে দৈনন্দিন কাজের মধ্য দিয়ে। মিশরে যে গ্রন্থ পাওয়া গেছে তাতে জানা যায় বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্ত থেকে সাধারণ তথ্য আবিষ্কার করাই ছিল সে কালের পদ্ধতি। যতদূর সম্ভব আসন্ন মান নির্ণয় করার চেষ্টা করা হ'ত। গ্রীক্ জ্যামিতির উদ্ভব আরো পরে হ'য়েছে বলেই তা হ'য়েছে

বিজ্ঞানসম্মত। সাধারণ তথ্যের বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে প্রয়োগ এবং সঠিক মাপের উপর জোর দেওয়া হ'ত এই পদ্ধতিতে। Thales যে জ্যামিতি আবিষ্কার করেন, তা ছিল বিমূর্ত্ত জ্যামিতি। জ্যামিতির দু'টি উপপাদ্য তিনি আবিষ্কার করেন বলে জানা গেছে। সে উপপাদ্য দু'টি হ'ল—ত্রিভুজের তিনটি কোণ দুই সমকোণের সমান এবং দুই সমানকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতিক। Thales এর পরে পীথাগোরাসের স্কুলের উদ্ভব হয়। এঁরা জ্যামিতিকে একটি বিজ্ঞানশাস্ত্রে পরিণত ক'রলেন এবং বিষয়টিকেও বিমূর্ত্ত ক'রে তুললেন। তার পর ইউক্লিড বিষয়টিকে নিখুঁত বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গীতে দেখতে এবং বিষয়টিকে ধারাবাহিকভাবে লিপিবদ্ধ ক'রে রাখতে শুরু করেন। শতশত বৎসর পরে প্রাপ্ত বয়স্ক লোকেদের মনে যুক্তির ভিত্তিতে যে জ্যামিতির সৃষ্টি হ'য়েছে—সেই জ্যামিতিকে তিনি সূত্র, স্বতঃসিদ্ধ, উপপাদ্য ইত্যাদি নিয়ে শিশুদের উপযোগী ক'রে লিপিবদ্ধ করেন।

জ্যামিতি-শিক্ষাপদ্ধতি ও মনোবিজ্ঞান :—গেস্টাল্টবাদের উন্নতির সঙ্গে সঙ্গে গণিতকে সমগ্রভাবে বুঝবার ও জানবার উপর বেশী জোর দেওয়া হ'য়েছে। জ্যামিতি শুরু করা হয় সূত্র ধরে। প্রথমে বিন্দু, তারপর রেখা, তারপর সমতল ক্ষেত্র এবং সব-শেষে ঘনবস্তু—এইভাবে শেখানো হয়। শিক্ষার্থী তার দৈনন্দিন জীবনে ঘনবস্তুই বেশী ব্যবহার ক'রে থাকে। বিন্দু বা রেখার ব্যবহার খুব কমই হয়। কিন্তু জ্যামিতিতে বিন্দু বা রেখার যে সংজ্ঞা দেওয়া হয় তা বেশ কিছুটা অবাস্তব বলেই মনে হয়। আয়তন নেই—এমন বিন্দু অংকন করা সম্ভব নয় বলে এ কথা বলা যেতে পারে যে জ্যামিতিক বিন্দু হ'চ্ছে সত্যিকারের কল্পনার বস্তু। তেমনি প্রস্থ-বিহীন রেখা অংকন করাও অসম্ভব। এ'টিও কল্পনার বস্তু। এইজন্য বিন্দু ও রেখার সূত্র দিয়ে জ্যামিতি আরম্ভ ক'রলে বিষয়টিকে একটি অবাস্তব কাল্পনিক ও বিমূর্ত্ত জিনিস বলেই মনে হবে। পক্ষান্তরে ঘনবস্তু নিয়ে আরম্ভ ক'রে তার অংশ হিসেবে সমতল, সমতলের অংশ হিসেবে রেখা, রেখার অংশ হিসেবে বিন্দু—এইভাবে আলোচনা ক'রলে বিষয়টি মূর্ত্ত হ'য়ে উঠবে এবং বিষয়টির সমগ্র বাস্তব রূপটিও ছাত্রের নিকট পরিষ্কারভাবে ফুটে উঠবে।

গণিত শিক্ষণে প্রেষণার প্রয়োজন অত্যন্ত বেশী। এই প্রেষণা আবার বহির্জাত ও অন্তর্জাত, এই দু'প্রকারের হ'তে পারে। অন্তর্জাত প্রেষণা যা ভিতর থেকে আসে তা শিক্ষার্থীর উদ্দেশ্য, আগ্রহ, প্রয়োজনীয়তাবোধ ইত্যাদির উপর নির্ভরশীল। বহির্জাত প্রেষণা যা বাইরে থেকে আসে তা যে পরিস্থিতিতে শিক্ষার্থী শেখে, সেই পরিস্থিতি থেকে অর্থাৎ বাইরে থেকে আসে। সাধারণতঃ পরীক্ষাতে কৃতিত্ব, অন্যের সঙ্গে

প্রতিযোগিতা, পুরস্কার, শিক্ষকের প্রশংসা ইত্যাদি থেকেই এই জাতীয় প্রেষণা আসে। অপর দিকে তিরস্কার, ব্যঙ্গ, ভয় দেখান—এগুলি প্রেষণার বিপক্ষে কাজ ক'রে থাকে। শিক্ষার ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীর আগ্রহ অত্যন্ত প্রয়োজনীয় জিনিস। কোন কাজ ক'রতে গিয়ে যখন সে'টি ঠিক মত হ'তে থাকে তখন শিক্ষার্থী আনন্দ লাভ করে এবং কাজ ক'রতে আরো বেশী আগ্রহ বোধ করে। গণিতের কোন সমাধান ক'রতে পারলে বা জ্যামিতির কোন উপপাদ্য যথাযথ ভাবে প্রমাণ ক'রতে পারলে ছাত্র একটা আত্মপ্রসাদ লাভ ক'রে থাকে এবং তার মনে প্রেষণার সঞ্চার হয়।

জ্যামিতি শিক্ষা দু'রকম ভাবে দেওয়া যেতে পারে—এক হ'চ্ছে যুক্তিযুক্ত ধারা অনুসরণ ক'রে (Logical) এবং অপরটি হ'চ্ছে মনস্তত্ত্বের ধারা অনুসরণ ক'রে (Psychological)। যুক্তিযুক্ত ধারা অনুসরণ করে শিক্ষা দেওয়ার অর্থ হ'ল বিষয়টিকে এমনভাবে সাজিয়ে নেওয়া যাতে সমগ্র বিষয়টি যুক্তির দিক দিয়ে ধারাবাহিক হয়। বিষয়টি বোঝানো হয়—একটির পর একটি যুক্তি দিয়ে। বিষয়টিকে যুক্তি অনুসারে বিভিন্ন অংশে, বিভিন্ন প্রসঙ্গে ভাগ ক'রে পরিচ্ছেদ বা অধ্যায় অনুসারে সাজিয়ে শিক্ষা দেওয়া হয়। সমস্ত বিষয়টি একটা পূর্বপরিকল্পনা অনুসারে সাজিয়ে নেওয়া হয়। এ পদ্ধতিতে শিক্ষকের মনোযোগ বিষয়টির উপরই নিবদ্ধ থাকে। কিন্তু মনস্তত্ত্বের ধারা অনুসরণ ক'রে শিক্ষা দিতে গেলে শিক্ষার্থীর প্রয়োজন অনুসারে বিষয়, প্রসঙ্গ, শিক্ষার ধারা প্রভৃতি স্থির করা হয়। শিক্ষার্থীর যখন যে বিষয়টি জানার প্রয়োজন হয়, তখন সেই বিষয়টি উপস্থাপিত করা হয়। পূর্ব নির্দ্ধারিত কোন পরিকল্পনাও থাকে না। এই পদ্ধতিতে শিক্ষা দিবার পূর্বে শিক্ষার্থীর আগ্রহ, তার সুপ্ত ক্ষমতা, মেজাজ, পছন্দ—অপছন্দ ইত্যাদি সব কিছু লক্ষ্য করা হয়। শিক্ষক শিক্ষার্থীর মনের ধারা বুঝতে চেষ্টা করেন। কি রকম ক'রে শেখালে শিক্ষার্থী আগ্রহান্বিত হবে, কি ক'রে পাঠ চিত্তাকর্ষক ক'রে তোলা যাবে এ সমস্ত বিষয় বিবেচনা ক'রে দেখা হয়। এ পদ্ধতিতে শিক্ষার্থী নিজের চেষ্টাতেই শিক্ষালাভ করে।

এতদিন যে পদ্ধতিতে জ্যামিতি শিক্ষা দেওয়া হ'য়েছে তা হ'ল যুক্তিযুক্ত ধারা অনুসৃত পদ্ধতিতে। কিন্তু এই পদ্ধতি শিক্ষার্থীদের উপযোগী ছিল না। এই পদ্ধতিতে সে তার নিজের উদ্দেশ্য সাধনের চেষ্টা খুঁজে পায় না, আর নিজের অভিজ্ঞতা থেকে কোন জ্ঞানও অর্জন ক'রতে পারে না। ছাত্রকে বিষয়টি আয়ত্ত করার জন্য মুখস্থ করার পদ্ধতি অবলম্বন ক'রতে হয়, ফলে সমস্ত বিষয়টি নীরস ও কঠিন মনে হয়। এইজন্য অনেকে বিষয়টি হাতে কলমে শিক্ষা দেওয়ার পক্ষপাতী। সমস্ত বিষয়টি সম্বন্ধে একটা পরিষ্কার ধারণা গ'ড়ে তোলার পর যদি সে যুক্তি দিয়ে প্রমান করার চেষ্টা করে,

তখন যুক্তির ধারা সে কিছু কিছু বুঝতে পারবে। আবার অনেকে অযথা অনেক সময় নষ্ট হবে, এই অজুহাতে হাতে-কলমে শিক্ষা দেওয়ার পদ্ধতির বিরোধী।

বর্ত্তমানে অনেক গণিতবিদ জ্যামিতি শিক্ষা দেবার সময় দু'টি বিষয়ের উপর গুরুত্ব আরোপ ক'রে থাকেন। সে দু'টি বিষয় হ'ল ঃ—(১) স্বতঃলব্ধ জ্ঞান বা স্বজ্ঞা (Intuition) এবং (২) কয়েকটি বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্ত থেকে সাধারণ সিদ্ধাতে উপনীত হওয়া (Induction)। যে সমস্ত সম্পাদ্য বা উপপাদ্য সজ্ঞা দ্বারাই বোঝা সম্ভব, সেখানে 'প্রমাণ' হ'ল একটা বাড়তি বোঝা। এতে অযথা অনেক সময় নষ্ট হয় ও অনেক ক্ষেত্রেই অনর্থক অতিরিক্ত পরিশ্রম ক'রতে হয়। এ রকম ক্ষেত্রে প্রমাণের চেষ্টা না ক'রে স্বতঃসিদ্ধ বলে ধরে নিয়ে বিষয়টিতে এগিয়ে যাওয়াই সমীচিন। জ্যামিতির ইতিহাস পর্য্যালোচনা ক'রলেও এই সজ্ঞার যথেষ্ট ব্যবহার দেখা যায়। ইউক্লিডের অনেক আগেই জ্যামিতির সৃষ্টি হ'য়েছে। তখন স্বজ্ঞাই ছিল প্রশস্ত উপায়। ইউক্লিড কিন্তু অনেক ক্ষেত্রে প্রমাণ ক'রতে গিয়ে এমন কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধ, উপপাদ্য প্রভৃতির সাহায্য নিয়েছেন, যেগুলি অনেক বেশী কঠিন বলেই মনে হয়। অবশ্য কেবলমাত্র স্বজ্ঞার সাহায্যেই সব কাজ করা হ'ত না। আরোহী পদ্ধতির উপর ভিত্তি ক'রেই জ্যামিতি অগ্রসর হ'তে পেরেছিল। হাতে-কলমে কতকগুলি কাজ করার মধ্যে বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্তে উপনীত হ'তে পারা যেত। অবশ্য একটি কিংবা দু'টি দৃষ্টান্তের সাহায্যে সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারা যেতনা। অনেকগুলি দৃষ্টান্ত পর্যবেক্ষণ ও পরীক্ষা ক'রে তবেই একটা সিদ্ধান্তে আসা সম্ভব হ'ত। দৃষ্টান্তের সংখ্যা যত বেশী হ'ত, সিদ্ধান্তের সত্যতাও তত বেশী হ'ত।

জ্যামিতি শিক্ষার প্রয়োজনীয়তা ঃ—জ্যামিতি শিক্ষার প্রয়োজনীয়তার কথা অস্বীকার করা যায় না। কেবলমাত্র ব্যবহারিক মূল্যই নয়, কৃষ্টিমূলক বা শৃঙ্খলামূলক মূল্যও বিষয়টির যথেষ্ট। ব্যক্তির কৃষ্টিমূলক বিকাশের জন্য জ্যামিতির অবদান কম নয়। বিশুদ্ধ চিন্তা বলতে যা বোঝায়, তার প্রকৃতি ও ক্ষমতার সঙ্গে পরিচিত হওয়া যায় এই বিষয়টি পাঠের মাধ্যমে। কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধ বা ধারণার উপর ভিত্তি ক'রে ছাত্র যুক্তিযুক্ত বিচার করার একটি ধারা গ'ড়ে তুলতে পারে। জ্যামিতি চর্চার ফলে বুদ্ধির বিকাশ ঘটে এবং বিচারকরণের ক্ষমতাও বাড়ে। তা ছাড়া বিষয়টি পাঠের ফলে নূতন উপায় উদ্ভাবন করার দক্ষতা বা তৎপরতাও বৃদ্ধি পায়; সৌন্দর্যমূলক জ্ঞানও বিকশিত হয়। বিভিন্ন জিনিসের মধ্যে সামঞ্জস্য নির্ণয় করার ক্ষমতা অর্জন বা সরলরেখা ও বক্ররেখার সাহায্যে সুন্দর চিত্র অঙ্কন করার ক্ষমতা অর্জিত হয় এই বিষয়টি চর্চার দ্বারা। কিন্তু খুবই দুঃখের বিষয়, আমাদের

দেশে বিদ্যালয়গুলিতে জ্যামিতি ঠিক মত শেখান হয় না—মুখস্থ করানো হয়। ছাত্ররা সম্পাদ্য, উপপাদ্য বা সমস্যাগুলির অঙ্কন ও প্রমাণ যান্ত্রিকভাবে মুখস্থ ক'রে থাকে। সংশ্লেষণ বা বিশ্লেষণ করার ক্ষমতাকে কাজে লাগাবার কোন সুযোগই তাদের দেওয়া হয় না। এ'তে জ্যামিতি শিখনের আসল উদ্দেশ্যই নষ্ট হ'য়ে যায়।

জ্যামিতি শিখনের সাধারণ **উদ্দেশ্যগুলিকে** মোটামুটি এইভাবে ব্যক্ত করা যায়ঃ—

(১) অধিকসংখ্যক জ্যামিতিক তত্ত্ব ও তথ্যের সঙ্গে ছাত্রদের পরিচিত করা ;

(২) বিভিন্ন তত্ত্ব ও তথ্যের মধ্যে যে যুক্তিযুক্ত সম্বন্ধ আছে, তা বুঝতে ছাত্রদের সাহায্য করা ; এবং

(৩) এই সমস্ত তত্ত্ব ও তথ্য ঠিকমত প্রয়োগ করার শিক্ষা দেওয়া।

জ্যামিতির কাজ বা জ্যামিতিক শিক্ষার উদ্দেশ্য সব শ্রেণীতে একই থাকে না। বিভিন্ন শ্রেণীতে এই উদ্দেশ্য বিভিন্নভাবে রূপায়িত করার চেষ্টা করা হয়। ছাত্রদের মানসিক বয়স ও পরিমানের উপর এই উদ্দেশ্যগুলি নির্ভর ক'রে থাকে। প্রথমে দেখা যাক্ নিম্ন মাধ্যমিক স্তরে জ্যামিতির কাজ কি! এই স্তরটি অষ্টম শ্রেণী পর্য্যন্ত প্রসারিত ধরা যেতে পারে। বিদ্যালয়ে আসার পূর্বেও ছাত্র জ্যামিতি সম্বন্ধে একটা প্রাথমিক জ্ঞান বা ধারণা অর্জন ক'রে থাকে। এই খণ্ড খণ্ড বিক্ষিপ্ত জ্ঞানকে সুসংগঠিত করাই হবে এই স্তরে জ্যামিতি শিক্ষার মূল উদ্দেশ্য। ছাত্রদের পূর্বজ্ঞানকে আবার জ্যামিতির ব্যাপক ও সাধারণীকৃত জ্ঞানের সঙ্গে যুক্ত ক'রতে হবে। এই ব্যাপক ও সাধারণীকৃত জ্ঞান যদি দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত হয়, তবে আরো ভালো হয়। এই স্তরে ছাত্রদের জ্যামিতির মূল ধারণা ও মৌলিক কৌশলগুলির সঙ্গে পরিচিত ক'রে দেওয়া হয় এবং অবরোহী পদ্ধতিতে বিচার করার প্রাথমিক জ্ঞান আয়ত্ত ক'রতেও তাকে সাহায্য করা হয়। প্রথমদিকে অবশ্য জ্যামিতিক তত্ত্বগুলি বাস্তব জগত থেকেই নির্বাচিত করা হয় এবং ম্যাপ, মডেল, পরিমাপ প্রভৃতির মাধ্যমেই জ্যামিতি শিক্ষা দেওয়া হয়।

এবার দেখা যাক্ উচ্চ মাধ্যমিক স্তরে জ্যামিতি শিক্ষার উদ্দেশ্য কি ? এই স্তরটিকে নবম শ্রেণী থেকে শুরু ক'রে একাদশ শ্রেণী পর্য্যন্ত বিস্তৃত বলে ধরা যেতে পারে। এই স্তরে জ্যামিতি শিক্ষার উদ্দেশ্য হ'ল ছাত্রদিগকে জ্যামিতির যুক্তি-সম্মত চিন্তাধারার সঙ্গে পরিচিত করা ; যাতে তারা স্বাধীন ভাবে সুস্পষ্ট চিন্তা

ক'রতে শেখে, মূল্যায়নের সঠিক পদ্ধতিগুলি সঙ্গে পরিচিত হয় এবং ঠিক ভাবে সাধারণীকরণ ক'রতে পারে। এই স্তরে কিভাবে সত্য আবিষ্কার করা যেতে পারে তার সঙ্গে ছাত্রদের পরিচয় করানো হয়। গণিতের সমস্যা এবং সমস্যার সঠিক সমাধানের পন্থা নির্ণয়ের কৌশলগুলিও এই স্তরে ছাত্রকে শেখানো হয়। ছাত্র পরিস্থিতিটি বিশ্লেষণ ক'রতে শেখে, পরিস্থিতির অন্তর্গত বিভিন্ন অংশের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় ক'রতে শেখে এবং জ্যামিতিক ও অ-জ্যামিতিক ভাব ও ধারণাগুলি পরিষ্কার ভাবে ও সঠিকভাবে প্রকাশ ক'রতে শেখে। পূর্বে মনে করা হ'ত জ্যামিতি চর্চার ফলে মানসিক ক্ষমতা বৃদ্ধি পায়। কিন্তু বর্ত্তমান কালে মনোবিজ্ঞানীরা বলে থাকেন কেবলমাত্র জ্যামিতি চর্চার ফলেই মানসিক শক্তি বা ক্ষমতা বৃদ্ধি পায় না এর জন্য আরো অনেক বিষয়ের চর্চা করা প্রয়োজন।

'ইউক্লিড পড়ানো ও ইউক্লিডের মতো পড়ানো :—ইউক্লিড ছিলেন আলেকজান্দ্রিয়া শহরের একজন বিখ্যাত গণিতবিদ। তিনি Elements নামক ১৩ খণ্ডের একটি পুস্তক রচনা করেন। ১৩ খণ্ডের মধ্যে ১ম থেকে ৪র্থ, ৬ষ্ঠ, এবং ১১শ থেকে ১৩শ খণ্ড হ'ল জ্যামিতি সম্বন্ধীয়। ইউক্লিডের যুগে তাঁর পুস্তকের যথেষ্ট সমাদর থাকলেও বর্তমানকালে তার অনেক কঠোর সমালোচনা করা হ'য়েছে। 'ইউক্লিড পড়ানো' (Teaching Euclid) এবং ইউক্লিডের মতো পড়ানোর (Euclid Teaching) মধ্যে যথেষ্ট পার্থক্য আছে। ইউক্লিড পড়ানোর অর্থ হ'ল ইউক্লিডের Element এর অন্তর্নিহিত ভাব বা ধারণাগুলি বুঝতে ছাত্রদের সাহায্য করা। আর ইউক্লিডের মতো পড়ানোর অর্থ হ'ল প্রথমে সংজ্ঞা দিয়ে পাঠ শুরু ক'রে তারপর স্বতঃসিদ্ধ, স্বীকার্য প্রভৃতির মাধ্যমে উপপাদ্যে উপনীত হওয়া। ইউক্লিডের মতো পড়ানোর অনেকগুলি অসুবিধা আছে বলে ইউক্লিড পড়ানোর উপর বেশী জোর দেওয়া উচিত। ইউক্লিডের মতো পড়ানোর অসুবিধাগুলি সংক্ষেপে হ'ল :—

(১) শিখনের প্রক্রিয়াটি মনোবিজ্ঞান সম্মত নয়।

(২) জ্যামিতির ব্যবহারিক দিকটি সম্পূর্ণ উপেক্ষিত ও অবহেলিত থাকে।

(৩) ইউক্লিডের কতকগুলি ধারণা ছিল ভুল।

(৪) নিখুঁত ও বাস্তব বিজ্ঞানের প্রাথমিক বৈশিষ্ট্যগুলি ইউক্লিডের পদ্ধতিতে উপলব্ধি করা যায় না। তা ছাড়া প্রথমেই কতকগুলি সংজ্ঞা মুখস্থ ক'রে যে বিচ্ছিন্ন জ্ঞান অর্জিত হয়, তাতে জ্যামিতি সম্বন্ধে পূর্ণ জ্ঞান লাভ করা সম্ভব হয় না।

যাই হোক্, এখন 'ইউক্লিডের' পদ্ধতি সম্বন্ধে একটু বিশদভাবে আলোচনা করা যাক্। ইউক্লিডের পদ্ধতিকে **যুক্তিসম্মত পদ্ধতি** (Logical method) বলা হ'য়ে

থাকে। তিনি জ্যামিতি শিক্ষণের ক্ষেত্রে প্রধানতঃ যুক্তি, সিদ্ধান্ত ইত্যাদির প্রাধান্যই স্বীকার ক'রে নিয়েছেন। তাঁর পদ্ধতি শিশুমনের পক্ষে খুব বেশী গ্রহণযোগ্য হয় নি, বরং বলা যেতে পারে, ঐ পদ্ধতি বয়স্কদের উপযোগী। সে যুগে অবশ্য শিশু শিক্ষার এত প্রসার ঘটেনি। কাজেই বলা যেতে পারে, বয়স্কদের উপযোগী ক'রে এবং বয়স্কদের প্রয়োজন অনুযায়ী ইউক্লিডের পদ্ধতির উদ্ভব হ'য়েছিল।

আগেই বলা হ'য়েছে, ইউক্লিডের পদ্ধতি শুরু হয় কতকগুলি জ্যামিতিক আকারের সংজ্ঞা দিয়ে। প্রথমে বিন্দু, তারপর রেখা, তল, কোণ ইত্যাদি সম্বন্ধে আলোচনা করা হয় ও সেগুলির সংজ্ঞা দেওয়া হয়। আবার এই সংজ্ঞাগুলি সম্বন্ধে কতকগুলি চিরন্তন সম্বন্ধ স্থির ক'রে নেওয়া হয় যেগুলি প্রমাণের কোন অপেক্ষা রাখে না বা যেগুলি ঠিকমত প্রমাণ করাও যায় না। এগুলিকে **স্বতঃসিদ্ধ বা স্বীকার্য** (**Postulates**) বলা হয়। ইউক্লিড এই সমস্ত সংজ্ঞা ও স্বীকার্যগুলির সাহায্য নিয়ে অবরোহী পদ্ধতিতে জ্যামিতিক আকার সম্বন্ধীয় বহু সূত্র গঠন করেন।

ইউক্লিডের পদ্ধতি শৃঙ্খলামূলক মূল্যের জন্যই প্রসিদ্ধ—এতে জ্যামিতির বাস্তব মূল্যকে কোন স্থানই দেওয়া হয় না। তবে ইউক্লিড মনে ক'রতেন যে এই পদ্ধতির সাহায্যে বিভিন্ন জাতীয় মানসিক ক্ষমতা, যেমন চিন্তা করা, ধারণা করা, বিচার করা ইত্যাদি বিকশিত হয়। এগুলি ছাড়াও এই পদ্ধতিতে সত্যনিষ্ঠা, মনোযোগ, আত্মপ্রত্যয়, জ্যামিতিক নিয়ম ইত্যাদির চর্চার সুযোগ যথেষ্ট আছে বলেই মনে করা যায়।

কিন্তু সত্যসত্যই এই গুণগুলি বিকশিত হয় কিনা সে সম্বন্ধে আধুনিক মনোবিজ্ঞানীরা যথেষ্ট আস্থাশীল নন। তাঁদের মতে ইউক্লিডের পদ্ধতিটি শিশুমনের উপযোগী তো নয়ই, বরং সম্পূর্ণ অনুপযোগী ও অমনোবৈজ্ঞানিক। শিশুরা মূর্ত্ত জিনিসের সাহায্যে অমূর্ত্ত জ্ঞান অর্জন করে। কিন্তু ইউক্লিডের পদ্ধতিতে তারা প্রথমেই অমূর্ত্ত জ্ঞানের সম্মুখীন হ'চ্ছে। এর ফলে সেই জ্ঞান তাদের বোধগম্য হ'চ্ছে না। বিষয়-বস্তুটি উপলব্ধি বা হৃদয়ঙ্গম ক'রতে না পেরে তারা তা মুখস্থ ক'রতে বাধ্য হয়। অর্থাৎ পদ্ধতিটি পরোক্ষভাবে মুখস্থ করাকে উৎসাহিত করে। যারা বেশী মুখস্থ ক'রতে পারে তারাই বেশী জ্যামিতি বুঝেছে বলে ধরে নেওয়া হয়। যাদের মুখস্থ করার ক্ষমতা কম, তারা বিষয়টিতে দুর্বল হ'য়ে পড়ে। অর্থাৎ এই পদ্ধতিটি বিমূর্ত্ত চিন্তন বা নৈর্ব্যক্তিক চিন্তনের পথটি সম্পূর্ণ রুদ্ধ ক'রে দেয়। অন্যান্য ক্ষমতাগুলিও ঠিকমত বিকশিত হয় না। মূর্ত্ত জিনিস ও মূর্ত্ত অভিজ্ঞতার অভাবে অমূর্ত্ত জ্যামিতি তার সংজ্ঞা ও স্বীকার্য নিয়ে শিশুর কাছে একটা বিভীষিকা হ'য়ে পড়ে। বার বার পড়ার

ফলে সে হয়তো সংজ্ঞাগুলির ভাষামূলক অর্থ আয়ত্ত করে। কিন্তু তাদের যুক্তিযুক্ত সঙ্গতি বা কঠোর নিয়মানুবর্ত্তিতা সম্বন্ধে কোন ধারণা গড়ে তুলতে পারে না। সংজ্ঞাগুলি তার কাছে বেশ জটিল হয় বলে সে ক্রমশঃ সমস্ত জ্যামিতিকেই একটা জটিল বিষয় বলে মনে করতে শুরু করে।

আধুনিক বা মনোবিজ্ঞানসম্মত (Psychological) পদ্ধতি অনুযায়ী জ্যামিতি শিক্ষার সোপান বা স্তর ঃ—

জ্যামিতি শিক্ষার প্রাথমিক স্তর ঃ—কোন শিক্ষাকে কার্য্যকরী ক'রতে হ'লে শিক্ষার উদ্দেশ্যটি শিক্ষার্থীকে পরিষ্কার ভাবে বুঝিয়ে দিতে হবে। জ্যামিতি শিক্ষার প্রথম স্তরে শিক্ষার্থীদের বুঝতে দেওয়া দরকার—কেন তারা বিষয়টি শিখবে। কোন্ দেশে, কখন এবং কিভাবে জ্যামিতির সৃষ্টি হ'য়েছে তা শিশুদের বয়সের উপযোগী ক'রে বললে শিক্ষার্থীরা বুঝতে পারবে যে প্রয়োজনের তাগিদেই জ্যামিতির সৃষ্টি হ'য়েছে।

প্রাথমিক স্তরে শিশুর চারপাশে যে সমস্ত জিনিস আছে, সেগুলির সাহায্যে তাকে বিভিন্ন জ্যামিতিক আকারের সঙ্গে পরিচিত ক'রে দেওয়া হবে। এই স্তরে শিক্ষাটা হবে অনেকটা শিশুর অজ্ঞাতসারেই। অভিজ্ঞতার মাধ্যমেই ছাত্র জ্যামিতি সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন ক'রবে এবং এই স্তরে যান্ত্রিক প্রমাণের কোন প্রয়োজন হবে না। বিভিন্ন জ্যামিতিক নাম ও Instrument Box এর ব্যবহার এ স্তরে শেখান যেতে পারে।

পরবর্ত্তী স্তরে স্বভাবসিদ্ধ জ্ঞান বা Intuition এর প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়। যে সমস্ত ঘটনা অবশ্যম্ভাবী সেগুলিকে স্বতঃ প্রমাণিত (স্বতঃ সিদ্ধ) বলে ধরে নেওয়া হয় এবং যেটি আগে ঘটেনি বা যার সম্বন্ধে আগে কোন চিন্তা করা হয়নি, সেই রকম ঘটনার সত্যতা প্রমাণ করার জন্য যুক্তি প্রয়োগ করা হয়। এই স্তরে সামঞ্জস্য নির্ণয় করা ও বিভিন্ন আকার ও আয়তনের মধ্যে তুলনা করার উপর বেশী জোর দেওয়া হয়। তা ছাড়া, এ স্তরে আরোহী প্রণালীর অনুসরণও করা হয়। এক কথায় বলা যেতে পারে এ স্তরে কতকগুলি জ্যামিতিক তথ্য সংগ্রহ ও ব্যবহার করা হয়।

জ্যামিতি শিক্ষার তৃতীয় স্তরে ঐ সমস্ত জ্যামিতিক তথ্যকে একটি যুক্তিযুক্ত ধারাবাহিকতা অনুযায়ী একত্র করা হয়। কিছু কিছু যৌক্তিক ধারাবাহিকতার জ্ঞান ছাত্র ইতিমধ্যেই অর্জন ক'রেছে। কতকগুলি উপপাদ্যকে একত্র ক'রে এক-দল ভুক্ত করা হয় এবং তার একটিকে প্রাধান্য দেওয়া হয়।

আলোচনার সুবিধার জন্য এবং সংগঠনের সরলতার জন্য জ্যামিতির পাঠক্রমকে কয়েকটিভাগে ভাগ করা যায়। অবশ্য এই ভাগ বিষয়বস্তু অনুসারে হ'তে পারে

আবার শিখন পদ্ধতি অনুসারেও হ'তে পারে। ইউক্লিড বিষয়বস্তু অনুসারে স্তর বিন্যাসের পক্ষপাতী ছিলেন, কিন্তু এই পদ্ধতিতে সাধারণ ছাত্ররা অবহেলিত হয় বলে এ'টি গ্রহণযোগ্য নয়। যাই যোক্ জ্যামিতির বিভিন্ন স্তরগুলিকে নিম্নলিখিত ভাবে ভাগ করা হয় ঃ

(১) পরীক্ষণমূলক স্তর (Experimental Stage), (২) কারণ দেখিয়া কার্য্য নির্ণয়াত্মক বা অবরোহী স্তর (deductive Stage) এবং (৩) নিয়মানুগ স্তর (Systematising stage)

পরীক্ষণমূলক স্তর ঃ—এই স্তরে শিক্ষাদান প্রণালী মূলতঃ নিরীক্ষার মধ্যেই সীমাবদ্ধ থাকে। ছাত্রকে জ্যামিতির সাধারণ ধারণা. নাম ও চিত্রের সঙ্গে পরিচিত ক'রে দেওয়া হয়। জ্যামিতিক যন্ত্রপাতিগুলির মধ্যে যেগুলি সহজ ও সরল, সেগুলির ব্যবহারও ছাত্রকে শেখান হয়। কেবলমাত্র মৌখিক পদ্ধতিতে শিক্ষাদান করা হয় না ; বাস্তব উদাহরণের সাহায্যে ও দৈনন্দিন অভিজ্ঞতার মাধ্যমে, ছাত্রদিগকে জ্যামিতি শিক্ষা দেওয়া হয়। জমি মাপ করা, খেলার জন্য মাঠের সীমানা নির্দিষ্ট করা ইত্যাদি কাজের মাধ্যমে জ্যামিতি শিক্ষা দেওয়া হয়। জ্যামিতি শিক্ষার এই স্তরে জ্যামিতিক শব্দগুলির সংজ্ঞা বিশেষ ভাবে দেওয়ার চেষ্টা করা দরকার। আগে পূর্ব নির্ধারিত কতকগুলি সংজ্ঞা ছাত্রকে মুখস্থ করানো হ'ত। এই স্তরে নিজের হাতে পরীক্ষা ক'রে অভিজ্ঞতার মাধ্যমে শিক্ষার্থী নিজে নিজেই সূত্র তৈরী ক'রবে। যে সমস্ত জ্যামিতিক তথ্য ছাত্রকে শেখান হবে, সেগুলি বাস্তব জগতের সঙ্গে সম্বন্ধ রেখে শেখানো দরকার। অবশ্য এর জন্য নানাবিধ ম্যাপ, মডেল ও যন্ত্রপাতির প্রয়োজন হয়। জ্যামিতির সঙ্গে কিছু পরিচয় হ'লে জ্যামিতিক চিত্রগুলির ভিতর শিক্ষার্থীরা সৌন্দর্যের আভাষ পায় এবং তখন সে চিত্রগুলিকে চিত্র হিসাবে গ্রহণ ক'রতেই আগ্রহবোধ করে। এইজন্য এই বিষয়টির প্রথম উপস্থাপন হাতে কলমে কাজের ভিতর দিয়ে করাই বাঞ্ছনীয়। শিক্ষার্থীদের আগ্রহ ধীরে ধীরে বিমূর্ত্ত চিত্রগুলিতে যাবে। তবে এ পরিবর্তন হঠাৎ আসে না। জ্যামিতির বিভিন্ন সংজ্ঞাগুলিকে ব্যবহারিক ভাবে আগে প্রয়োগ ক'রতে হবে। কোণ, বাহু, ত্রিভুজ, লম্ব, বিন্দু, সরলরেখা, সমান্তরাল সরলরেখা ইত্যাদির সংজ্ঞা মুখস্থ না করিয়ে বাস্তব উদাহরণের সাহায্যে ছাত্রদিগকে শিক্ষা দেওয়া উচিত।

কারণ দেখিয়া কার্য্য নির্ণয়াত্মক স্তর ঃ—জ্যামিতি শিক্ষার প্রথম স্তরে ছাত্ররা বিন্দু, রেখা ইত্যাদি সম্বন্ধে ধারণা অর্জন ক'রেছে। তারা কতকগুলি জ্যামিতিক চিত্রও আঁকতে শিখেছে। এইবার জ্যামিতি শিক্ষার দ্বিতীয় স্তরে শিক্ষার্থীরা ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ইত্যাদির কোণ, বাহু প্রভৃতির বিশেষ বিশেষ ধর্মগুলি

শিখবে। ছাত্র এই স্তরে উপপাদ্য ও নূতন সমস্যার (Rider) প্রমাণ ক'রতে শেখে এবং সেই প্রমাণগুলি লিখতেও শেখে। অবশ্য জ্যামিতি বলতে এই স্তরে সাধারণ সমতল জ্যামিতিকেই (Elementary plane geometry) বোঝায়। নিয়মানুগ পদ্ধতিতে জ্যামিতি শিখনের উপর খুব বেশী জোর এই স্তরে না দেওয়াই উচিত কারণ ঠিক নিয়ম মেনে চলতে তখনও তারা অভ্যস্ত হয়ে উঠে না। ছাত্ররা স্বাধীনভাবে জ্যামিতিক সত্য আবিষ্কার করাতেই বেশী আনন্দ পায়। সেইজন্য যে সমস্ত উপপাদ্য, সমস্যা বা সিদ্ধান্ত সত্য বলে প্রতীয়মান হবে, সেগুলিকে নিয়ম মতে প্রমাণ ক'রতে না শিখিয়ে ছাত্রদিগকে অজানা সত্য আবিষ্কার ক'রতে উৎসাহী ক'রে গড়ে তুলতে হবে এবং সেইজন্য প্রয়োজনীয় সুপরিচালনার ব্যবস্থাও ক'রতে হবে। অবরোহী পদ্ধতিতে শিক্ষা দিলেই ভালো হয়, তবে আরোহী পদ্ধতির ও স্বজ্ঞার ব্যবহারও ক'রতে হবে। বিভিন্ন প্রকার পরীক্ষণের সাহায্যে, বিভিন্ন পরিমাপের মাধ্যমে এবং আরোহী প্রণালী ও স্বজ্ঞার প্রয়োগ ক'রে ছাত্র জ্যামিতির অজ্ঞাত রহস্যের যে জগত, তার অনেক ভিতরে প্রবেশ করে। এই স্তরের শেষদিকে ছাত্র সমতল জ্যামিতির সহজ, সরল ও চিত্তাকর্ষক উপপাদ্যগুলির সঙ্গে পরিচিত হবে, সেগুলি অঙ্কন ক'রতে শিখবে ও সহজ সমস্যার সমাধান ক'রতে শিখবে। ধীরে ধীরে তাকে ঘন-জ্যামিতির (Solid Geometry) সঙ্গেও পরিচিত করা হয় এবং যুক্তিযুক্ত পদ্ধতি (Logical method) বলতে কি বুঝায়, তাও তাকে বুঝিয়ে দেওয়া হয়। তার নিজস্ব ধারণার উপর ভিত্তি ক'রেই তার জ্ঞানের 'সৌধ' গড়ে উঠবে—তবে এই ধারণা তার মানসিক বিকাশের উপযোগী হওয়া চাই। মোট কথা এই স্তরে একেবারে বিমূর্ত্ত চিত্র বা ধারণা নিয়ে কাজ না করে ছাত্র যেগুলি সহজে বুঝতে পারে এবং যেগুলিতে বেশী উৎসাহ বোধ করে সেই সমস্ত মূর্ত্ত ও বাস্তব চিত্র ও ধারণা নিয়ে কাজ শুরু করাই ভালো।

নিয়মানুগ স্তর :—জ্যামিতি শিক্ষার দ্বিতীয় স্তরে কতকগুলি জ্যামিতিক তথ্য সংগ্রহ করা হয় এবং সেগুলি ব্যবহারও করা হয়। নিয়মানুগ স্তরে একটি যৌক্তিক ধারাবাহিকতা রক্ষা ক'রে সেই সমস্ত তথ্যকে একত্র করা হয়। যৌক্তিক ধারাবাহিকতায় জ্ঞান ছাত্র কিছুটা অর্জন ক'রেছে। কতকগুলি উপপাদ্যকে একত্র ক'রে একটি দল গড়ে তোলা হয়। তারপর সেই দলের অন্তর্গত কোন একটি উপপাদ্যকে প্রাধান্য দেওয়া হয়। এই বিশেষ উপপাদ্যটি যে সবচেয়ে বেশী প্রয়োজনীয় বা সবচেয়ে বেশী আগ্রহজনক—তা কিন্তু নয়। তবে ঐ উপপাদ্যটি জানা থাকলে অন্যান্য উপপাদ্য প্রমাণ করার ক্ষেত্রে কিছুটা সুবিধা পাওয়া যায়। এই উপপাদ্যটির উপর গুরুত্ব আরোপ ক'রতে পারলে শিক্ষার্থী যুক্তির ধারা পরিষ্কার ভাবে বুঝতে

পারে। বিপরীত প্রতিজ্ঞাগুলির ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনা ক'রলেও যুক্তির ধারা স্পষ্ট হয়। নিয়মানুগ স্তরের গোড়াতেই জ্যামিতির উপপাদ্যগুলিকে দলভুক্ত করার দিকেই বিশেষ দৃষ্টি দেওয়া হয়। আসল উপপাদ্যটি জানা থাকলে কিভাবে অন্যান্য উপপাদ্যগুলি তার সাহায্যে নির্ণয় ও প্রমাণ করা যায় তার দিকেও দৃষ্টি দিতে হবে। আগের স্তরে মাত্র কয়েকটি উপপাদ্যের প্রমাণ করা হ'য়েছিল। এই স্তরে বাকী উপপাদ্যগুলি প্রমাণ ক'রতে হবে। এইভাবে সমস্ত জ্যামিতির মধ্যে একটা ধারাবাহিকতা বা নিয়ম আনতে হ'বে। জ্যামিতি সম্বন্ধে ছাত্র যে জ্ঞান অর্জন ক'রেছে এই স্তরে অন্তর্পুতির (Consolidation) মাধ্যমে সেই জ্ঞান সম্পূর্ণ হবে। এই স্তরের বিপরীত প্রতিজ্ঞা-গুলির ধর্ম কতকগুলি পাঠের ভিতর দিয়ে দেওয়া যেতে পারে। যুক্তির ধারার দিক দিয়ে ছাত্রদিগকে দু'টি জিনিস শেখানো যায়। একটি হ'ল :–সমস্ত বিপরীত প্রতিজ্ঞাই সত্য নয়। আর দ্বিতীয়টি হ'ল :— A যে সত্য, তা প্রমাণ ক'রতে গেলে যদি B র সত্যতা ধরে নিতে হয়, তবে B'র সত্যতা প্রমাণ করার সময় A'র সত্যতা যে ধরে নিতেই হবে এমন কোন কথা নেই। ছাত্র তার আবিষ্কার লব্ধ জ্ঞান থেকে সাধারণীকৃত সত্যে (generalised truth) যাতে পৌছাতে পারে তার জন্য প্রয়োজনীয় সুযোগের ব্যবস্থা ক'রে দেওয়া হবে এই স্তরে। অবশ্য কোন একটি বিবৃতি নিয়মানুগ ভাবে লিখে প্রকাশ করার সর্বশেষ স্তর হ'ল নিয়মানুগ স্তর ; পাঠদানের সময় বিশ্লেষণ পদ্ধতির সাহায্যে অগ্রসর হ'তে পারলেই ভালো হয়।

নিয়মানুগ স্তরে প্রমাণের চারটি অংশ থাকে, সেগুলি হ'ল :—

(১) **প্রকল্প (Hypothesis)** :—এ'টি হ'ল প্রদত্ত তথ্য। সাধারণতঃ প্রদত্ত তথ্যের সারাংশ চিত্রের সাহায্যেও জ্যামিতির ভাষায় এই অংশে দেওয়া হ'য়ে থাকে।

(২) **সিদ্ধান্ত (Conclusion)** :—সিদ্ধান্ত হ'ল যা প্রমাণ ক'রতে হবে সেই অংশ। এই স্তরেও চিত্রের সাহায্যে বিষয়বস্তুটিকে (যা প্রমাণ ক'রতে হবে) পরিষ্কার ভাবে অথচ সংক্ষেপে বিবৃত করা হয়।

(৩) **অঙ্কন (Construction)** :—এ হ'ল প্রকল্প অনুযায়ী চিত্র। অবশ্য অনেক ক্ষেত্রে প্রমাণের সুবিধার জন্য অতিরিক্ত অংশ চিত্রে সন্নিবিষ্ট ক'রতে হয়। সেগুলিও এই স্তরে বিবৃত করা হয়।

(৪) **প্রমাণ (Proof)** :—এই স্তরে যুক্তিসম্মত অনুসিদ্ধান্তগুলি গ্রহণ করা হয়। প্রত্যেকটি বিবৃতির যুক্তি দেখাতে হয় এবং সিদ্ধান্তে পৌছে এই স্তরের কাজ শেষ হয়।

এ সম্বন্ধে পরে আরো বিস্তৃত আলোচনা করা হ'য়েছে।

কিভাবে জ্যামিতি শুরু করা হবে?—'কিভাবে জ্যামিতি শুরু করা যাবে?'—এ প্রশ্ন বোধহয় সর্বদেশের সর্বকালের প্রশ্ন। অবশ্য এর উত্তর সম্বন্ধেও এখন আর শিক্ষাবিদদের মধ্যে দ্বিমত নেই। এ ব্যাপারে তাঁরা সকলেই একমত যে জ্যামিতি শুরু করা হবে ব্যবহারিক কাজের মধ্য দিয়ে। প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে উপপাদ্যের প্রমাণ তাদের শেখানো হবে না। আবার মৌখিক পদ্ধতিতে ছাত্রদের জ্যামিতির সংজ্ঞা বা বিমূর্ত্ত ধারণাগুলি মুখস্থ করানোও হবে না। দৈনন্দিন জীবনের বাস্তব সমস্যাগুলির সাহায্যেই জ্যামিতি শিক্ষার সূত্রপাত হবে। এ ব্যাপারে প্রথমেই আসে জমি মাপ করার পদ্ধতি; যাকে সাধারণ ভাবে বলা হয়—বয়-স্কাউট জ্যামিতি। ছাত্রদিগকে জানা জিনিসের সাহায্যে অজানা জিনিসের দিকে এগিয়ে নিয়ে যাওয়া হয়। কোণ, বিন্দু, সমান্তরাল সরলরেখা, ত্রিভুজ ইত্যাদি সম্বন্ধে তাকে শিক্ষা দেওয়া হবে। ছাত্র পরীক্ষণের মাধ্যমে এবং বাস্তব পরিমাপের সাহায্যে বিভিন্ন ধারণার সঙ্গে পরিচিত হবে এবং সংজ্ঞাগুলির সত্যতা ও যথার্থতা যাচাই ক'রবে। বাস্তব উদাহরণের সাহায্যেও জামিতির সংজ্ঞাগুলি ব্যাখ্যা করা যায়। যেমন গরুর গাড়ীর চাকা বা সাইকেলের চাকার সাহায্যে বৃত্ত, রেল লাইনের সাহায্যে সমান্তরাল সরলরেখা, ঘরের দেওয়ালের সংযোগস্থলের সাহায্যে কোণ ইত্যাদি ব্যাখ্যা করা চলে। তা ছাড়া ছাত্ররা নিজেরাও ছবি এঁকে বৃত্ত, ত্রিভুজ, সমান্তরাল সরলরেখা, একান্তর কোণ, অনুরূপ কোণ প্রভৃতির ব্যাখ্যা ক'রতে পারে। ব্যবহারিক কাজের পিছনে যে মনোবিজ্ঞানসম্মত নীতিটি থাকে তা হ'ল 'কাজের মধ্য দিয়ে শিক্ষা লাভ করা'। জ্যামিতি শিক্ষার পরীক্ষণমূলক স্তরে ছাত্রদিগকে স্বাধীনভাবে কোন পরীক্ষা ক'রতে বলা হয় এবং তার ফলাফল নির্ণয় ক'রতে বলা হয়। এই পরীক্ষা বা ব্যবহারিক কাজ অবশ্য শ্রেণীকক্ষের ভিতরে ও শ্রেণীকক্ষের বাইরে দুভাবেই করা চলে। যাই হোক বিভিন্ন ব্যবহারিক কাজের একটা তালিকা নীচে দেওয়া হল।

শ্রেণীর বাইরের ব্যবহারিক কাজ (Field work)

১। কোন একটি স্থির বিন্দুর চারদিকে দিক্ নির্ণয় করা ও দূরত্বের পরিমাপ।
২। দূরত্ব ও দিকের সাহায্যে অবস্থিতি নির্ণয়।
৩। স্কেল ও ফিতার সাহায্যে মাপ করা।
৪। উচ্চতা পরিমাপ করা।
৫। ত্রিভুজ অঙ্কনের দ্বারা অবস্থিতি ও দূরত্ব নির্ণয়।
৬। ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা।

৭। কোন একটি বিন্দু থেকে বা একটি উঁচুস্থান থেকে বিভিন্ন দিকে ঢাল (Slope) নির্ণয়।

৮। বিভিন্ন জাতীয় নক্শা অঙ্কন।

শ্রেণীর ভিতরের ব্যবহারিক কাজ (Class-room work)

১। ইঞ্চি, সেন্টিমিটার ও তাদের দশমিক অংশের সাহায্যে দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

২। কোন স্থির বা নির্দ্দিষ্ট বিন্দুর থেকে নির্দ্দিষ্ট দূরত্বে আর একটি বিন্দু বসানো এবং দূরত্বের সাহায্যে অবস্থান নির্ণয়।

৩। সীমারেখা বা প্রান্ত হিসাবে রেখার ধারণা অর্জন এবং রেখার ধর্ম সম্বন্ধে জ্ঞানলাভ করা।

৪। তল সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করা।

৫। ছক্ কাগজের বর্গাকৃতি ঘরের সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা। [অনেক ছাত্রের ধারণা থাকে যে কোন জিনিস যত বেশী লম্বা হয় তত তাদের ক্ষেত্রফলও বেশী হয়। কিন্তু এ ধারণা ভুল। বিভিন্ন আকৃতির গাছের পাতা এনে ছক কাগজের উপর রেখে তার কিনারা বরাবর সীমারেখা টেনে বর্গাকৃতি ঘরের সংখ্যা গণনা ক'রলেই তারা নিজেদের ভুল বুঝতে পারবে।]

৬। বৃত্ত, বৃত্তের ব্যাস প্রভৃতি সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা, কোণ অঙ্কন করা ও তার পরিমাপ।

৭। সমান্তরাল সরলরেখার ধর্ম সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করা এবং একান্তর, অনুরূপ ইত্যাদি কোণ পরিমাপ করা।

৮। ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বহুভুজ ইত্যাদি অঙ্কন এবং সেগুলির কোণ সমষ্টি নির্ণয় করা এবং এর থেকে কোন সাধারণ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যেমন ঃ

ত্রিভুজের বাহুসংখ্যা	3, কোণের সমষ্টি	2 সমকোণ	$=2\times3-4$
চতুর্ভুজের "	4, " "	4 "	$=2\times4-4$
পঞ্চভুজের "	5, " "	6 "	$=2\times5-4$
ষড়ভুজের "	6, " "	৪ "	$=2\times6-4$

এ সমস্ত উদাহরণ থেকে তারা এই সিদ্ধান্ত আসবে যে n বাহুবিশিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের অন্তঃকোণগুলি হ'ল $2n-4$ সমকোণ। কোণ সম্বন্ধে জানা হ'য়ে গেলে কোণ ও বাহুর সঙ্গে কোন সম্বন্ধ আছে কি না ছাত্র তা নির্ণয় ক'রবে। জ্যামিতিক সত্য সম্বন্ধে ছাত্র নিঃসন্দেহ হবে। পাঠের অগ্রগতিতে ছাত্রের একক দায়িত্ব নেই,

এ ব্যাপারে ছাত্র ও শিক্ষকের যৌথ দায়িত্ব আছে। এর জন্য উপযুক্ত প্রশ্ন, উত্তর আলোচনা প্রভৃতির প্রয়োজন হয়। পাঠ্যপুস্তকের ব্যবহার যত কম হয়, ততই ভালো। সঠিক পদ্ধতি, পরিষ্কার পরিচ্ছন্নতা, নির্ভুল চিত্রাঙ্কন প্রভৃতির উপর বেশী জোর দিতে হবে। জ্যামিতি পাঠের জন্য অনুবন্ধ প্রণালীর সহায়তাও নেওয়া যেতে পারে। নিজে নিজে আবিষ্কার করার পর পাঠ্যপুস্তকে যে সমস্ত সংজ্ঞা দেওয়া আছে, সেগুলি ছাত্রদের শেখানো যেতে পারে।

জ্যামিতির প্রতিপাদ্য বিষয়ঃ জ্যামিতির প্রতিপাদ্য বিষয়গুলিকে সাধারণতঃ দু'ভাগে ভাগ করা হয়। (১) **উপপাদ্য** এবং (২) **সম্পাদ্য**। উপপাদ্যে কোন একটি বিবৃতিকে প্রমাণ ক'রতে হয়, কিন্তু সম্পাদ্যের ক্ষেত্রে কতকগুলি বিশেষ জ্যামিতিক অঙ্কনের প্রয়োজন হয়। প্রত্যেকটি উপপাদ্যে দু'টি অংশ থাকবেই; সে দু'টি হল **প্রকল্প** (**Hypothesis**)—অর্থাৎ 'যদি অংশ এবং **সিদ্ধান্ত** (**conclusion**)—অর্থাৎ 'তবে' অংশ। কোন একটি প্রমাণিত উপপাদ্য বিশ্লেষণ ক'রলে ৬টি বিভিন্ন অংশ পাওয়া যায়। সেগুলি হ'ল (১) **বিবৃতি** (**statement**), (২) **চিত্র** (**figure**) (৩) **প্রকল্প** (**Hypothesis**)—কি দেওয়া আছে, (৪) **সিদ্ধান্ত** (**conclusion**)—কি প্রমাণ ক'রতে হবে, (৫) **অঙ্কন** (**construction**)—যদি প্রয়োজন হয়, এবং (৬) **নিয়মানুগ প্রমাণ** (**orderly proof**)।

কোন একটি উপপাদ্যকে বিভিন্ন ভাবে প্রমাণ করা সম্ভব। এইজন্য পাঠ্যপুস্তকে যে প্রমাণ দেওয়া থাকে কেবলমাত্র সেইটির উপরই জোর দিয়ে ছাত্রদের সেই প্রমাণটি শেখানো ঠিক যুক্তিযুক্ত নয়। বরং ছাত্রদিগকে আরো সহজ প্রমাণ আবিষ্কার ক'রতেই উৎসাহ দেওয়া উচিত। তারা নিজেদের সুবিধামত প্রমাণ খুঁজে বের ক'রবে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে এই উপপাদ্যটি—**"যখন একটি সরলরেখার উপর অপর একটি সরলরেখা দণ্ডায়মান হয় তখন যে দু'টি কোণ উৎপন্ন হয়, তাদের সমষ্টি দুই সমকোণ"**—বিভিন্নভাবে প্রমাণ করা যায়। সেক্ষেত্রে পাঠ্যপুস্তকের বিশেষ প্রমাণটির উপর জোর দিয়ে কি লাভ! আবার তাদের সামনে বিভিন্ন রকমের প্রমাণ উপস্থিত ক'রে যে'টি তাদের নিকট সহজবোধ্য বলে মনে হবে সেই প্রমাণটি অনুসরণ ক'রতে বলা যেতে পারে। উপরে যে উপপাদ্যটির কথা বলা হ'ল—তার দু রকম প্রমাণের উদাহরণ দেওয়া হ'ল। ছাত্ররা এর থেকে যে'টি সহজ বলে মনে ক'রবে সেইটি গ্রহণ ক'রতে পারে।

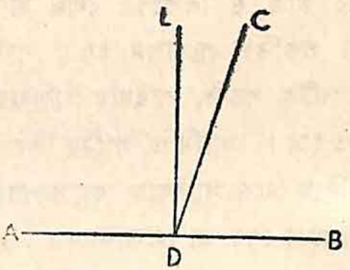
প্রথম প্রমাণ ঃ

AB র উপর LD লম্ব টানা হ'ল।

ধরা গেল $\angle CDB =$ ১নং কোণ,

$\angle LDC =$ ২নং কোণ এবং $\angle LDA$

= ৩নং কোণ।



স্পষ্টতঃই $\angle CDA =$ ২নং + ৩নং কোণ

$\therefore \angle CDB + \angle CDA = \angle$১নং $+ \angle$২নং $+ \angle$৩নং

$= \angle ADB =$ সরলকোণ = ২ সমকোণ।

দ্বিতীয় প্রমাণ ঃ—

$\angle CDB = \angle LDB - \angle LDC$

$\angle CDA = \angle LDA + \angle LDC$

যোগ করিয়া $\therefore \angle CDB + \angle CDA = \angle LDB + \angle LDA$

$= 90^0 + 90^0$ [লম্ব বলিয়া]

$= 180^0$

$= 2$ সমকোণ।

উপপাদ্য শিখনের কয়েকটি সাধারণ নিয়ম ঃ—প্রথম থেকে ছাত্ররা যাতে কোন একটা ভুল ধারণা না গড়ে তোলে সেদিকে বিশেষ দৃষ্টি দিতে হবে। বিবৃতি-গুলি তারা যেন পরিষ্কার ভাবে চিত্রের মাধ্যমে ফুটিয়ে তুলতে পারে। একেবারে অজানা জিনিস দিয়ে শুরু ক'রলে ফল ভালো হয় না বলে জানা থেকে অজানাতে গেলেই ভালো হয়। ছাত্রদের পাঠের আগ্রহ যেন বরাবর উজ্জীবিত থাকে। আগ্রহের অভাব ঘটলেই মনোযোগও বিনষ্ট হবে, ফলে তারা জ্যামিতি বিষয়টিকেই অপছন্দ ক'রতে শিখবে। পাঠদানের প্রক্রিয়াটি বিজ্ঞান সম্মত ও মনোবিজ্ঞান সম্মত হ'তে হবে। যেখানে ছাত্র নিজে কিছু আবিষ্কার ক'রতে পারবে সেখানে তাকে জোর ক'রে, কিছু মুখস্থ করাতে গেলে ফল খারাপই হবে। জ্যামিতি কি ভাবে আরম্ভ করা হ'চ্ছে – তার উপরই নির্ভর ক'রছে ছাত্র এ'টিকে সহজভাবে গ্রহণ ক'রবে কি না। যদি বিমূর্ত্ত বিষয় হিসাবে জ্যামিতি উপস্থাপিত করা হয় তবে ছাত্র এ'টি অপছন্দই ক'রতে শিখবে—আর যদি মূর্ত্ত বিষয় হিসাবে এবং ব্যবহারিক দিকের সঙ্গে সামঞ্জস্য রক্ষা ক'রে

বিষয়টি উপস্থাপিত করা হয় তাহ'লে ছাত্র এতে আগ্রহ বোধ ক'রবে এবং বিষয়টিকেও সহজ ভাবে গ্রহণ ক'রবে। এ ব্যাপারে শিক্ষকের দায়িত্ব অপরিসীম।

শিক্ষক যান্ত্রিক ভাবে পাঠ্যপুস্তক অনুসরণ ক'রবেন না। তিনি নিজস্ব পদ্ধতিতে সহজ ও সরল ভাষায় উপপাদ্যের প্রমাণ বুঝিয়ে দিবেন। যে ক্ষেত্রে প্রমাণ অত্যন্ত সহজ বা সিদ্ধান্তটি এত অবশ্যম্ভাবী যে প্রমাণের অপেক্ষাই রাখে না—সেক্ষেত্রে প্রমাণ করার আর কোন প্রয়োজন নেই। সেই উপপাদ্যটিকে স্বতঃসিদ্ধ (axiom) বলে ধরে নেওয়া যেতে পারে।

যেখানে প্রমাণ প্রয়োজন, সেখানে প্রমাণটি কত সহজ করা সম্ভব সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে। ভাষা বা কঠিন কঠিন জ্যামিতিক শব্দে সেটিকে ভারাক্রান্ত করা চলবে না। প্রমাণের কাঠিন্য, মাত্রা, দৈর্ঘ্য, মান সব কিছু নির্ভর করে ছাত্রের মানসিক ক্ষমতার উপর।

গতানুগতিক পদ্ধতিতে প্রমাণের উপর জোর দেওয়া উচিত হবে না।

প্রারম্ভিক উপপাদ্যগুলির উপরও খুব বেশী জোর দেওয়া উচিত নয়।

উপপাদ্যের অর্থটি যেন ছাত্র পরিষ্কার বুঝতে পারে সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে।

উপপাদ্যের ধারা অনুসারে সে'টি প্রয়োগ করার বা ঐ উপপাদ্য অনুসারে অন্য কোন সমস্যার সমাধান করবার জন্য ছাত্রদের উৎসাহ দিতে হবে।

নীচের বিষয়গুলির দিকে দৃষ্টি দিলে উপপাদ্য শিখনের কাজটি অনেক সহজ হয়।

১। ছাত্র যেন তার বুদ্ধি প্রয়োগ ক'রে উপপাদ্যটি শিক্ষা করে। উপপাদ্য মুখস্থ করার একটা প্রবণতা ছাত্রদের মধ্যে দেখা যায়। সে'টি সম্পূর্ণরূপে বন্ধ ক'রতে হবে। ছাত্র প্রথমে উপপাদ্যটি নিজে নিজে বুঝবার চেষ্টা ক'রবে। তারপর পাঠ্য-পুস্তকে বিবৃতি অংশটি সে পড়ে নিতে পারে। কি দেওয়া আছে—এবং কি প্রমাণ ক'রতে হবে—এই দু'টি অংশ যেন তার কাছে পরিষ্কার হয়।

২। এরপর একটি চিত্রের সাহায্যে বিবৃতিটি প্রকাশ ক'রতে হবে। প্রথম প্রথম ছাত্ররা তাদের পাঠ্যপুস্তকে যেভাবে চিত্র ও যে নাম দেওয়া থাকে তা ব্যবহার ক'রতে পারে। কিন্তু পরে তারা চিত্র ও নাম দুইই পাল্টে দিতে পারে। জ্যামিতি শিখনে স্মৃতির উপর মোটেই জোর দেওয়া চলবে না। আবিষ্কার করার প্রবণতার উপরই বেশী জোর দিতে হবে।

৩। পাঠ্যপুস্তকে উপপাদ্যের স্তরগুলি ভালো ক'রে বুঝে নিয়ে ছাত্র বই বন্ধ ক'রে মনে মনে একটি চিত্র কল্পনা ক'রে স্তরগুলি মনে ক'রার চেষ্টা করবে। এই মনে করাটা যেন যান্ত্রিকভাবে মুখস্থ করা জিনিস মনে করার মত না হয়। যুক্তির সাহায্যে কারণ দেখিয়ে স্তরগুলি মনে ক'রতে হবে।

৪। উপপাদ্যটি শেখা হ'য়ে গেলে অন্য কোন সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে সে'টিকে প্রয়োগ ক'রতে হবে। সার্থক প্রয়োগের ফলেই ছাত্র যে জ্ঞান অর্জন ক'রেছে তা পাকা হয়।

৫। পাঠ্যপুস্তকে যেভাবে উপপাদ্যগুলি পর পর সাজানো থাকে ঠিক সেইভাবেই যে সেগুলি পড়াতে হবে এমন কোন বাঁধাধরা নিয়ম নেই। শিক্ষক শিক্ষার্থীর সুবিধা অনুসারে উপপাদ্যগুলিকে পৃথক পৃথক শ্রেণীতে ভাগ ক'রে নিতে পারেন। প্রত্যেক শ্রেণীতে আবার বিশেষ একটি উপপাদ্যের উপর গুরুত্ব আরোপ করা যেতে পারে। এ'টিকে মূল বা কেন্দ্রীয় উপপাদ্য (Key Proposition) বলা যেতে পারে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে—স্পর্শক শ্রেণীর মূল উপপাদ্য হ'ল Tangent is perpendicular to the radius. বৃত্ত শ্রেণীর মূল উপপাদ্য হ'ল The angle at the centre is double the angle at the circumference, ইত্যাদি। প্রথমে মূল উপপাদ্যটির শিক্ষা দিয়ে তারপর এর সঙ্গে ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধ আছে এমন সমস্ত উপপাদ্য শেখানো উচিত।

৬। একটি উপপাদ্য প্রমাণ ক'রতে গিয়ে অনেক সময় অপর একটি উপপাদ্যের সাহায্য (Reference) নিতে হয়। জ্যামিতির পাঠ্যপুস্তকে উপপাদ্যগুলির ১, ২, ৩, এইভাবে নম্বর দেওয়া থাকে। যে উপপাদ্যটির সাহায্য নেওয়া হ'ল ছাত্ররা তার নম্বরটি উল্লেখ করে দেয়। তা না ক'রে যাতে তারা মূল নীতি, যে'টির সাহায্য নেওয়া হ'ল সেইটি উল্লেখ ক'রে ; তার শিক্ষা দিতে হবে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে :—

ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম (8 এর উপপাদ্য অনুসারে)—এ ভাবে না লিখে ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম (দুইটি বাহু ও অন্তর্ভূ'ত কোন সমান বলে) এ ভাবে লেখা উচিত।

৭। সহজ প্রমাণ না ক'রে জটিল পদ্ধতিতে ঘুরিয়ে প্রমাণ করার চেষ্টা যাতে ছাত্র না করে সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে। এর ফলে অনেক ক্ষেত্রে যে উপপাদ্যটি প্রমাণ ক'রতে হবে তার সিদ্ধান্তটি প্রমাণিত হবার আগেই প্রমাণিত বলে ধরে নেওয়া হয়। এ'টা মারাত্মক ভুল। যুক্তিযুক্ত ভাবে বিচার করার উপরই শিক্ষক বেশী জোর দেবেন।

বিভিন্ন জাতীয় প্রমাণ (Kinds of Proofs) :—জ্যামিতির প্রমাণ বিভিন্ন জাতীয় হ'তে পারে। সমস্ত উপপাদ্যই যে একভাবে প্রমাণ ক'রতে হবে এমন কোন কথা নেই। উপপাদ্যের প্রকৃতি অনুযায়ী প্রমাণের প্রকৃতিও পাল্টে যায়। এখন দেখা যাক জ্যামিতি প্রমাণ কত রকমের হ'তে পারে :—

১। **পরীক্ষণমূলক প্রমাণ** (Experimental Proof) যখন ছাত্র জ্যামিতি

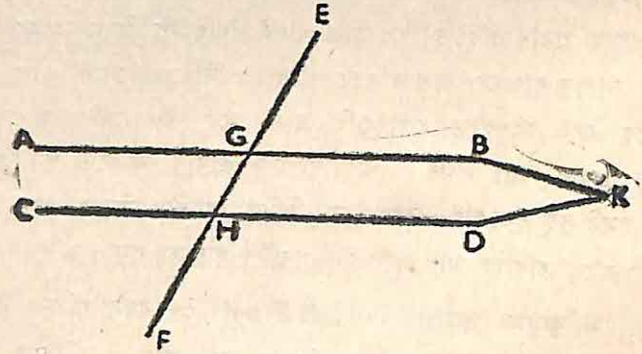
সম্বন্ধে একটা প্রাথমিক জ্ঞান অর্জন করে তখনই তাকে পরীক্ষামূলক প্রমাণ ক'রতে দেওয়া চলে। সরলরেখা, কোণ, সমান্তরাল সরলরেখা, ত্রিভুজ ইত্যাদি সম্বন্ধে একটা জ্ঞান আগে অর্জন করা দরকার। এই প্রমাণ হ'ল পরীক্ষা মূলক। যেমন "যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হয়, তবে বিপরীত কোণগুলিও সমান হবে" —এই উপপাদ্য প্রমাণ ক'রতে গিয়ে ছাত্র একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করে বিপরীত কোণগুলি চাঁদার সাহায্যে মাপ ক'রতে পারে। বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের বাহু বিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করে এবং বিপরীত কোণগুলি মাপ করে উপপাদ্যটির সত্যতা পরীক্ষণের সাহায্যেই প্রমাণ করা সম্ভব। আবার যদি প্রমাণ ক'রতে হয় ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ—তবে ছাত্র বিভিন্ন জাতীয় ত্রিভুজ অঙ্কন ক'রে প্রতিটি কোণ মাপ ক'রে তারপর যোগ করে উপপাদ্যটির সত্যতা প্রমাণ ক'রতে পারবে।

২। **যুক্তিযুক্ত প্রমাণ** (**Logical Proof**) :—যখন যুক্তির সাহায্যে কোন উপপাদ্য প্রমাণ করা হয়, তখন তাকে যুক্তিযুক্ত প্রমাণ বলে। যুক্তিযুক্ত প্রমাণ ক'রতে গেলে চারটি স্তরের একান্ত প্রয়োজন। সেই স্তর চারটি হ'ল—উপাত্ত (Data), কি প্রমাণ ক'রতে হবে, অঙ্কন এবং প্রমাণ।

৩। **স্বজ্ঞালব্ধ প্রমাণ** (**Intuitive Proof**) :—সমস্ত উপপাদ্যের ক্ষেত্রে কিন্তু এই প্রমাণ চলে না। যেখানে পরীক্ষামূলক বা যুক্তিযুক্ত কোন প্রকার প্রমাণেরই প্রয়োজন হয় না—সেইখানে স্বজ্ঞালব্ধ প্রমাণ প্রয়োগ করা চলতে পারে। উপপাদ্যটি যে সত্য হবেই তা খালি চোখে দেখেই বোঝা যায়। 'দুটি বিন্দুর মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম দূরত্ব' কিংবা 'সমান্তরাল সরলরেখাগুলি কখনও পরস্পরের সঙ্গে মিলিত হয় না'—এ জাতীয় উপপাদ্যের কোন প্রমাণ প্রয়োজন হয় না। এগুলি সত্য বলেই ধরে নেওয়া যেতে পারে।

৪। **পরোক্ষ প্রমাণ** (**Indirect Proof**) :—সহজ পথে না ক'রে ঘোরানো পথে প্রমাণ করা হয় এই পদ্ধতিতে। তবে পদ্ধতিটি সব ছাত্রই অনুসরণ ক'রতে পারে না কারণ এ'টি অপেক্ষাকৃত কঠিন পদ্ধতি। বিশেষ বিশেষ কতকগুলি উপপাদ্য এই পরোক্ষ প্রমাণের সাহায্যে প্রমাণ করা যায়। প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে যে সমস্ত উপপাদ্য প্রমাণ করা যায় না কেবলমাত্র সেই সমস্ত উপপাদ্যেরই পরোক্ষ পদ্ধতিতে প্রমাণ করা উচিত। এই পদ্ধতিতে সিদ্ধান্ত থেকে শুরু করা হয়। নানারকম বিকল্প সম্ভাবনার মধ্য দিয়ে শেষ পর্যন্ত প্রকল্পে পৌছান হয়। একটি উদাহরণ দিলেই ব্যাপারটা পরিষ্কার হবে :

উপপাদ্যটি হ'ল :—যদি একটি সরলরেখা অপর দু'টি সরলরেখাকে এমনভাবে ছেদ করে যেন বিপরীত কোণগুলি সমান হয়, তবে সরলরেখা দু'টি সমান্তরাল হবে।



প্রমাণ :— যদি AB ও CD সমান্তরাল না হয় তবে ধরা গেল সরলরেখা দু'টিকে বর্ধিত ক'রলে K বিন্দুতে মিলিত হবে। এখন GHK ত্রিভুজে KG বাহু A পর্যন্ত বিস্তৃত হ'য়েছে।

$\therefore$ বহিঃকোণ $\angle AGH > \angle GHK$

কিন্তু প্রকল্পে বলা হ'য়েছে $\angle AGH = \angle GHK$

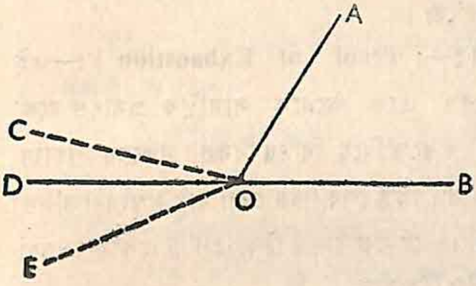
$\therefore$ AB ও CD মিলিত হ'তে পারে না।

সুতরাং $AB \parallel CD$.

৫। **অযৌক্তিকে পরিণত করে প্রমাণ (Reduction and Absurdum method)** :—পদ্ধতিটি পরোক্ষ প্রমাণের পদ্ধতিরই আর একটি রূপ। এই পদ্ধতিতেও সিদ্ধান্ত থেকে শুরু করা হয়, কিন্তু প্রমাণের সুবিধার জন্য সিদ্ধান্তটি ভুল বলে ধরে নেওয়া হয়। অর্থাৎ প্রথমেই একটি ভুলকে সত্য ধরে নিয়ে অগ্রসর হ'তে হয়। এইভাবে অগ্রসর হ'তে হ'তে শেষ পর্যন্ত একটি অসম্ভব, অযৌক্তিক বা অবাস্তব তথ্যে উপনীত হওয়া যায়, যার থেকে বোঝা যায় যে প্রথমে যেটিকে সত্য বলে ধরে নেওয়া হ'য়েছিল সেটি মোটেই সত্য নয়। অতএব ধরে নেওয়া সিদ্ধান্তটির বিপরীতটিই সত্য হবে। একটি উদাহরণ দেওয়া যাক্ :—

উপপাদ্যটি হ'ল :—**যদি দুটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হয়, তবে কোণগুলির বহিঃস্থ বাহু দু'টি একই সরলরেখায় অবস্থিত হবে।**

প্রমাণ :—ধরা যাক্ একটি বাহু BO কে বর্ধিত করা হ'ল। তাহ'লে অপর বহিঃস্থ বাহু CO হয় ODর উপর সমাপতিত হবে, নয়তো হবে না। অর্থাৎ সম্ভাবনা দু'টি, এবং একটি সত্য হলে অপরটি মিথ্যা হবে। যা প্রমাণ করতে



হবে তার বিপরীত ধারণাটি নিয়েই কাজ শুরু করা হবে। ধরা গেল CO, ODর সঙ্গে মিলিত হয় না। এর ফল কি হ'তে পারে সে সম্বন্ধে প্রাথমিক জ্ঞান ছাত্রের আছে। এখন দেখা যাচ্ছে $\angle AOB+\angle AOC=2$ সমকোণ অথবা $\angle AOB+\angle AOE=2$ সমকোণ। কিন্তু দেওয়া আছে $\angle AOB+\angle AOD=2$ সমকোণ। অর্থাৎ প্রথম ক্ষেত্রে 2 সমকোণ হ'চ্ছে 2 সমকোণ থেকে ছোট এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে যে 2 সমকোণ পাওয়া যাচ্ছে তা হ'ল 2 সমকোণ থেকে বড়, এ'টি সম্পূর্ণ অসম্ভব। 2 সমকোণ সব সময় 2 সমকোণেরই সমান। কাজেই BOর অপর প্রান্ত OC বা OE হ'তে পারে না।—OD হবেই। অর্থাৎ BO ও OD একই সরলরেখায় অবস্থিত।

এই পদ্ধতিতে জ্যামিতির প্রচলিত প্রকৃতির (formal character) উপরই বেশী জোর দেওয়া হয়। ছাত্রের স্বভাবলব্ধ জ্ঞান বা স্বজ্ঞার উপর বিশেষ গুরুত্ব আরোপ করাই হয় না। ফলে পদ্ধতিটি ছাত্রের মনে বেশ প্রভাব বিস্তার ক'রতে পারে না। এইজন্য বর্ত্তমানে এই পদ্ধতিতে প্রমাণ করার প্রথা প্রায় উঠিয়েই দেওয়া হ'য়েছে। যেখানে এই পদ্ধতিতে প্রমাণ অপরিহার্য হ'য়ে উঠবে সেখানে প্রমাণের বিভিন্ন স্তরগুলি ছাত্রের নিকট সহজবোধ্য ক'রে তুলতে হবে। স্তরগুলি অনড়, অচল বা অপরিবর্ত্তনীয় হবে না। প্রয়োজন হলে ছাত্র পরীক্ষণ পদ্ধতির সাহায্য গ্রহণ ক'রতে পারে। ছাত্রকে সাধারণ বাহু বিশিষ্ট দু'টি কোণ আঁকতে বলা যেতে পারে এবং সেগুলি মাপ ক'রে যোগ ক'রতে বলা যেতে পারে। কোণগুলি এমনভাবে নিতে হবে যেন তাদের সমষ্টি (i) ঠিক 2 সমকোণ হয়, (ii) 2 সমকোণ থেকে বেশী হয় এবং (iii) 2 সমকোণ থেকে কম হয়। ছাত্ররা নিজেরাই পরীক্ষা ক'রে দেখবে যেখানেই কোণসমষ্টি 2 সমকোণ হ'চ্ছে—সেখানেই বহিঃস্থ বাহু দু'টি একই সরলরেখাতে অবস্থিত হবে। এর ফলে ছাত্ররা মনে মনে প্রস্তুত হ'য়ে থাকবে, আবার পরীক্ষণের সাহায্যে

সিদ্ধান্তে উপনীত হ'তেও পারবে। বিমূর্ত্তভাবে সত্যের সঙ্গে পরিচিত হবার আগে তারা মূর্ত্তভাবেই সত্যের সঙ্গে পরিচিত হ'চ্ছে।

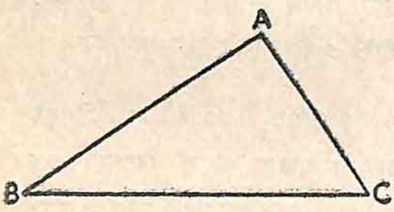
৬। **পরিশ্রান্তিকর প্রমাণ :—(Proof of Exhaustion)** :—এই পদ্ধতিটিও পরোক্ষ পদ্ধতির একটি রূপান্তর। একে অনেকে সামগ্রিক প্রমাণও বলে থাকেন। কোন একটি উপপাদ্য প্রমাণ ক'রতে গিয়ে বিভিন্ন বিকল্প প্রকল্পের সাহায্য নিয়ে ভিন্ন ভিন্ন সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়। কিন্তু শেষ পর্যন্ত দেখা যায় সম্ভাবনাগুলির মধ্যে একটি বাদ দিয়ে বাকীগুলি সব ভুল। যে সম্ভাবনাটি ঠিক, সে'টি প্রকল্পে দেওয়া থাকে ; অতএব তার অনুগামী সিদ্ধান্তটিও ঠিক হবে।

উদাহরণ :—যদি কোন ত্রিভুজের দু'টি কোণ অসমান হয়, তবে তাদের বিপরীত বাহু দু'টিও অসমান হবে এবং বৃহত্তর কোণের সম্মুখীন বাহুটিও বৃহত্তর হবে।

ABC ত্রিভূজে $\angle C > \angle B$.

প্রমাণ করতে হবে $AB > AC$.

প্রমাণ :—ধরা যাক্ AB বাহু AC বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর নয়। সেক্ষেত্রে AB হয় ACর সমান হবে, নয়তো AB বাহু AC অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হবে।



যদি $AB<AC$ হয়, তবে $\angle C < \angle B$। কিন্তু দেওয়া আছে $\angle C > \angle B$, আবার যদি $AB = AC$ হয়, তবে $\angle C = \angle B$। কিন্তু দেওয়া আছে $\angle C > \angle B$.

অতএব AB বাহু AC বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতরও হতে পারে না আবার সমানও হ'তে পারে না।

অতএব AB বাহু নিশ্চয়ই AC বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিভিন্ন জাতীয় উপপাদ্য :—পরোক্ষ পদ্ধতিতে প্রমাণ ক'রতে গেলে কতক লি বিভিন্ন জাতীয় উপপাদ্যের সঙ্গে পরিচিত হ'তে হয়। এ সমস্ত উপপাদ্যকে সচরাচর কোন একটি উপপাদ্যের বিপরীত বা উপাত্ত (converse), বিরুদ্ধ (Inverse), বৈষম্যমূলক (contrapositive) এবং পূরক (Reciprocal)—এই চারভাগে ভাগ করা হয়। আসল বা মূল উপপাদ্যের প্রকল্প ও সিদ্ধান্তের অদল বদল বা যোগ বিয়োগ করে নূতন উপপাদ্যগুলি পাওয়া যেতে পারে।

একটি উদাহরণ দিয়ে চার প্রকার উপপাদ্যের প্রকৃতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হ'ল :—

ধরা যাক্ মূল উপপাদ্যটি হ'ল :—"**যদি কোন ত্রিভুজ সর্বসম হয়, তবে তা সমদ্বিবাহু হবে।**"

বিপরীত প্রতিজ্ঞা :—মূল উপপাদ্যটির প্রকল্প হবে বিপরীত প্রতিজ্ঞার সিদ্ধান্ত, আর মূল উপপাদ্যটির সিদ্ধান্ত হবে বিপরীত প্রতিজ্ঞার প্রকল্প। উপরের উপপাদ্যটির বিপীরত প্রতিজ্ঞাটি হবে এইরূপ :—

"যদি কোন ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু হয়, তবে তাহা সর্বসম হবে।"

একথা অবশ্য বলা যায় যে বিপরীত প্রতিজ্ঞাগুলি সবসময় সত্য হয় না। উপরের প্রতিজ্ঞাটিই তার প্রকৃষ্ট উদাহরণ।

বিরুদ্ধ প্রতিজ্ঞা :—এই প্রতিজ্ঞাতে মূল উপপাদ্যের সিদ্ধান্তটি অস্বীকার ক'রে সেইটিকেই প্রকল্প বলে ধরে নেওয়া হয় এবং মূল উপপাদ্যের প্রকল্পটি সিদ্ধান্তে পরিণত হয়। অর্থাৎ তার রূপ দাঁড়াবে এই রকম :—

"যদি কোন ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু না হয়, তবে তা সর্বসম হবে।"

বৈষম্যমূলক প্রতিজ্ঞা :—এতে মূল উপপাদ্য বা প্রতিজ্ঞার প্রকল্প ও সিদ্ধান্ত ছু'টিরই নেতিবাচক রূপটি গ্রহণ করা হয়। যেমন :—"যদি কোন ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু না হয়, তবে তা সর্বসম হবে না।"

পূরক প্রতিজ্ঞা :—যখন মূল উপপাদ্যের বিভিন্ন সর্ত বিশেষ বিশেষ ভাবে পরিবর্তিত করা হয় (পারস্পরিক) তখনই তাকে পূরক প্রতিজ্ঞা বলে। মূল উপপাদ্যের বিন্দু পরিবর্তিত হয় রেখাতে, আবার রেখা পরিবর্তিত হয় বিন্দুতে। ত্রিভুজের কোণ পরিবর্তিত হয় বিপরীত বাহুতে আবার বিপরীত বাহু পরিবর্তিত হয় কোণে। একটি উদাহরণ দেওয়া যাক :—

মূল উপপাদ্য হ'ল :—"যদি ত্রিভুজের ছুইটি বাহু এবং তাহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ অপর একটি ত্রিভুজের ছুইটি বাহু ও অন্তর্ভুক্ত কোণের সমান হয়, তবে ত্রিভুজ ছুইটি সর্বসম হইবে।" পূরক প্রতিজ্ঞা হ'ল :—যদি একটি ত্রিভুজের ছুইটি কোণ এবং তাহাদের অন্তর্ভুক্ত বাহু অপর একটি ত্রিভুজের ছুইটি কোণ এবং অন্তর্ভুক্ত বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ ছুইটি সর্বসম হইবে।

উপপাদ্যের শ্রেণীভুক্ত করণ :—Key-Proposition এর কথা আগেই বলা হ'য়েছে। অনেকগুলি উপপাদ্যের মধ্যে একটি উপপাদ্যকে মূল উপপাদ্য ধরে নিয়ে একটি শ্রেণী বা দল গঠন করা হয়। এই মূল উপপাদ্যটি অনেক দিক দিয়েই

গুরুত্বপূর্ণ ও প্রয়োজনীয়। আবার এই মূল উপপাদ্যটি নির্বাচন ক'রতে বিশেষ বেগ পেতেও হয় না। বিভিন্ন উপপাদ্যের কতকগুলি শ্রেণী এবং তাদের মূল উপপাদ্যটি নীচে দেওয়া হ'ল।

(i) বৃত্ত সম্বন্ধীয় কোণ :—কেন্দ্রস্থ কোন পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।

(ii) স্পর্শক শ্রেণী :—স্পর্শক বৃত্তের ব্যসার্দ্ধের উপর লম্ব।

(iii) ক্ষেত্রফল শ্রেণী :—একটি ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সমান।

(iv) পীথাগোরাসের শ্রেণী :—সমকোণী ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা।

মূল উপপাদ্যটি স্থির করা হ'লে বাকী সমস্ত উপপাদ্যকে দু'ভাবে সাজান যায়।

একটি হ'ল : মূল উপপাদ্যের সঙ্গে প্রতিটি উপপাদ্যের একটা সম্বন্ধ রাখা হয়। এতে মূল উপপাদ্যটি জানা থাকলে বাকী উপপাদ্যগুলি সহজে প্রমাণ করা যায়। বিভিন্ন উপপাদ্যের মধ্যে যে যুক্তিযুক্ত সম্বন্ধ তা আর জানতে হয় না। ফলে পরিশ্রম অনেক কম হয়।

আর একটি হ'ল :—প্রতিটি উপপাদ্যের মধ্যে একটা নিবিড় যোগসূত্র রাখা হয়। এতে পূর্বের উপপাদ্যটি জানা না থাকলে পরের উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায় না। এতে যুক্তিযুক্ত পদ্ধতি নিখুতভাবে মেনে চলতে হয়।

প্রথম নিয়মটিকে এক ছড়া কলার সঙ্গে তুলনা করা যায়। প্রতিটি কলা নির্দিষ্ট এক জায়গার সঙ্গে যুক্ত আছে অথচ একটির সঙ্গে আর একটির কোন সম্বন্ধ নাই। দ্বিতীয় নিয়মটিকে একটি মালার সঙ্গে তুলনা করা যায়। একটি ফুলের সঙ্গে আর একটি ফুলের সম্বন্ধ রক্ষা ক'রেই মালাটি গাঁথা হয়। যদি একটি ফুল ছিঁড়ে ফেলা যায়, তবে মালাটির সৌন্দর্য্য বা সামঞ্জস্য নষ্ট হ'য়ে যায়। এ থেকে পরিষ্কারভাবে বোঝা যাচ্ছে প্রথম নিয়টি দ্বিতীয় নিয়ম অপেক্ষা অনেক সুবিধাজনক।

নন্ ইউক্লিডিয় জ্যামিতি (Non-Euclidean Geometry) :—

গণিতশাস্ত্র, তথা বিজ্ঞানের ইতিহাসে নন্ ইউক্লিডিয় জ্যামিতি যুগান্তর আনয়ন ক'রেছে। আগেই বলা হয়েছে মিশরবাসীরা স্বজ্ঞা ও আরোহী পদ্ধতিতে জ্যামিতিক জ্ঞান অর্জন করে। পরে গ্রীকেরা তার উত্তরাধিকারী হন। এই জ্ঞানকে তারা প্রমাণসিদ্ধ করে। ইউক্লিড সেগুলিকে একত্রিত করেন এবং নিয়মানুগ পদ্ধতি অবলম্বন ক'রে সেগুলি লিপিবদ্ধ করেন। তারপর প্রায় দু'হাজার বৎসর ধরে জ্যামিতির ক্ষেত্রে ইউ[illegible]র একছত্র আধিপত্য বিরাজ ক'রছিল। সকলের মনে দৃঢ় ধারণা ছিল যে ইউক্লিড ভৌত স্থান পরিমাপের ক্ষেত্রে যা বলেছেন তারপর আর

বলবার কেউ নেই, কিছু নেই। প্রকৃত প্রস্তাবে ইউক্লিডের সিদ্ধান্তকে বেদবাক্যের মত অভ্রান্ত মনে করা হ'ত। ইউক্লিডের গোঁড়া সমর্থকও কম ছিল না। দীর্ঘদিন ধরে ইউক্লিডের সিদ্ধান্ত সম্বন্ধে কেউ সন্দেহ প্রকাশও করেন নি, আবার সমালোচনাও করেন নি। তবে অনেকদিন পরে হ'লেও দীর্ঘদিনের এই অভ্রান্ত বিশ্বাসের মূলে কুঠারাঘাত করেন একজন জার্মান, একজন রাশিয়ান ও একজন হাঙ্গেরীয়ান্ গণিতবিদ্। তাঁদের প্রচেষ্টার ফলেই নন্ ইউক্লিডিয় জ্যামিতির উদ্ভব ঘটে।

ইউক্লিডের 'এলিমেণ্টের' ১ম খণ্ডের ৫ম স্বীকার্য হ'ল এইরকম: একটি প্রদত্ত সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু দিয়ে ঐ সরলরেখাটির সমান্তরাল একটিমাত্র সরলরেখা টানা যেতে পারে। ইউক্লিড কিন্তু সবসময় স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যের মধ্যে সুস্পষ্ট কোন সীমারেখা টানেন নি। অনেকেই মনে করেন, ইউক্লিড যখন পূর্বোক্ত বিবৃতিটিকে স্বতঃসিদ্ধ না বলে স্বীকার্য বলেছেন—তখন এ'টি স্বয়ংসম্পূর্ণ ও স্বাধীন কিনা সে বিষয়ে তাঁর নিজেরই যথেষ্ট সন্দেহ ছিল। পরবর্তী দু'হাজার বছর ধরে বহু গণিতবিদ্ অন্যান্য স্বতঃসিদ্ধগুলির সাহায্যে এই স্বীকার্যটি প্রমাণ করার চেষ্টা করেন। Ptolemyও চেষ্টা ক'রেছিলেন। তারপর মধ্যযুগেও বহু গণিতবিদ্ এ'টি প্রমাণ করার চেষ্টা করেন। কিন্তু কারো কোন চেষ্টাই ফলবতী হয় না। Grauss নামক একজন জার্মান গণিতবিদ্ প্রথম ধারণা করেন যে স্বীকার্যটি সম্পূর্ণ স্বাধীন। তখনই বুঝতে পারা যায় যে কোন স্বীকার্য অবলম্বন ক'রেও যুক্তি-সম্মতভাবে নূতন জ্যামিতি সৃষ্টি করা সম্ভব। Graussএর পর রাশিয়ান গণিত-বিদ্ Nikolai Ivanovitch Lobachevsky ও হাঙ্গেরীয়ান গণিতবিদ্ Janos Bolyai ইউক্লিডের সিদ্ধান্তগুলি সম্পর্কে প্রথম প্রকাশ্যভাবে বিরুদ্ধাচরণ করেন এবং তারই ফলে Non-Euclidean জ্যামিতির উদ্ভব ঘটে। 1829-30 সালে Loba-chevsky তাঁর Non-Euclidean জ্যামিতি সম্বন্ধে বইটি প্রকাশ করেন। Bolyai ও তাঁর অভিনব ধারণার কথা প্রকাশ করেন। তিনি ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্যটিকে একটি স্বাধীন স্বীকার্য বলে গ্রহণ করেন এবং বলেন যে ঐ স্বীকার্যটির বদলে যদি স্বীকার ক'রে নেওয়া যায় যে সমতলস্থ একটি বিন্দু দিয়ে অসীম সংখ্যক সরল রেখা টানা যায় যারা ঐ সমতলে অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট রেখাকে ছেদ ক'রবে না—তা হ'লে আর একপ্রকার জ্যামিতি গঠন করা সম্ভব।

স্বীকার্যগুলির উপর ভিত্তি ক'রে আমরা তিন রকমের জ্যামিতির দেখা পাই। সেগুলি হ'ল: ১। Euclid এর জ্যামিতি ২। Lobachevskyর এবং ৩। Reimann এর জ্যামিতি। প্রথমটি হ'ল Euclidean এবং বাকী দু'টি Non

Euclidean জ্যামিতি। অবশ্য Non-Euclidean জ্যামিতিতে Euclid এর পদ্ধতিই অবলম্বন করা হ'য়েছে। ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্য ছাড়া অন্যান্যগুলিকে মেনে নেওয়া হ'য়েছে। Euclid এর জ্যামিতি যেমন যুক্তিসিদ্ধ, ঐগুলিও তেমন যুক্তিসিদ্ধ এবং যুক্তিগুলির মধ্যে ফাঁক নেই। কিন্তু তিনটি জ্যামিতির আলোচিত উপপাদ্যগুলির মধ্যে যথেষ্ট পার্থক্য আছে।

ইউক্লিড যেভাবে জ্যামিতি তৈরী ক'রেছেন ও স্বীকার্য নির্ণয় ক'রেছেন সেভাবে অসংখ্য জ্যামিতি ও স্বীকার্য গঠন করা সম্ভব। এ জ্যামিতিগুলিও ইউক্লিডের জ্যামিতির মতই সত্য হবে। তলের বক্রতা যাই হোক্ না কেন, আর যেমনই হোক্ না কেন, যে কোন তলকে অবলম্বন ক'রেও জ্যামিতি গঠন করা সম্ভব। জ্যামিতির কাজই হ'ল এমন একটা যুক্তিসঙ্গত কাঠামো নির্মাণ করা যার সিদ্ধান্তগুলি পরস্পর বিরোধী হবে না। পদার্থবিদ্যাতে Non-Euclidean জ্যামিতি প্রয়োগের ফলে বহু পরীক্ষালব্ধ তথ্যের ব্যাখ্যা করা সম্ভব হ'য়েছে যার ফলে বহু নূতন তথ্য আবিষ্কৃতও হ'য়েছে।

কেবল দ্বিমাত্রিক তলের উপরই নয়, বর্ত্তমান পদার্থবিদ্‌গণ আরো বেশীমাত্রাবিশিষ্ট স্থানেও Non-Euclidean জ্যামিতি প্রয়োগ ক'রেছেন। আমরা যে স্থানে (Space) বাস করি, সেই স্থান সম্বন্ধে বৈজ্ঞানিকগণ পরীক্ষা ক'রে এই সিদ্ধান্তে এসেছেন যে, স্থানটি সরল নয় বক্র। স্থতরাং পৃথিবীর পৃষ্ঠদেশে ইউক্লিডের জ্যামিতি কার্য্যকরী হ'লেও স্থদূর গ্রহনক্ষত্রের জগতে তা কোন কাজে লাগে না। তাছাড়া ইউক্লিড সময় সম্বন্ধে কিছু চিন্তা করেন নি। তিনি মনে ক'রতেন সরলরেখা, কোণ ও জ্যামিতিক চিত্র অপরিবর্তনীয় স্থির। কিন্তু পৃথিবী পরিবর্তনশীল, পরিবর্তনশীল জগতের পরিবর্তন মাপ ক'রতে হ'লে অপরিবর্তনীয় মাপকাঠি হ'লে চলবে না ; পরিবর্তনশীল মাপকাঠির প্রয়োজন। সেইজন্যই আজ Non-Euclidean জ্যামিতির প্রয়োজনীয়তা ও কদর এত বেশী।

———

উনবিংশ অধ্যায়

ত্রিকোণমিতি শিক্ষাপদ্ধতি

(Teaching of Trigonometry)

ত্রিকোণমিতির ইংরেজী প্রতিশব্দ Trigonometry এই শব্দটির মধ্যেই এর অর্থটি নিহিত আছে। Trigonometry শব্দটি Trigonom এবং metria এই দু'টি শব্দের সংযোগে গঠিত। Trigonom শব্দের অর্থ হ'ল ত্রিভুজ আর metria শব্দের অর্থ হ'ল মাপ করা। জরীপ করার কাজে ত্রিভুজীকরণের সাহায্য নেওয়া হ'ত বলেই গণিতের এই শাখাটির নাম হয় Trigonometry। ত্রিকোণমিতিতে মূল কথাই হ'ল যে একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের মাপ দেওয়া থাকলে ত্রিভুজের বাহুগুলির সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত (পরস্পরাপেক্ষ) কোন মাপ পাওয়া যায় কি না, তা নির্ণয় করা।

ত্রিকোণমিতি কারা আবিষ্কার করেন, এর উত্তরে অনেক ঐতিহাসিক বলেন—গ্রীকদের মধ্যেই এর প্রথম প্রচলন শুরু হয়। খৃষ্ট পূর্বে ১৬০ অব্দে হিপারকাস্ নামক একজন গ্রীক জ্যোতির্বিদ প্রথম এর আবিষ্কার করেন। ত্রিকোণমিতি আবিষ্কার ক'রে তিনি জ্যোতির্বিজ্ঞানের অনেক উপকার সাধন ক'রেছিলেন। পরবর্তীকালে এই শাখাটির আরও উন্নতি করেন টলেমী নামক আর একজন জ্যোতির্বিদ অতএব দেখা যাচ্ছে জ্যোতির্বিজ্ঞানের তত্ত্ব অনুসন্ধানের জন্যই ত্রিকোণমিতির সৃষ্টি হয় এবং একই প্রয়োজনে তার উন্নতি সাধিত হয়। জ্যোতির্বিদগণ প্রধানতঃ সময় ও কোণ পরিমাপ ক'রে থাকেন। তাঁরা বিভিন্ন যন্ত্রপাতি (যেমন টেলিস্কোপ) নিয়ে ঠিক কোন মুহূর্তে কোন নক্ষত্র উত্তর বা দক্ষিণে আসে তা বার ক'রতে চেষ্টা করেন। সুতরাং আসলে তাঁরা যা মাপ করেন, তা হ'ল কোণ। দু'টি নক্ষত্রের কোনও বিন্দু অতিক্রম করার মাঝে যে সময় কেটে যায় তাঁরা সেই সময় অনুসারে ঠিক করেন কত ডিগ্রী কোণ পৃথিবী ঐ সময়ের ভিতর অতিক্রম ক'রেছে। সুতরাং জ্যোতির্বিজ্ঞানী যখন আকাশ পর্য্যবেক্ষণ করেন, তখন তিনি গ্রহ-নক্ষত্রের অন্তর্বর্তী কোণগুলিই মাপ করার চেষ্টা করেন।

তেমনি যখন ভূমি জরীপ করা হয় তখনও আসলে যা মাপ করা হয় তা হ'চ্ছে কোণ; নদীর গভীরতা বা পাহাড় পর্বতের উচ্চতা কিংবা ভূমির অসমতা অনেক সময় বাধা সৃষ্টি করে। কোন স্থানের জরীপ নির্ভর করে একটি বা দু'টি দৈর্ঘ্যের উপ

কিন্তু আসল কাজ হয় কোণ মাপ করা। একটা উদাহরণ দেওয়া যাক্। ধরা যাক্, এমন একটি জায়গা জরিপ ক'রতে হবে যার তিনটি সমুন্নত স্থান হ'ল—A, B ও C। এই তিনটির প্রত্যেক স্থান থেকে অপর স্থানটি দেখা যায়। Clinometer প্রভৃতি কোণ মাপক যন্ত্রের সাহায্যে ∠ABC সহজেই মাপ করা যায়। দু'টি মাত্র কোণ মাপ ক'রতে পারলেই কাজ চালানো যায়। এইজন্য কোন দেশের মানচিত্র তৈরী ক'রতে গেলে সমস্ত ভূমির উপরিভাগকে কতকগুলি ত্রিভুজে ভাগ করা হয়। একেই বলা হয়—ত্রিভুজীকরণ (Triangulation)। একটি ত্রিভুজের সমস্ত কোণ জানা থাকলে ত্রিভুজের আকারটিও জানা যায়। জ্যামিতির সদৃশতার যে তত্ত্ব (Principle of Similarity) তা নিয়োগ করা হয়। যদি ABC ও DEF ত্রিভুজ এমন হয় যে :—

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, তা হ'লে $DE : AB = EF : BC$ হবে। এই সুবিধাটি কিন্তু ত্রিভুজের ক্ষেত্রেই পাওয়া যায় ; চতুর্ভুজের ক্ষেত্রে পাওয়া যায় না। সেইজন্যই জরীপের কাজে ত্রিভুজীকরণের সাহায্যই নেওয়া হয়।

ত্রিভুজের কোণ ও বাহুর পরস্পরাপেক্ষ মাপ জানতে হ'লে কোণগুলির পরিমাণের কতকগুলি কার্য্যকারিতা জানতে হয়। প্রথম অবস্থাতে এইজন্য একটি সমকোণী ত্রিভুজ নেওয়া হ'ত এবং কোণের মাপ বৃত্তের চাপের দৈর্ঘ্যের সাহায্যে মাপা হ'ত। বর্ত্তমানে অবশ্য কোণের মাপ বৃত্তের চাপের দৈর্ঘ্যের সাহায্যে মাপ করা হয় না। ঋজুরেখক্ষেত্রগুলির মধ্যে ত্রিভুজ থেকে যে সুবিধা পাওয়া যায় বক্ররেখা সমন্বিত ক্ষেত্রের মধ্যে বৃত্তের থেকেও সেই সুবিধা পাওয়া যায়। যে কোন দু'টি বৃত্তই হ'ল সদৃশ ক্ষেত্র। দু'টি বৃত্তের পরিধির অনুপাত আর তাদের ব্যাসার্দ্ধের সমান। আবার এককেন্দ্রীয় বৃত্ত হ'লে তাদের কোণ চাপের অনুপাত ব্যাসার্দ্ধ দু'টির অনুপাতের সমান হবে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে চাপকে ব্যাসার্দ্ধ দিয়ে ভাগ ক'রলেই কোণের একটি মাপ পাওয়া যায়।

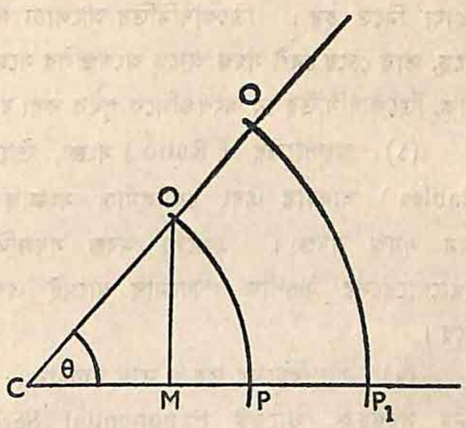
$$\frac{\text{চাপ } PO}{\text{চাপ } P_1O_1} = \frac{CP}{CP_1}$$

অথবা,

$$\frac{\text{চাপ } PO}{CP} = \frac{\text{চাপ } P_1O_1}{CP_1}$$

এখন যদি O বিন্দু থেকে CPর উপর OM একটি লম্ব টানা হয়, তবে OM

হবে $\angle PCO$র sine. এটা অবশ্য গ্রীক্ গণিতজ্ঞদের মত। তাঁরা sin শব্দটি নিয়েছেন Sinus থেকে যার অর্থ হ'ল বক্ষ-রেখা। OP চাপটিকে বাড়ালে চিত্রটিকে একটি ধনুকের মত কল্পনা করা যেতে পারে। সেই ধনুকের তীর হ'ল CP আর বক্ষ-রেখা হ'ল OM.



এখন $\frac{OM}{CP}=\frac{OM}{CO}$, একে বলা হয় $\angle OCM$ এর sine.

আবার $\frac{CM}{CO}$ কে বলা হয় sine এর Complement কোণ বা Co-sine. এটা অবশ্য ধরা সম্ভব হ'চ্ছে OCM সমকোণী ত্রিভুজ বলেই। তেমনি $\frac{OM}{CM}$ কে বলা হয় tangent বা সংক্ষেপে tan.

অর্থাৎ $\angle OCM=\theta$ ধরলে

$$\sin\ \theta=\frac{OM}{CO},\quad \text{cosine}\ \theta=\frac{CM}{CO}\ \text{এবং}\ \tan\ \theta=\frac{OM}{CM}$$

ত্রিকোণমিতিকে গণিতশাস্ত্রের একটি পৃথক শাখা হিসাবে ধরা হয় এবং সেই-ভাবেই বিষয়টি পড়ানোর ব্যবস্থাও করা হয়। কিন্তু বিষয়টির বৈশিষ্ট্যগুলি ভালো ক'রে পর্য্যবেক্ষণ ক'রলে বোঝা যাবে এ'টি পৃথক ও স্বাধীন একটি বিষয় নয়। পাটীগণিত এগিয়ে আসে সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা নিয়ে, বীজগণিত সেই ধারণাটিকে সাধারণীকৃত করে, আবার সমীকরণ ব্যবহার করাতেও সাহায্য করে। আর জ্যামিতি আসে স্থান সম্বন্ধে ধারণা ও সেই জাতীয় সমস্যার সমাধানে সাহায্য ক'রতে। এতো বিভিন্নতা থাকা সত্বেও বিষয়গুলির মধ্যে একটা পারস্পরিক সংযোগ লক্ষ্য করা যায়। ত্রিকোণমিতিকে একটি পৃথক বিষয় হিসাবে না ধরে এ'টিকে বীজগণিত ও জ্যামিতির বিশেষ রূপান্তর বলা যেতে পারে। ত্রিকোণমিতির বৈশিষ্ট্যগুলি পর্য্যবেক্ষণ ক'রলে দেখা যাবে ঐ সমস্ত বৈশিষ্ট্য জ্যামিতি ও বীজগণিতের ক্ষেত্রেও পাওয়া যায়। আবার ত্রিকোণমিতির সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রেও জ্যামিতি ও বীজগণিতের নীতিগুলির

সাহায্য নিতে হয়। ত্রিকোণমিতির আলোচ্য অংশগুলির পরস্পরের মধ্যে যে সম্বন্ধ আছে, তার চেয়ে বেশী সম্বন্ধ আছে অংশগুলির সঙ্গে জ্যামিতি ও বীজগণিতের। যাই হোক্, ত্রিকোণমিতির যে অংশগুলিকে পৃথক করা যায় না সেই অংশগুলি হ'ল :—

(১) অনুপাতের (Ratio) সংজ্ঞা, তাদের আসন্ন মান নির্ণয়, তালিকা (tables) ব্যবহার এবং কেবলমাত্র সংজ্ঞার জ্ঞান থাকলেই সমাধান করা যাবে এমন সমস্ত সমস্যা। এগুলো অবশ্য সবগুলিই সমকোণী ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় এবং পীথাগোরেসের উপপাদ্য পড়ানোর আগেই এগুলি সম্বন্ধে আলোচনা করা যেতে পারে।

(২) লগারিথমের তত্ত্ব ও তার ব্যবহার। এ'টি বীজগণিতের সঙ্গে অত্যন্ত ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধযুক্ত, কাজেই Exponential Series পড়ানোর সময় এ'টি পড়ানো যেতে পারে।

(৩) সাধারণ ত্রিভুজের সমাধান (লগারিথমের সাহায্যে এবং সাহায্য ছাড়াও) সূত্রগুলি জ্যামিতিক পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যেতে পারে।

(৪) অনুপাতগুলির মধ্যে মূলগত সম্বন্ধ নির্ণয়, পীথাগোরাসের উপপাদ্যের প্রয়োগ, একটি অনুপাতকে অন্যের তুলনাতে প্রকাশ করা, সহজ অভেদাবলী।

(৫) কোণের বিস্তৃত সংজ্ঞা ; ঋণাত্মক ও ধণাত্মক কোণ। এই সমস্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের বিস্তৃত ব্যাখ্যা ; সহজ সমীকরণ, যথা $\cos x = \frac{1}{2}$ ইত্যাদি, অভেদাবলী।

(৬) $\sin (270 - A) = \cos A$ এই জাতীয় সূত্র।

(৭) ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ।

(৮) Addition Theorem এবং তার ফলাফল।

এই সমস্ত অংশগুলির পরস্পরের সঙ্গে সম্বন্ধ অত্যন্ত ক্ষীণ এবং এগুলিকে যে কোনভাবে সাজিয়ে পড়ানো যেতে পারে। অংশগুলির সঙ্গে জ্যামিতি ও বীজগণিতের একটা প্রত্যক্ষ সংযোগ আছে। প্রথম তিন, চারটি অংশ অত্যন্ত সহজ এবং এগুলি স্কুলের নবম-দশম শ্রেণীতে আরম্ভ করা যেতে পারে। বাকীগুলি অপেক্ষাকৃত কঠিন এবং এগুলি একাদশ, P. U. বা U. Eতে পড়ানো যেতে পারে।

ত্রিকোণমিতির বৈশিষ্ট্য হ'ল একে খুব সহজে এবং প্রত্যক্ষভাবে কতকগুলি ব্যবহারিক ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা সম্ভব। আর এই ব্যবহারের ক্ষেত্র বা সীমানাও বেশ ব্যাপক। গণিতের বিভিন্ন শাখার মধ্যে এই শাখাটির ব্যবহারিক মূল্যই বোধহয় সবচেয়ে বেশী।

বাস্তব উদাহরণের সাহায্যে ত্রিকোণমিতি আরম্ভ করা উচিত। ত্রিকোণমিতির মূল তত্ত্ব হ'ল একটি সূক্ষ্মকোণ বিশিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজগুলি সদৃশ। এই কোণটি এবং বাহুগুলির ছয় প্রকার অনুপাত এই সাতটি জিনিস এমনভাবে সম্বন্ধযুক্ত যে, একটি জানা থাকলে বাকীগুলি সব জানা সম্ভব। এই অনুপাতের মাপ দিয়েই বিষয়টি শুরু করা যায় কিংবা কোণটি বা অন্য কোণ অনুপাত দেওয়া থাকলে ত্রিভুজ অঙ্কন দিয়েও শুরু করা যায়। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে কোন ত্রিভুজে বাহুগুলি হ'ল a, b, ও c আর কোণগুলি হ'ল A, B, C। এখন যদি $\frac{a}{c}$ এই অনুপাতটি জানা থাকে, তবে অন্য অংশগুলি জানা যাবে। কিংবা যদি A এর মান জানা থাকে তবে অন্য অংশগুলি নির্ণয় করা যাবে। অনুপাতগুলির পরিমাপ নিয়ে কিছুদিন চর্চা করার পর এদের প্রচলিত নামগুলি শেখানো যেতে পারে। বর্ত্তমান মত হ'ল ত্রিকোণমিতিকে কেবলমাত্র অনুপাতের হিসাবেই ব্যাখ্যা ক'রতে হবে।

এরপর ছাত্রদিগকে 0^0 থেকে 5^0 ক'রে বাড়িয়ে 90^0 পর্যান্ত মাপের বিভিন্ন কোণ এঁকে তাদের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি মাপ ক'রতে বলা যেতে পারে। এই মাপগুলি গ্রাফ কাগজেও সাজানো যেতে পারে। এইখানেই তালিকা (Natural Value) ব্যবহার করানো যেতে পারে। তারপর সহজ অথচ চিত্তাকর্ষক বাস্তব সমস্যার সমাধানে (যেমন নদীর বিস্তৃতি মাপ করা, পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় করা) ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করা যেতে পারে। তেমনি কতকগুলি লম্ব অভিক্ষেপ, Parallelogram of motion প্রভৃতি ক্ষেত্রেও ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করা যেতে পারে। দুপুর বেলাতে সূর্য্যের উন্নতি কোণ (angle of elevation) কত, তা নির্ণয় করা যায় খাড়াভাবে পুঁতে রাখা একটি কাঠির সাহায্যে। এখানেও কিন্তু ত্রিকোণমিতির সাহায্য নেওয়া হ'চ্ছে। এই ভাবে সহজ, সরল ও চিত্তাকর্ষক সমস্যার সাহায্যে ছাত্রের কৌতূহল ও অনুসন্ধিৎসা সৃষ্টি ক'রে তাকে কঠিন সমস্যার সমাধানের দিকে পরিচালিত করা যেতে পারে।

———————

বিংশ অধ্যায়

গণিত শাস্ত্রের ইতিহাস

(History of Mathematics)

অন্যান্য বিষয়ের মত গণিতেরও একটা ইতিহাস আছে। বিষয়টি একদিনে বা একজনের প্রচেষ্টাতে উন্নত হয় নি। অনেক গণিতবিদের গবেষণা ও অক্লান্ত পরিশ্রমের ফলেই গণিত আজ বর্ত্তমান অবস্থায় এসে পৌঁছাতে পেরেছে। এর ইতিহাস যেমন চিত্তাকর্ষক, তেমনি শিক্ষাপ্রদ। সভ্যতার অগ্রগতির সঙ্গে সঙ্গে গণিতেরও অগ্রগতি হ'য়েছে। সেদিক দিয়ে দেখতে গেলে গণিতের ইতিহাস সভ্যতারই ইতিহাস।

বয়সের সঙ্গে সঙ্গে শিক্ষার্থীর মনোজগতেও একটা পরিবর্ত্তন হয়। এই পরিবর্ত্তনকে এইভাবে ধরা হয়ঃ—প্রথম অবস্থায় রোমান্সের প্রাধান্য, দ্বিতীয় অবস্থায় কৌতূহল এবং তৃতীয় অবস্থায় প্রয়োজনীয়তার প্রাধান্য। (Age of Romance, curiosity and utility)। এই কৌতূহল পর্য্যায়ে সে সবকিছু জানতে চায়, শিখতে চায়। তখনই তাকে গণিত শাস্ত্রের ইতিহাস শেখানো যেতে পারে এবং ঐতিহাসিক পদ্ধতিতে (historical method) পাঠ দিলে ছাত্র যথেষ্ট আগ্রহও অনুভব করে। গণিতের ইতিহাসের উদ্ভব সাধারণ লোকের চাহিদা পূরণের উদ্দেশ্যেই। আর এই অভাব পূরণের জন্যই গণিতকে আরও উন্নত ক'রতে হ'য়েছে। সভ্যতার প্রাথমিক স্তরে গণিত ছিল সহজ ও সরল। কিন্তু মানব সভ্যতার অগ্রগতির সঙ্গে সঙ্গে গণিতও ক্রমশঃ জটিল ও বিমূর্ত্ত হ'তে শুরু করে। একটা দৃষ্টান্ত দেওয়া যাক। বর্ত্তমানে 'Calculus' কথাটি যে অর্থে ব্যবহার করা হয়, পূর্বে কিন্তু সেভাবে ব্যবহার করা হ'ত না। Calculus কথাটি ল্যাটিন 'Calculi' কথাটি থেকে এসেছে—যার অর্থ হ'ল নুড়ি পাথর। পূর্বে মেষপালকরা যখন গণনা ক'রতে জানত না তখন তারা তাদের মেষের সংখ্যা নির্ণয় ক'রত এক একটি মেষের বদলে এক একটি নুড়ি পাথর ধরে। পরে মেষের সংখ্যা যখন অনেক বেড়ে গেল তখন দু'টি, তিনটি, পাঁচটি বা দশটি মেষের বদলে এক একটি নুড়ি ধরা হ'ত।

গণিতের ইতিহাসকে সভ্যতার ইতিহাস বললেও বিশেষ অত্যুক্তি হয় না। বর্ত্তমান সভ্যতার অগ্রগতি বা প্রাকৃতিক জগতের রহস্য উদঘাটনের ক্ষেত্রে গণিতের অবদান অপরিসীম। অবশ্য গণিত যে কেবলমাত্র সভ্যতার বর্ত্তমান

অগ্রগতির পরিমাণ করে ক্ষান্ত থাকে, ত' নয়, সভ্যতার অগ্রগতির ভবিষ্যত একটা ধারণাও এর সাহায্যে পাওয়া যায়। পারমাণবিক শক্তি যার সম্ভাবনা অপরিসীম তার—উদ্ভবও গণিত থেকেই। Albert Einstein এর আপেক্ষিক তত্ত্ব আবিষ্কারের সঙ্গে সঙ্গে গণিতে একটা যুগান্তর এসেছে বলা যেতে পারে। বিশুদ্ধ গণিত চর্চার ফলে এমন সব ফল পাওয়া গেছে যেগুলি আমাদের দৈনন্দিন জীবনে অনেক কাজে লাগে। গণিতের এই ব্যবহারিক প্রয়োগের জন্যই পরবর্তী কালে ফলিত গণিত (Applied Mathematics) নামে একটি নূতন শাখার উদ্ভব হয়।

আমরা কি অর্জন ক'রেছি বা কতটা সাফল্য অর্জন ক'রেছি গণিতের ইতিহাস কেবল সেটুকু নিয়েই আলোচনা করে না। এর আলোচনার ক্ষেত্র আরো ব্যাপক। আমরা আরো কতটা সাফল্য অর্জন ক'রতে পারি, কিভাবে সহজে অধিক সাফল্য অর্জন করা সম্ভব—এ সমস্তও গণিতের ইতিহাসের আলোচ্য বিষয়বস্তু। প্রথমদিকে গণিতের যে ইতিহাস পাওয়া যায়, তাতে আমাদের পূর্বসূরীরা যে ভুল ক'রেছিলেন, সেগুলির একটা পরিচয় পাওয়া যায়। কাজেই ভালোভাবে গণিতের ইতিহাস পর্যালোচনা ক'রলে ঐ সমস্ত ভুলের হাত থেকে নিষ্কৃতি পাওয়া যেতে পারে। এইজন্যই গণিতের ইতিহাসে আরো অনেক বেশী ক'রে মনোযোগ দেওয়া প্রয়োজন। এ প্রসঙ্গে মনে রাখা উচিত, গণিত একটি স্থিতিশীল বিজ্ঞান নয়; গতিশীল বিজ্ঞান। কাজেই এ'টিকে একটি মৃত বা অপ্রচলিত বিষয় মনে ক'রে সেইভাবে পড়ালে চলবে না। বিষয়টিকে একটি জীবন্ত বিষয় হিসাবে আকর্ষণীয় পদ্ধতিতে পড়াতে হবে।

এখন গণিতের ইতিহাসের একটা সংক্ষিপ্ত বিবরণী দেওয়া যাক্। প্রথমে কতকগুলি দেশ এবং সেই দেশের গণিতবিদ্‌দের কথা ধরা যাক্।

মেসোপটেমিয়া ঃ—খৃঃ পূঃ 4000 বৎসর পূর্বে টাইগ্রিস আর ইউফ্রেটিস নদীর মাঝামাঝি সুমের নামক একটি দেশের অধিবাসীরা (সুমেরীয়রা) নিজেদের সামাজিক প্রয়োজনেই সংখ্যার প্রচলন ক'রতে বাধ্য হন। তখনও পর্যন্ত সংখ্যা লিপিবদ্ধ করার কোন ব্যবস্থা ছিল না বলে কাদার উপর কাঠি দিয়ে লিখতে হ'ত। পরিমাপের ক্ষেত্রে ষষ্ঠিক পদ্ধতির (Sexagesimal System) তাঁরাই প্রবক্তা। তাছাড়া কোন সংখ্যার স্থানাঙ্ক 'নির্ণয় করার কৌশলটিও তাঁরা আবিষ্কার করেন। ঘণ্টা, মিনিট, সেকেণ্ড নির্ণয়ের বা বৃত্ত ও কোণ পরিমাপের ক্ষেত্রে এখনও ষষ্ঠিক পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়, আর বীজগণিত ও পাটীগণিতের স্থানাঙ্ক ব্যবহার এখনও প্রচলিত আছে। তা ছাড়া ক্ষেত্রফল যে দৈর্ঘ্য-প্রস্থের গুণফল তাও তাঁরা আবিষ্কার করেন। পরবর্তী কালে তাঁরা বৃত্তের পরিধির সঙ্গে ব্যাসের একটা অনুপাতও নির্ণয় করেন যা এখন π এর মাপে প্রকাশ করা হয়।

ব্যাবিলনের অধিবাসীরা সুমেরীয়দের চেয়ে গণিতে বেশী অগ্রসর হ'য়েছিলেন। তাঁরা পূরক সংখ্যার (Reciprocals) একটি তালিকা প্রণয়ন করেন এবং দেখান যে N জাতীয় কোন সংখ্যার পূরক হ'ল $\frac{1}{N}$। বর্ত্তমানের পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সম্বন্ধগুলিও এঁদের জানা ছিল। বীজগণিত ও জ্যামিতি নিয়েও এঁরা চর্চা করেন এবং জ্যোতির্বিজ্ঞানের ক্ষেত্রেও এঁদের অবদান কম ছিল না।

মিশর :—প্রাচীন মিশরের গণিতের ইতিহাস জানতে পারা যায় প্যাপিরাসে লিখিত পুঁথি থেকে। এ জাতীয় একটি পুঁথি হ'ল Ahmes Papyrus যেটির রচনা-কাল খৃঃ পূঃ 1600 সাল বলে ধরা হয়। মিশরীয়রা দশমিকের ভিত্তিতে হিসাব নিকাশ ক'রতেন। মিশরীয়রা ছবির সাহায্যে সংখ্যা প্রকাশ ক'রতেন। আবার অনেক সময় খুব টানা টানা অক্ষর লেখা বা রেখার সাহায্যেও সংখ্যা প্রকাশ করা হ'ত। প্রথম পদ্ধতিটিকে বলা হ'ত—hieroglyphics আর দ্বিতীয়টিকে বলা হ'ত—hieratic। মিশরীয়রা যে গণিতকে অত্যন্ত দক্ষতার সঙ্গে ব্যবহারিক কাজে লাগিয়েছিলেন তার সুস্পষ্ট প্রমাণ হ'ল পিরামিডগুলি। জ্যামিতির অত্যন্ত সূক্ষ্ম পরিমাপও তাঁদের অজানা ছিল না। সেইজন্য দেখা যায় মিশরের সবচেয়ে বড় পিরামিড (Great Pyramid) তৈরী ক'রতে যেয়ে যেসমস্ত কোণের সৃষ্টি হ'য়েছিল তার সবচেয়ে বেশী ভুলের পরিমাণ হ'ল 12" বা এক সমকোণের 1/27000 ভাগ মাত্র। প্রথম দিকে অবশ্য গণিতের চর্চা পুরোহিত শ্রেণীর মধ্যেই সীমাবদ্ধ ছিল। তাঁরা স্বার্থপরের মত এই বিষয়টিকে আঁকড়ে ধরে ছিলেন বলে দীর্ঘদিন যাবৎ সাধারণ লোক বিষয়টির রস আস্বাদনে অসমর্থ ছিল।

গ্রীস :—গ্রীকরা ছিলেন জীবনবোধের রসে সিঞ্চিত এক স্বাধীন জাতি। জীবন সম্বন্ধে তাদের যেমন আগ্রহ ছিল—তেমনি কৌতুহলও ছিল। তাদের পর্য্যবেক্ষণ ক্ষমতাও ছিল অত্যন্ত সূক্ষ্ম। তারা মিশরীয় ও মেসোপটেমিয়ার অধিবাসীদের গণিত সম্বন্ধে গবেষণার ফল লক্ষ্য ক'রে মুগ্ধ হ'য়েছিল। কিন্তু প্রভাবিত হওয়া সত্ত্বেও তারা সেগুলি পুরোপুরি নকল করেন নাই। গ্রীস দেশে তখন দাসত্ব প্রথা প্রচলিত ছিল, সেইজন্য ধনী সম্প্রদায় বুদ্ধিগত আলোচনাতে যথেষ্ট সময় খরচ ক'রতে পারত। গ্রীকদের সবচেয়ে বড় অবদান হ'ল জ্যামিতির ক্ষেত্রে। Geometry কথাটির উৎপত্তিই গ্রীক শব্দ geo (=earth) এবং metria (=measurement) থেকে। জমি জরীপ করার ব্যবস্থারও প্রথম প্রচলন করেন গ্রীকরা। কতকগুলি সহজ এবং সুস্পষ্ট সত্য (axiom) থেকে তাঁরা যুক্তিপূর্ণ বিচারকরণ বা যুক্তিযুক্তভাবে প্রমাণ করার

পদ্ধতি প্রবর্ত্তন করেন। এবার গ্রীকদেশের কয়েকজন সুবিখ্যাত গণিতবিদের নাম উল্লেখ করা হ'ল।

পীথাগোরাস (Pythagoras) : ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি সম্বন্ধীয় ও অন্যান্য কতকগুলি উপপাদ্য তিনি আবিষ্কার করেন। সমকোণী ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় যে উপপাদ্যটি পীথাগোরাসের নাম বহন করে—সেটি কিন্তু মিশরীয়রা প্রায় ১,৫০০ বৎসর পূর্বে এবং চীনারাও বহু পূর্বে জানত। হিন্দুরাও পীথাগোরাসের আগেই উপপাদ্য জানতো। ক্ষেত্রফল এবং ঘনফলের বৈশিষ্ট্যগুলিও তিনি আবিষ্কার করেন। বাস্তাবিক পক্ষে, পীথাগোরাসই জ্যামিতিকে একটি নিখুঁত বিজ্ঞানের পর্য্যায়ে উন্নীত করেন।

হিপোক্রেটস্ (Hippocrates) : (460 খৃঃ পূঃ) তিনি গণিত সম্বন্ধে পুস্তক রচনা করেন। বৃত্তাঙ্কন ও বৃত্ত সম্বন্ধীয় উপপাদ্য প্রমাণ করার ব্যাপারে তিনি অগ্রণী ছিলেন। তিনি প্রথম প্রমাণ করেন—সমান সমান বৃত্তাংশে সমান সমান কোণ উৎপন্ন হয়। বিন্দু ও সরলরেখার সুনির্দিষ্ট পদ্ধতিতে সংজ্ঞা দেবার ব্যাপারে তাঁকে অনেকে পথিকৃৎ বলে থাকেন।

ইউক্লিড (Euclid) : ইউক্লিড ছিলেন মিশরের অধিবাসী। তিনি গণিতশাস্ত্র অধ্যয়ন করার জন্যই আলেকজান্দ্রিয়া আসেন এবং পরবর্তীকালে তিনি আলেকজান্দ্রিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ে গণিত বিভাগের প্রধান অধ্যাপকের পদ অলঙ্কৃত করেন। তিনি জ্যামিতি সম্বন্ধে Element নামক একটি পুস্তক রচনা করেন। তাঁর এই পুস্তকে তিনি জ্যামিতিক পদ্ধতিতে বীজগণিত আলোচনা ক'রেছেন। ইউক্লিড অবশ্য জ্যোতির্বিজ্ঞান ও সঙ্গীত সম্বন্ধেও পুস্তক রচনা ক'রেছেন।

আর্কিমিডিস (Archimedes) : ইনি ছিলেন সিসিলীর অধিবাসী এবং পড়াশুনা করার জন্য তিনি আলেকজান্দ্রিয়া আসেন। আর্কিমিডিসের গল্প প্রায় সকলেরই জানা আছে। তাঁর সময়ে গণিতে যে সমস্ত শাখার প্রচলন ছিল—তিনি তার প্রায় সবগুলির উপরই পুস্তক রচনা করেন। তবে জ্যামিতির ক্ষেত্রে তাঁর কৃতিত্বই সর্বাধিক। তিনি প্রমাণ করেন যে একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল—একটি সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান—যে ত্রিভুজের ভূমি বৃত্তটির পরিধির সমান এবং যার উচ্চতা বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের সমান। যদি ব্যাসার্দ্ধ a ধরা হয়, তবে বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}a \times 2\pi a$. তাছাড়া তিনি প্রমাণ করেন—বৃত্তের ক্ষেত্রফল ও ব্যাসের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অনুপাত হ'ল 11 : 14 (আনুঃ)

অ্যাপোলোনিয়াস (Apollonius) :—অ্যাপোলোনিয়াস বিখ্যাত ছিলেন

শাঙ্কব জ্যামিতির জন্য (conic geometry)। তিনিই 'Ellipse, 'Parabola, Hyperbola এই সমস্ত নামগুলি প্রচলন করেন। অ্যাপোলোনিয়াসের সময়ই এবং তাঁর অবদানের জন্য গ্রীস দেশে গণিতের উন্নতি চরমে ওঠে।

ডায়োফ্যান্টাস (Diophantus): আলেকজান্দ্রিয়ার গণিত জগতের শেষ বিখ্যাত গণিতবিদ হ'লেন ডায়োফ্যান্টাস। খৃঃ পূঃ ৩য় শতকে তিনি জীবিত ছিলেন। তাঁকে ত্রিকোণমিতির জনক বলা যেতে পারে। তিনি বিভিন্ন কোণের একটি তালিকাও প্রণয়ন করেন। তিনি Arithmetica নামক একটি গ্রন্থ রচনা করেন যদিও গ্রন্থটির আলোচ্য বিষয় ছিল বীজগণিত।

এরপর গণিতের ইতিহাসকে **তিনটি স্তরে** ভাগ করা যায়।

প্রথম স্তর হ'ল:—খৃষ্টীয় ৪র্থ থেকে ষোড়শ শতাব্দী পর্যন্ত,

দ্বিতীয় স্তর হ'ল:—সপ্তদশ শতাব্দী থেকে আধুনিক যুগের পূর্ব পর্যন্ত।

তৃতীয় স্তর হ'ল:—আধুনিক যুগ।

প্রথম স্তর: এই স্তরের প্রথমেই বলতে হয় রোমানদের কথা। রোমানরা ছিল অত্যন্ত কর্ম-দক্ষ জাতি। তাঁরাই প্রথম গণিতের জ্ঞানকে ব্যবহারিক ক্ষেত্রে প্রয়োগ করেন। গণিতের সাহায্যে তাঁরা জমি জরীপ ক'রতেন এবং বাড়ী তৈরী ক'রতেন। তাঁরা গণিতকে বিশুদ্ধ (Pure) এবং ফলিত (Applied) এই দু'ভাগে ভাগ করেন। তাঁদের নিজস্ব সংখ্যাসারি ছিল—যে সংখ্যাগুলি আসলে বর্ণ (letters)। যেমন I, V, X, L, C, D, M, ইত্যাদি। রোমানদের প্রচলিত সংখ্যাসারি এখনও বহুক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়।

বর্বর আক্রমণের ফলে রোম সাম্রাজ্যের পতন হয়। আনুমানিক পাঁচ শত খৃষ্টাব্দে গণিত সম্বন্ধে গবেষণার কেন্দ্রস্থল হ'য়ে ওঠে ভারতবর্ষ। এর প্রায় চারশত বৎসর পরে এই কেন্দ্র সরে চলে যায় মেসোপটেমিয়াতে। পঞ্চদশ বা ষোড়শ শতাব্দী পর্যন্ত ভারতবর্ষই ছিল গণিত সম্বন্ধে বিভিন্ন গবেষণা ও আবিষ্কারের ক্ষেত্রে অগ্রণী। এখান থেকেই সমস্ত পৃথিবী দশমিক প্রথা ও শূন্য সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করে। তবে দুঃখের বিষয়; ভারতবর্ষের এই সমস্ত আবিষ্কার কিভাবে অন্য দেশে চলে যায় এবং যে ভারতবর্ষ গণিতে একদিন শীর্ষস্থান অধিকার ক'রেছিল, সেই ভারতবর্ষকেই অন্য দেশ থেকে গণিতের তত্ত্ব শিক্ষা ক'রতে হয়। যাই হোক্ ভারতবর্ষের শীর্ষস্থানীয় গণিতবিদ্‌দের মধ্যে নিম্নোক্তদের নাম উল্লেখযোগ্য।

১। **আর্য-ভট্ট (Arya Bhatta)** ইনি আনুমানিক ষষ্ঠ শতকে জীবিত ছিলেন। তার প্রধান কাজগুলিকে চার ভাগে ভাগ করা হয়। এইগুলির মধ্যে

তিন ভাগই হ'ল জ্যোতির্বিজ্ঞান সম্বন্ধীয়। চতুর্থ ভাগে আছে পাটীগণিত। বীজগণিত ও জ্যামিতি সম্বন্ধীয় তেত্রিশটি নিয়ম। বীজগণিতে Series, linear এবং quadratic equation তিনি প্রচলন করেন। দশমিক পদ্ধতিও তাঁরা অজানা ছিল না বলেই মনে হয়। বর্গমূল নির্ণেয়ের একটি নিয়মও তিনি আবিষ্কার করেন। তিনি π এর মান যে 3·1416, তা প্রমাণ করেন।

২। **ব্রহ্মগুপ্ত (Brahmagupta)** ঃ তিনি পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতি সংক্রান্ত একটি পুস্তক রচনা করেন। জ্যোতির্বিজ্ঞানে তিনি প্রথম বীজগণিত প্রয়োগ করেন। ঋণাত্মক রাশি-সংক্রান্ত নিয়মও তিনি প্রথম প্রবর্ত্তন করেন। $x^2+px+q=0$, এই জাতীয় সমীকরণের সমাধানের একটি নিয়ম তিনি আবিষ্কার করেন।

এঁর পর উত্তর ভারতে গণিতের চর্চা বেশ কমে যায়। তার প্রায় দুইশত বৎসর পরে, দক্ষিণ ভারতে আবার ব্যাপকভাবে গণিত চর্চা শুরু হয়।

৩। **মহাবীর (Mahavira)** ঃ ইনি আনুঃ ৮৫০ খৃষ্টাব্দে জীবিত ছিলেন। তিনি তৎকালীন প্রচলিত গণিতকে উন্নত করার জন্য প্রভূত পরিশ্রম করেন। তিনি শূন্য (zero) সম্বন্ধে কতকগুলি মূল্যবান নিয়ম লিপিবদ্ধ ক'রে যান। যেমন ঃ কোন রাশিকে শূন্য দিয়ে গুণ ক'রলে গুণফলও শূন্য হবে। শূন্য দ্বারা ভাগ ক'রলে, শূন্য যোগ ক'রলে বা শূন্য বাদ দিলে রাশিটির কোন পবিবর্তন হয় না।

গুণ পদ্ধতিতে ভাগের উত্তর মিল করার পদ্ধতি বা ভগ্নাংশের ভাগে গুণ পদ্ধতির সাহায্য নেওয়া (যেমন $\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}$) তিনিই প্রথম প্রচলন করেন। এই নিয়মটি ইউরোপের অধিবাসীদের ষোড়শ শতাব্দী পর্য্যন্ত অজানা ছিল। তিনি Quadratic equation সম্বন্ধেও অনেক গবেষণা করেন।

৪। **ভাস্কর (Bhaskara)** ভাস্কর যতদূর সম্ভব ১১০০ খৃষ্টাব্দে জীবিত ছিলেন। তাঁকে সেই সময় সবচেয়ে জ্ঞানী ব্যক্তি বলা হ"ত। ভাস্কর উজ্জয়িনীতে পড়াশুনা করেন। তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থের নাম হ'ল—**লীলাবতী**। এই পুস্তকটি প্রধানতঃ পাটীগণিত ও পরিমিতি সম্বন্ধীয়। তা ছাড়াও এতে কিছু কিছু বীজগণিতের আলোচনাও ছিল। লীলাবতীতে যথেষ্ট '0' র ব্যবহার দেখা যায়। তাছাড়া দশমিক সংখ্যার ব্যবহারও তাতে ছিল। তিনি দিক নির্দেশক সংখ্যা, ঋণাত্মক রাশি, অজানা সংখ্যা, quadratic equation ইত্যাদি নিয়েও যথেষ্ট গবেষণা করেন।

হিন্দু গণিতবিদ্‌দের দু'টি বিখ্যাত অবদান হ'ল—0 (শূন্য) ও দশমিক পদ্ধতি। 0 কে বলা হয় শূন্য (শূন্য স্থান অর্থাৎ কিছু নেই বা কিছু নয়)। প্রকৃত পক্ষে ইহা

নামকরণের সঙ্গে তৎকালীন দর্শনের একটা বিশেষ যোগসূত্র ছিল। যাই হোক এই শূন্য আবিষ্কৃত না হ'লে সংখ্যা ব্যবহারে যথেষ্ট অসুবিধা হ'ত। শূন্য আবিষ্কারের জন্যই সংখ্যার ব্যবহার এত সহজ হ'য়েছে। তেমনি দশমিক পদ্ধতি প্রচলিত হওয়ার সঙ্গে সঙ্গে দশগুণ, শতগুণ, সহস্রগুণ বা দশাংশ, শতাংশ, সহস্রাংশ প্রভৃতি নির্ণয় করা সম্ভব হ'য়েছে। এক কথায়, কোন সংখ্যার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করার জন্য দশমিক পদ্ধতির প্রয়োগ অপরিহার্য।

আরবদের বলা হয় গণিত সম্বন্ধে জ্ঞানের বাহক। তারা নিজেরা যতটা আবিষ্কার ক'রেছে তার থেকে বেশী তারা এক দেশের আবিষ্কার অন্য দেশে বহন ক'রে নিয়ে গেছে। গ্রীস দেশে গণিতের যে চর্চা হ'য়েছিল, তা সংরক্ষিত ছিল আরবদের কাছে। যথাসময়ে তারা তা বহন ক'রে নিয়ে যায় ইউরোপে। তেমনি যখন তারা ভারতবর্ষে আসে তখন ভাতবর্ষের গবেষণা লব্ধ জ্ঞান তারা বহন ক'রে নিয়ে যায় নিজেদের দেশে এবং কালক্রমে সেখান থেকে চলে যায় ইউরোপ।

মধ্যযুগে ধর্মযুদ্ধ প্রচলিত ছিল। সেই সময় সমগ্র ইউরোপ থেকে তুর্কীদের হাত থেকে পবিত্র ভূমি প্যালেষ্টাইনকে রক্ষা করার জন্য সৈন্যদল আসতে শুরু করে। তাদের যাত্রা পথে পড়ে ভূমধ্যসাগর। যখন তারা ইউরোপ থেকে ইটালীর দিকে অগ্রসর হ'তো তখন ভেনিস্, জেনোয়া প্রভৃতি ইটালীর বিখ্যাত বন্দরে তাদের অবস্থান ক'রতে হ'তো। এর ফলে ঐ বন্দরগুলি ব্যবসা বাণিজ্যের কেন্দ্র হিসাবে গ'ড়ে ওঠে। এর জন্যই, অর্থাৎ ব্যবসা-সংক্রান্ত হিসাব-পত্রের জন্যই আরবী ও ইটালীয় গণিতবিদ্দের মধ্যে একটা সমন্বয় স্থাপিত হয়। এই সময়কার বিখ্যাত গণিতবিদ্ হ'লেন—

Leonardo Fibonacci—ইনি ১২২৮ খৃঃ অব্দে একখানি পুস্তক রচনা করেন। এই পুস্তকের সাহায্যেই ইউরোপ সর্বপ্রথম দশমিক পদ্ধতি প্রচার করা হয়। তিনি Practical Geometry নামক আর একটি পুস্তকও রচনা করেন। $x^2 - y^2 = z^2$ এই জাতীয় সমাধানের প্রচলন তাঁর সময়েই হয়।

Francois Vieta :—ষোড়শ শতাব্দীর একজন বিখ্যাত ফরাসী গণিতবিদ। ইনি প্রধানতঃ বীজগণিত ও জ্যামিতির উপর পুস্তক প্রণয়ন করেন।

John Napier :—জন নেপিয়ারের জন্ম এডিনবরাতে ১৫৮০ খৃঃ অব্দে। তিনি ছিলেন একজন পদার্থবিজ্ঞানী ইন্‌জিনিয়ার। আধুনিক লগারিথমের তিনিই জনক। আসলে logarith শব্দের অর্থ হ'ল আনুপাতিক সংখ্যা, Logarithm এর মূলকে (base) এখনও Napier এর নামের অনুসারে Napierian base বলা হয়।

দ্বিতীয় স্তর :—খৃষ্টীয় সপ্তদশ শতাব্দী থেকেই গণিতের বহুমুখী বৃদ্ধি ও প্রসার লক্ষ্য করা যায়। ছাপাখানার উদ্ভব হওয়ার সঙ্গে সঙ্গে গণিতের অত্যন্ত দ্রুত প্রসার ঘটতে দেখা যায়। তাছাড়া বিভিন্ন ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার অবশ্যম্ভাবী হ'য়ে পড়ার জন্য গণিতের ক্ষেত্রে নূতন নূতন গবেষণার প্রয়োজনও অনুভূত হ'য়েছিল। গণিত সম্বন্ধে বিভিন্ন প্রয়োজনীয় যন্ত্রপাতিও আবিষ্কৃত হয়। এই স্তরেই গণিতের বিভিন্ন শাখা প্রশাখা সমানভাবে উন্নত হয়।

এই সময়ের বিখ্যাত গণিতবিদদের মধ্যে অন্যতম হ'লেন Galileo, Kepler (1571-1630), Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665) Wallis (1616-1703), Pascal (1623-1662) Newton (1642-1727) প্রভৃতি। এঁদের উল্লেখযোগ্য অবদান হ'ল :—

Galileo :—পেণ্ডুলাম ঘড়ি আবিষ্কার, hydrostatic balance, বলবিদ্যা, (Mechanics), শক্তি ও গতি সম্বন্ধীয় নিয়মাবলী।

Kepler :—গ্রহের গতি (Astronomy), আয়তন নির্ণয়।

Descartes :—Analytical Geometry (Algebra + Geometry) বীজগণিতে জ্যামিতির প্রয়োগ, চিহ্নের (Signs) নিয়মাবলী।

Fermat :—Theory of Numbers, Geometry, Problems on Probability.

Wallis :— Infinite Series, Calculus.

Pascal :—জ্যামিতি-শাঙ্কব জ্যামিতি।

Newton :—মাধ্যাকর্ষণ, সাদা আলোর রং নির্ণয়, Binomial Theorem ; Principia নামক একখানি পুস্তক তিনি রচনা করেন। তাঁর বিখ্যাত আবিষ্কার হ'ল নিরন্তর পরিবর্ত্তনশীল সংখ্যার পরিবর্ত্তনের হার (fluxion), স্বচ্ছন্দগতিবিশিষ্ট সংখ্যা (flueuts), differential এবং Integral Calculus.

তৃতীয় স্তর :—আধুনিক যুগে উন্নতস্তরের গণিত বলতে যা বোঝায় (higher-mathematics) তার চর্চাই বেশী হ'য়েছে। গণিতের দু'টি শাখাকে পৃথক ক'রে নিয়ে দু'টি শাখাতেই ব্যাপক গবেষণা চালানো হ'চ্ছে এখনও। একটি শাখা হ'ল ; বিশুদ্ধ গণিতের শাখা যেটি তত্ত্বমূলক। অপরটি হ'ল ফলিত গণিত যেটি ব্যবহারমূলক, অর্থাৎ যে শাখাটির অন্য বিষয়ের ক্ষেত্রে বা ব্যবহারিক জীবনে প্রয়োগ করার প্রয়োজনীয়তা আছে। যাই হোক্ যাঁদের গবেষণার ফলে উন্নত স্তরের গণিত উন্নততর হয়েছে, তাঁদের নাম ও অবদান সংক্ষেপে উল্লেখ করা হ'ল।

Leonhard Euler (1707-1783)—গাণিতিক বিশ্লেষণ, difference Calculus এর উপর পূর্ণাঙ্গ পাঠ্যপুস্তক প্রণয়ন।

Laplace : মধ্যাকর্ষণ ব্যাখ্যা করার ক্ষেত্রে ক্যালকুলাসের প্রয়োগ, Calcnlus of Probabilityর সৃষ্টি।

G. D. Birkhoff (1884-1944) :—General dynamics, theory of orbits, Point-set Theory, বহু বিস্তার (dimension) বিশিষ্ট ক্ষেত্রের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়। তিনি আপেক্ষিক তত্ত্ব সম্বন্ধেও দুটি পুস্তক রচনা করেন।

C. H. Hardy (1877-1947) :—বিশ্লেষণ ও পাটীগণিত সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান। বহু বিভিন্ন জাতীয় পাঠ্যপুস্তক প্রণেতা, Convergence and Summability of Series, inequalities, analytic theory of numbers প্রভৃতি বিষয়ে তাঁর অবদান প্রচুর। হার্ডির মতে, চিত্রকর বা কবির মত গণিতবিদ একজন শিল্পী। তবে শেষোক্ত শিল্পীর শিল্প কাজ চিরস্থায়ী না হলেও দীর্ঘস্থায়ী ; শিল্পীদের সকলকেই একটা বিশেষ নিয়ম মেনে চলতে হয়। গণিতের ক্ষেত্রে এই নিয়ম একটু কঠিন হ'লেও নিয়মটির সুষম বিকাশের জন্য সেটি সুন্দর হওয়া চাই—আর তা সুষ্ঠুভাবে পালিত হওয়া চাই।

শ্রীনিবাস রামানুজন (Srinivasa Ramanujan 1887-1920) :—বিচিত্র জীবনের অধিকারী শ্রীনিবাস রামানুজন গণিত জগতে এক বিস্ময়কর প্রতিভা। এক মধ্যবিত্ত ব্রাহ্মণ বংশে তাঁর জন্ম। মাত্র ১৬ বৎসর বয়সে তিনি ম্যাট্রিক পাশ করেন। কলেজে পড়ার সময় তিনি খুব একটা কৃতিত্বের পরিচয় দিতে পারেননি। সাংসারিক অবস্থা বেশ সচ্ছল ছিল না বলে চাকুরীর প্রয়োজনে ও খাতিরে১৯০৯ সালে তিনি বিবাহ ক'রতে বাধ্য হন। মাদ্রাজ পোর্ট ট্রাস্টে একজন সাধারণ কেরানীরূপে তাঁর কর্মজীবন শুরু হয়। কিন্তু তখন থেকে তিনি গণিতের বিভিন্ন ক্ষেত্রে ব্যাপক গবেষণা শুরু করেন। তাঁর প্রথম দিকের গবেষণাগুলি Journal of the Indian Mathematical Societyতে প্রকাশিত হ'ত। তাঁর প্রবন্ধ 'Some Properties of Bernoullis Numbers' উচ্চ প্রশংসিত হ'য়েছিল। Madras Port Trust এর চেয়ারম্যানের সহায়তায় তিনি বিখ্যাত গণিতবিদ্ C. H, Hardyর সঙ্গে যোগাযোগ ক'রতে সমর্থ হন। এর পর স্কলারশিপ নিয়ে তিনি ইংল্যাণ্ড যাত্রা করেন এবং Hardyর অধীনে গবেষণা শুরু করেন।

Modular equation, theorem of complex mnltiplications c.ntinued fractions প্রভৃতি বিষয়ে তাঁর সমকক্ষ কেউ আর ইংল্যাণ্ডে ছিলেন

না। হার্ডি তাঁর উচ্ছ্বসিত প্রশংসা ক'রেছেন। তিনি পাঁচ বৎসর ইংল্যাণ্ডে ছিলেন এবং সেখানকার Ryoal Societyর সদস্য নির্বাচিত হ'য়েছিলেন। তিনি Trinity Fellowship এর জন্যও নির্বাচিত হ'য়েছিলেন। মাত্র তেত্রিশ বৎসর বয়সে টি. বি. রোগে এই তরুণ ও প্রতিভাবান্ গাণতবিদের জীবনাবসান হয়।

গণিতের ইতিহাসের গুরুত্ব :—শিশুর বয়োবৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে সে যে সমস্ত শারীরিক ও মানসিক স্তর অতিক্রম করে, সেগুলি পৃথিবী সৃষ্টি হবার পর মানব জাতির জীবনবিকাশের স্তরের অনুরূপ, কিন্তু একটা পার্থক্য আছে। মানব-জাতীর সর্বাঙ্গীন বিকাশের জন্য প্রয়োজন হয়েছিল হাজার হাজার বছরের, কিন্তু শিশুকে খুব কম সময়ের মধ্যে ঐ সমস্ত স্তরগুলি অতিক্রম করতে হয়। গণিত শিখনের সময় এ সত্যটি মনে রাখতে হবে। শিশুর স্বাভাবিক এবং সুসমঞ্জস বৃদ্ধির যেন কোন প্রকারে পরিবর্তন না হয়। এই বৃদ্ধির স্বাভাবিক বিকাশটি বাধাপ্রাপ্ত হলে শিশুর ব্যক্তিসত্তা পুরোপুরি গড়ে উঠতে পারে না। শিশুর প্রকৃতি অনুসারে শিশুর বৃদ্ধি পরিচালিত করতে হবে।

শুনতে আশ্চর্য্য লাগে, গণিতের বৃদ্ধি বা ক্রমবিকাশ শিশুর মানসিক বিকাশের অনুরূপ। গণিতের ইতিহাস সেদিক দিয়ে শিশুর মানসিক বৃদ্ধিকে সাহায্য করে এবং শিক্ষকের পাঠ-পরিকল্পনা ও পাঠদান কার্য্যে সাহায্য করে। তাছাড়া গণিতের ইতিহাস শিখণ আর এক দিয়ে গুরুত্বপূর্ণ। গণিতের ইতিহাস থেকেই জানতে পারা যায় শিশুকে গণিত শিক্ষা দিতে হ'লে কোন কোন্ স্তরের মধ্য দিয়ে যেতে হবে।

এমন একদিন ছিল যেদিন মানুষ গণনা করতে জানত না। এক, দুই, তিন ইত্যাদি করে তারা গণনা ক'রতে পারত না। কিন্তু কোন বিশেষ একটি জিনিস যে একটি জিনিস, তা তারা বুঝতে পারত। ক্রমশঃ তারা একটি জিনিসের সঙ্গে একাধিক পার্থক্য বুঝতে শিখল। কিন্তু তখন তাদের এই বোধটিও ছিল না যে এক আর একে দুই হয়। সংখ্যাগুলির বিশেষ কোন নামও ছিল না। তখনকার দিনে মেষপালনের প্রথা প্রচলিত ছিল। মেষপালককে তার কটি মেষ আছে জিজ্ঞাসা করলে সে চট্ করে উত্তর দিতে পারত না। সে প্রতিটি মেষের জন্য একটি করে নুড়ি পাথর রাখত। যখন তাকে জিজ্ঞাসা করা হত তোমার ক'টি মেষ আছে? তখন সে সব নুড়িগুলি দেখিয়ে বলত—আমার এতগুলি মেষ আছে। পরে যখন মেষের সংখ্যা অনেক বেড়ে গেল, তখন একটি মেষের জন্য একএকটি নুড়ি রাখতে গেলে নুড়ির সংখ্যা অনেক বেশী হ'ত, । তাই এক এক দল মেষের জন্য একটি করে নুড়ি রাখা হ'ত, হয়তো দুই মেষের জন্য একটি নুড়ি রাখা হ'ল। যখন দশটি মেষ বোঝাবার জন্য

সে পাঁচটি নুড়ি দেখাত—কিন্তু বলত না পাঁচ জোড়া মেষ আছে। কাজেই দেখা যাচ্ছে প্রথম অবস্থাতে কেবল চোখে দেখে সংখ্যার কম-বেশী নির্ণয় ক'রা হ'ত। এর জন্য কোন যুক্তি তারা দেখাতে পারত না। কিন্তু এ অবস্থা বেশীদিন চলল না। শীঘ্রই যুক্তির প্রয়োজন দেখা দিল। যে মেষের সংখ্যা এতদিন নুড়ির সাহায্যে নির্ণয় করা হ'ত—এবার তা সংখ্যার সাহায্যে নির্ণয় করার ব্যবস্থা করা হ'ল। ক্রমে ক্রমে সংখ্যাগুলির বিশেষ নামও আবিষ্কৃত হ'ল। ছোট-বড় বিভিন্ন দল স্থির করে সংখ্যাগুলির ভিন্ন ভিন্ন নাম দেওয়া হ'ল। এখনও দল-অনুযায়ী সংখ্যার নাম স্থির করার প্রথাটি প্রচলিত আছে। আমরা এখনও জোড়া, দশ, কুড়ি, শ' হাজার ইত্যাদি দলগত নাম ব্যবহার করে থাকি।

গণিতের ইতিহাস পর্য্যালোচনা ক'রলে মানুষ কিভাবে গণিতের জ্ঞান অর্জন ক'রল, তার বিভিন্ন স্তরের একটি পরিচয় পাওয়া যায়। সেই স্তরগুলি হ'ল—

১। চোখে দেখে মূর্ত্ত জিনিস সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা।

২। মূর্ত্ত জিনিসের সাহায্যে মূর্ত্ত জিনিসের সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা।

৩। জিনিসগুলিকে কতকগুলি দলে ভাগ ক'রে কতকগুলি মূর্ত্ত জিনিসের সাহায্যে সেই দলগুলির সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা।

৪। সংখ্যাগুলির নাম স্থির করা।

৫। ছোট এবং বড় দল স্থির করে নাম দেওয়া।

৬। সংখ্যাগুলির বিশেষ বিশেষ নামের সাহায্যে গণনা করা।

৭। বিমূর্ত্ত সংখ্যা গণনা করা।

ছাত্রদিগকে এই স্তরগুলি অনুসরণ ক'রে গণিত শিক্ষা দিতে হবে। এর জন্য নিম্নোক্ত সাধারণ নিয়মগুলি মনে রাখতে হবে।

১। প্রথমেই সংখ্যাটির বিশেষ নামটি ছাত্রকে না শিখিয়ে সংখ্যাটি সম্বন্ধে তা'কে একটা ধারণা দিতে হবে। যখন সে 'এক' বা 'দুই' বলে—তখন তার অর্থ তা'কে আগে বুঝতে হবে। তোতাপাখীর মত এক, দুই, তিন—এর অর্থ না বুঝে পুনরাবৃত্তি করা নিরর্থক।

২। প্রথমে মূর্ত্ত জিনিসের সাহায্যে ছাত্রকে গণনা করতে শেখান হবে, তারপর বিমূর্ত্ত সংখ্যা ব্যবহার করা উচিত।

৩। সেইরূপে ছাত্রকে প্রথমে এককভাবে গণনা ক'রতে শিক্ষা দিয়ে তারপর দলগতভাবে গণনা ক'রতে শিক্ষা দেওয়া উচিত।

গণিত শিক্ষা দেবার সময় পূর্বোক্ত স্তরগুলির কথা বিশেষভাবে মনে রাখতে হবে। প্রতিটি স্তর অনুযায়ী শিক্ষা দিলে তা যথেষ্ট কার্য্যকরী হয়। দু-একটি স্তর হয়তো বাদ দেওয়া যেতে পারে কিন্তু এদের বিন্যাসটি ওলট-পালট করা উচিত নয়। যেভাবে স্তর বিন্যাসের কথা বলা হয়েছে—সেটি হল স্বাভাবিক বিন্যাস।

সংখ্যা গণনা করতে শেখার জন্য মানুষের কয়েক সহস্র বছরের প্রয়োজন হয়েছিল। আবার সংখ্যাগুলি কি ভাবে লেখা হবে, তা নির্ণয় করতে লেগেছে আরও কয়েক সহস্র বছর। কিসে লেখা হবে তাও স্থির করা সম্ভব হয় নি প্রথম অবস্থাতে। সভ্যতার প্রথম প্রত্যুষে দেখা যায় মানুষ গাছের ছালে চিহ্নের সাহায্যে সংখ্যা খোদাই করে রাখতো। মিশরবাসীরাও দাগ কেটে সংখ্যা প্রকাশ করতো। আমাদের শৈশব অবস্থাতে বৃদ্ধাদের দেখেছি দেওয়ালে দাগ কেটে গোয়ালার দুধের হিসেব রাখতে। তাঁরা লেখাপড়া বিশেষ জানতেন না বটে, কিন্তু দাগ কেটে হিসেব করা হলেও সে হিসাবে কোনদিন ভুল হ'ত না। আবার গ্রামে দেখেছি চাষীরা ধান মাপ ক'রে এক একটি মাপের জন্য একটি করে পাথর বা ইটের টুকরো রাখে। পরে সমস্ত ধান মাপ করা হয়ে গেলে পাথরের সাহায্যে মোট ধানের পরিমাণ ঠিক করে। এ দুটিই হ'ল গণনা করার প্রথম দিকের কৌশল। যাই হোক প্রাচীন পদ্ধতিতে দাগ কেটে গণনা করার সময় মানুষ দেখল এই পদ্ধতিতে খুব বড় সংখ্যা লেখা সম্ভব নয়। তখন বড় সংখ্যাকে ছোট চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ করার চেষ্টা চলতে লাগল। আমরা এখনও রোমান্ চিহ্ন ব্যবহার করে থাকি। I, II, III, IV, V, X, C (=100), M (=1000), L (=50) এখনও ব্যবহৃত হয়। রোমানরা কোন বড় সংখ্যার বাম দিকে একটি ছোট সংখ্যা বসিয়ে বিয়োগ করার পদ্ধতি আবিষ্কার করে, আবার ডানদিকে সংখ্যা থাকলে সেটি যোগ হবে এটিও তাদের আবিষ্কার। যেমন XL (=50−10), LX (50+10) ইত্যাদি। রোমানরা হাতের আঙ্গুলের সাহায্যে পাঁচ ও দশটি জিনিসের দল প্রকাশ করত। বিভিন্ন দল বিভিন্ন প্রতীক বা চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ করা হ'ত। তবে প্রতীকগুলির অর্থ ঠিকমত বুঝে তারপর সংখ্যাটি লিখতে অনেক সময় লাগত। যেমন যদি M C ML X1X এর বদলে কি সংখ্যা হবে তা প্রকাশ করতে বলা হয় তবে এটি যে 1969 (M=1000, CM=900, LX=60. IX=9) তা নির্ণয় করতে বেশ বেগ পেতে হয়। গণনার সুবিধার জন্যই abacus এর উদ্ভব। এখনও বিভিন্ন দেশে ছেলে-মেয়েদের এর সাহায্যে গণনা ক'রতে শেখান হয়।

সংখ্যা বলতে প্রথমে শূন্যকে (0, Zero) কিন্তু বোঝাত না। সংখ্যা আবিষ্কারের

অনেক পরে '0', আর তার অনেক পরে দশমিক পদ্ধতি আবিষ্কৃত হয়। 1612 খৃষ্টাব্দে John Napier লগারিথমের সাহায্যে বড় বড় গুণ ও ভাগ করার পদ্ধতি আবিষ্কার করেন। পরে Briggs এই পদ্ধতির আরো উন্নতি সাধন করেন। 1637 খৃষ্টাব্দে Rene Descartes নামক একজন ফরাসী গণিতবিদ Analytical Geometryর ক্ষেত্রে নূতন দিগন্ত বিস্তার করেন। Fermat অথবা Leibuitz এবং Newton—এই তিনজনের মধ্যে কে প্রথম Differential এবং Integral calculus আবিষ্কার করেন; সে বিষয়ে মতবিরোধ আছে। তবে একথা ঠিক যে তিনজনে প্রায় একই জিনিস আবিষ্কার করেন। এই প্রসঙ্গে বলা যেতে পারে গণিতের উন্নতিকল্পে ভারতবাসীদের অবদানও বিশেষ কম নয়। স্বদেশবাসীদের গণিত সম্বন্ধে অবদানের কথা জানতে পারলে ছাত্ররাও স্বদেশের সম্মানের জন্য গণিতের ক্ষেত্রে নূতন একটা কিছু আবিষ্কার করার চেষ্টা ক'রতে পারে। এটাও কম আশার বা আনন্দের কথা নয়।

যাই হোক্, এইবার দেখা যাক্ মাধ্যমিক স্কুলগুলিতে গণিতের ইতিহাস শিক্ষা দেওয়ার ফলে কি সুফল পাওয়া যেতে পারে।

গণিতের ইতিহাসের মূল্য :—গণিতের বর্তমান পাঠক্রমে এর ইতিহাসের কোন স্থান নেই। বলতে গেলে গণিতের ইতিহাসটিকে অবহেলা করাই হয়েছে। এটি না পড়ানোর জন্য যে যুক্তি দেওয়া হয় তা হ'ল গণিতের পাঠক্রমের অস্বাভাবিক দীর্ঘ ও জটিল আকৃতি। গণিতের ইতিহাস বাদ দিয়েও যে পাঠক্রম নির্দিষ্ট আছে তা শেষ ক'রতে যথেষ্ট সময় লাগে। গণিতের ইতিহাস যদি পড়াতে হয়, তবে নির্দিষ্ট সময়ে পাঠক্রমটি শেষ করা সম্ভব হবে না। সেইজন্য বিষয়টি মাধ্যমিক স্তরে বা স্নাতক পর্য্যায়ে পড়ানো হয় না। স্নাতকোত্তর পর্য্যায়ে এই সম্বন্ধে কিছু আলোচনা হয়ে থাকে। অথচ মাধ্যমিক স্তরে এই ইতিহাস পাঠের ব্যবস্থা রাখলে যে বিশেষ সুফল পাওয়া যাবে, সে বিষয়ে আমরা দৃষ্টি দিই না। যাই হোক্, গণিতের ইতিহাস শিক্ষা দিলে কি কি মূল্য অর্জিত হ'তে পারে, এখন সে সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক্ :—

১। গণিতের ইতিহাস পাঠের ফলে ছাত্ররা বুঝতে পারে যে গণিত একটি প্রগতিধর্মী গতিশীল বিষয় এবং মানবিক আগ্রহ ও প্রয়োজনে পূর্ণ।

২। গণিতের অনেক কঠিন অধ্যায় এর ইতিহাস পাঠের ফলে সহজ ভাবে উপস্থাপিত করা সম্ভব। গণিতের আপাত-নীরস বিষয়বস্তুর মধ্যেও ছাত্ররা রস আস্বাদন ক'রতে পারে।

৩। এই ইতিহাস পাঠের ফলে ছাত্ররা গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগের

পরিচয় পায়। তারা বুঝতে পারে যে মানুষ নিজের প্রয়োজনেই গণিত আবিষ্কার ক'রেছে। এটা একটা আকস্মিক দুর্ঘটনা জাত বিষয় নয়।

৪। গণিতের অনেক পদ (term), নাম বা ধারণা এর ইতিহাসের সঙ্গে ঘনিষ্ঠভাবে যুক্ত। এইগুলি বুঝতে হ'লে গণিতের ইতিহাস জানা একান্ত প্রয়োজন।

৫। উপযুক্ত চিত্র, উদাহরণ সহযোগে গণিতের ইতিহাস শিক্ষা দিলে ছাত্রদের আগ্রহ বৃদ্ধি পায়।

৬। গণিত যে একটি বিচ্ছিন্ন বিষয় নয়, এর সঙ্গে যে আরো অনেক বিষয়ের যোগ আছে তা গণিতের ইতিহাস পাঠ ক'রলে ভালোভাবে জানা যায়।

৭। শিশুরা তাদের পূর্ব-পুরুষদের অতীত কৃতিত্বের কথা শুনতে ভালোবাসে। তাদের মনে এই সময় 'বীরপূজা' করার একটা প্রবণতা দেখা যায়। সেদিক দিয়ে গণিতের ইতিহাস মানবজাতীর অতীত কীর্তি ও গৌরবময় কৃতিত্বের সঙ্গে ছাত্রদের পরিচিত করে।

৮। গণিতের ইতিহাস শিশুকে জানিয়ে দেয় যে গণিত একটি মানব সৃষ্ট বিজ্ঞান। কোন দৈবশক্তি এর পশ্চাতে কাজ ক'রে না। ফলে ছাত্ররা নিজে কিছু আবিষ্কার করার একটা প্রবণতা অনুভব করে।

৯। গণিতের ইতিহাস থেকে জানা যায় যে গণিতের বিভিন্ন শাখার মধ্যে একটি সম্বন্ধ আছে। এর ফলে কোন একটি বিশেষ শাখাতে বিশেষজ্ঞ হবার অপ্রয়োজনীয় প্রচেষ্টা থেকে শিশুকে বিরত করা যায়।

১০। গণিতের ইতিহাস শিশুকে কোন ব্যাপারে দ্রুত সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা থেকে বিরত করে।

১১। গণিতের ইতিহাস থেকে গণিত শেখানোর বিভিন্ন স্তরগুলির সঠিক পরিচয় পাওয়া যায়। এই স্তর-বিন্যাস অনুযায়ী ছাত্রদের গণিত শিক্ষা দেওয়া প্রয়োজন। মানবজাতি যেভাবে সম্পূর্ণ অজ্ঞ অবস্থা থেকে ধীরে ধীরে গণিতের জ্ঞান অর্জন ক'রেছে, ঠিক সেই ভাবেই শিশুকে গণিত শিক্ষা দেওয়া উচিত। বিষয়টির ক্রমবিকাশ, প্রয়োজনীয়তা, সরলতা, পরীক্ষণমূলক দিক, ব্যবহারিক প্রয়োগ ইত্যাদির দিকে বিশেষ দৃষ্টি রাখা প্রয়োজন।

১২। শিক্ষক যদি সুষ্ঠুভাবে গণিতের ইতিহাস শিক্ষা দিতে পারেন, তবে ছাত্রের শিক্ষক সম্বন্ধে শ্রদ্ধা অনেক বেড়ে যায় তাঁর জ্ঞানের পরিমান দেখে। এর ফলে শ্রেণীতে শৃঙ্খলা বজায় রাখা তাঁর পক্ষে অনেক সহজ হয়।

দুঃখের বিষয়, গণিতের ইতিহাসের যথেষ্ট শিক্ষাগত মূল্য থাকা সত্ত্বেও বিদ্যালয়ের

পাঠক্রমে এটি শিক্ষা দেবার ব্যবস্থাই নেই। গণিতের কোন জটিল তত্ত্ব বা তথ্যের সম্পূর্ণ উপলব্ধির আগে সেটি সম্বন্ধে ছাত্রদের মনে একটা ধারণা সৃষ্টি করা প্রয়োজন। তত্ত্ব বা তথ্যের প্রমাণের সঙ্গে পরিচিত হবার আগে সেগুলির সঙ্গে সহজভাবে পরিচিত হওয়া প্রয়োজন। কোন বিষয় ভালোভাবে শিখতে হ'লে তার গোড়া থেকে শুরু করাই উচিত। এর জন্যই গণিতের ইতিহাস—যাকে আমরা গণিতের ভিত্তি বলতে পারি—সেটি ভালোভাবে জানা উচিত।

ভারতবর্ষে বর্তমানে একটা দারুণ নৈরাশ্যবাদ তার কালো ছায়া বিস্তার ক'রেছে। ছাত্রসমাজের উপরও তার একটা কুপ্রভাব পড়েছে। জীবনবোধের নিম্নতম মান সম্বন্ধে ধারণাও মনে হয় আমরা ভুলতে বসেছি। ছাত্রসমাজের কোন স্থির লক্ষ্য নেই, কোন মহান আদর্শ নেই। উপযুক্ত নেতৃত্বের অভাবে তারা বিপথগামী হচ্ছে। অথচ একটা মহান জাতির গৌরবময় কৃতিত্বের তারা যে ধারক এবং বাহক এ কথাটা তাদের মনে নেই। গণিতের ইতিহাস শিক্ষা দিলে তারা সেই মহান পূর্বপুরুষদের সঙ্গে পরিচিত হতে পারবে। বাঙ্গালীর একটা দুর্নাম আছে—তারা নাকি বড় বেশী আত্মবিস্মৃত জাতি। পূর্বপুরুষদের কীর্তির কথা ভুলে গেছি বলেই আজ আমাদের এই হীনমন্য ভাব, আমাদের সামনে হতাশার এই গাঢ় অন্ধকার। কিন্তু আমাদের উজ্জ্বল অতীতের আলোকে বর্তমানকে আলোকিত ক'রে ভবিষ্যতকে কি রঙ্গীন করে তুলতে পারি না ? এ দায়িত্ব শিক্ষক সমাজের।

গণিতের ইতিহাস শিক্ষা দিতে গিয়ে আর একটি বিষয়ের প্রতি লক্ষ্য রাখতে হবে। এই ইতিহাসের গতি সর্বত্র একমুখী নয়। আবার অগ্রগতিও মাঝে মাঝে বন্ধ হয়েছে। অর্থাৎ গণিতের চর্চা কখনও চরমে উঠেছে আবার কখনও বা সম্পূর্ণ বন্ধ হয়ে গেছে। আবার গণিত ইতিহাসের সমগ্র ইতিহাসও স্কুলের ছাত্রদের জানাবার কোন প্রয়োজন নেই। সেইজন্য এই ইতিহাসের সুনির্বাচিত অংশগুলিই ছাত্রদের সামনে উপস্থাপিত করা প্রয়োজন। সবশেষে Sarton এর দু'টি বিখ্যাত উক্তি দিয়ে বক্তব্যটি শেষকরা যাক্ :—

"The History of Mathematics should really be the kernel of the history of Civilization."

এবং

"The History of mathematics exhilarating, because it unfolds before us the visions of an endless series of victories of the human mind, victories without counter balancing dishonourable and humiliating failures and without atrocities."

———

গণিতে পাঠটীকা প্রস্তুতিকরণ

(Planning of Lessons)

গণিতে কোন পাঠ দিতে গেলে একটা পূর্ব পরিকল্পনার প্রয়োজন। উপযুক্ত পরিকল্পনার ফলে সময় এবং পরিশ্রমের অনেক সাশ্রয় হয়। এর জন্যে যে ফল পাওয়া যায়—তাও বেশ সন্তোষজনক হয়। পরিকল্পনা না থাকলে পাঠদানে কতকগুলি ত্রুটী দেখা যায়। পাঠের স্তরবিন্যাস উপযুক্ত হয় না, বিষয়বস্তুটি ছাত্রদের সামনে ঠিকমত উপস্থাপিত করা যায় না, নির্দিষ্ট পদ্ধতিতে পাঠ দেওয়া সম্ভব হয় না এবং পাঠদান কার্য্যটিকে বেশ সজীব ও প্রাণবন্ত ক'রে তোলা যায় না। এইজন্য পাঠদান কার্য্যে শিক্ষকের একটা পূর্ব-পরিকল্পনা অনুযায়ী নির্দিষ্ট পাঠটীকা প্রস্তুত করা একান্ত প্রয়োজন। এর জন্য শিক্ষকের পক্ষে একটা প্রস্তুতির প্রয়োজন। এখন সেই সম্বন্ধে সংক্ষেপে কিছু আলোচনা করা যাক।

শিক্ষকের প্রস্তুতি—

শ্রেণী-কক্ষে পাঠদানের উদ্দেশ্য হ'ল সহজভাবে ছাত্রদিগকে উপযুক্ত ও কার্য্যকরী জ্ঞান অর্জনের সহায়তা করা। এর জন্য শিক্ষকের একটি মুহূর্ত্তও অপব্যয় করা উচিত নয়। কোন শিক্ষকের পক্ষেই শ্রেণীর পাঠ উপযুক্ত ভাবে তৈরী না ক'রে শ্রেণীতে যাওয়া উচিত নয়। শিক্ষকের জ্ঞান ও অভিজ্ঞতা যথেষ্ট থাকতে পারে, কিন্তু তার স্মৃতির বিস্তার বা ক্ষমতা সীমাবদ্ধ। তাছাড়া ভুল করা মানুষের স্বাভাবিক ধর্ম। ঠিক সময়ে ঠিক জিনিসটি মনে না পড়লে যেমন সময়ের অপব্যয় হয়, তেমনি শ্রেণীতে শিক্ষকের মর্যাদাও ক্ষুণ্ণ হয়। এর ফলে শিক্ষককে বিষয়বস্তু মনে করার কাজেই ব্যাপৃত থাকতে হয়। কিন্তু শ্রেণীতে শিক্ষকের কাজ হওয়া উচিত ছাত্রদের সামগ্রিক প্রতিক্রিয়া লক্ষ্য করা। সু-শিক্ষকের বিষয়বস্তুর উপর একটা দখল থাকবে—যাতে তিনি সুষ্ঠু ভাবে বিষয়বস্তুটি শ্রেণীকক্ষে উপস্থাপিত ক'রতে পারেন। তবে কেবলমাত্র বই থেকে মুখস্থ ক'রে শ্রেণীকক্ষে ভালো ভাবে পড়ানো যায় না—যতক্ষণ না বিষয়বস্তুটি সম্পূর্ণরূপে হৃদয়ঙ্গম করা যায়। বিষয়বস্তুটি স-মনোযোগ পাঠ এবং ব্যাপক চিন্তনের ফলেই তাতে পরিপূর্ণ জ্ঞান লাভ করা সম্ভব। আবার কেবলমাত্র বিষয়বস্তুটি জানা থাকলেই শিক্ষকের দায়িত্ব শেষ হ'য়ে যাচ্ছে না। কিভাবে সেই বস্তুটিকে ছাত্রদের সামনে উপস্থাপিত করা হবে, কি ক'রলে ছাত্রদের বিষয়বস্তু উপলব্ধি করা

সহজ হবে, কি ভাবে প্রশ্নের অবতারণা করা যেতে পারে, এ সম্বন্ধেও শিক্ষককে উপযুক্ত ভাবে তৈরী হতে হবে। পাঠ-পরিকল্পনাতে শিক্ষকের কাজকে আমরা এইভাবে ভাগ ক'রতে পারি :—

১। কি পড়াতে হবে, তা স্থির করা।

২। ছাত্রদের বয়স, মানসিক ক্ষমতা, পাঠদানের জন্য নির্ধারিত সময়, বিষয়বস্তুর প্রকৃতি ইত্যাদি বিবেচনা করা এবং শিক্ষকের পাঠদানের ক্ষমতা যাচাই করা।

৩। যুক্তিযুক্ত পদ্ধতিতে বিষয়বস্তুটি ছাত্রদের সামনে উপস্থাপিত করা।

৪। পাঠ-টীকা প্রস্তুত করা।

৫। শ্রেণীতে যে সমস্ত অসুবিধা সৃষ্টি হ'তে পারে, সেগুলির কথা চিন্তা করা এবং উপযুক্ত প্রতিকারের ব্যবস্থা করা।

পাঠটীকা প্রস্তুতিকরণ :—

পাঠটীকা প্রস্তুত করার কাজটিকে আমরা কতকগুলি অংশে ভাগ ক'রতে পারি। এই ভাগগুলির একটি ছক নীচে দেওয়া হ'ল :

পাঠটীকা প্রস্তুতিকরণ

- শ্রেণীকক্ষের বাইরে শিক্ষকের কাজ
  - বিষয়বস্তুটিকে কতকগুলি ভাগে ভাগ করা এবং প্রত্যেকটির অন্তর্গত পাঠ্যবিষয় নির্ধারণ করা।
  - শ্রেণীকক্ষে বিষয়বস্তু যেভাবে উপস্থাপিত করা হবে সেইভাবে সাজানো এবং পাঠের অগ্রগতিতে উপলব্ধির জন্য যে সমস্ত কার্য্যাবলীর প্রয়োজন, তার ব্যবস্থা করা।
- শ্রেণীকক্ষের ভিতরে শিক্ষকের কাজ
  - শৃঙ্খলা রক্ষা
  - প্রশ্ন করা
  - উদাহরণ সহযোগে সমস্যার সমাধান করা ইত্যাদি।

বিষয়বস্তুর ভাগগুলিকে 'একক' (Unit) বলে আখ্যা দিতে পারি। গণিতের

এককগুলিতে কতকগুলি সূত্র ও নিয়মের ব্যাখ্যা করা হয় এবং সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে ঐ সমস্ত সূত্র ও নিয়মগুলি প্রয়োগ করা হয়। অনেক সময় আবার এককগুলিকে 'বৃহত্তর একক' (Major Unit), ক্ষুদ্রতর একক (Minor Unit)—এই দু'ভাবেও ভাগ করা হয়। বলা বাহুল্য, বৃহত্তর এককের অন্তর্ভুক্ত বিষয়বস্তুর পরিমাণ, ক্ষুদ্রতর এককের অন্তর্ভুক্ত বিষয়বস্তুর পরিমাণ অপেক্ষা বেশী। শ্রেণীকক্ষের এক ঘণ্টার (Period) পাঠ কিন্তু ক্ষুদ্রতর এককের অন্তর্ভুক্ত হয়। প্রতিটি একক যেন স্বয়ং-সম্পূর্ণ হয়। পাঠের শেষে ছাত্রের যেন মনে হয়—সে নূতন কিছু শিখতে পেরেছে।

একক নির্বাচনে যে সমস্ত বিষয়বস্তুর সমাবেশ ক'রতে হয়, সেগুলির জন্যই শিক্ষককে বিশেষ ভাবে প্রস্তুত হ'তে হয়। এককটি বৃহত্তরই হোক্ আর ক্ষুদ্রতরই হোক্, সেটি শেষ করতে একটি মাত্র পিরিয়ডের প্রয়োজন হয় বা কতকগুলির প্রয়োজন হয়, সব ক্ষেত্রেই তার একটি শুরু থাকবে, শেষ থাকবে, আর শুরু থেকে শেষে পৌছাবার একটা সুনির্দিষ্ট পথ বা উপায় থাকবে। শুরুটিকে বলা যেতে পারে ভূমিকা বা সূচনা বা আয়োজন। শেষ হ'ল—পুনরালোচনা বা অভিযোজন। আর মাঝখানের অংশটি হ'ল আসল পাঠ বা উপস্থাপন। এই উপস্থাপনটি কেমনভাবে করা হবে—তা নির্ভর ক'রছে পাঠের বিষয়বস্তুর প্রকৃতির উপর। পাঠদানের কাজটি কি ভাবে অগ্রসর হবে—তা আবার নির্ভর করে পাঠদানের পদ্ধতির উপর। তবে যে পদ্ধতিই অবলম্বন করা হোক না কেন, আবিষ্কার করার প্রবণতাটি যেন পাঠদানে আনয়ন করা সম্ভব হয়। এইভাবে শ্রেণীকক্ষের বাইরে বিভিন্ন ভাবে প্রস্তুত হ'য়ে—শিক্ষক শ্রেণীকক্ষের ভিতরে প্রবেশ ক'রবেন।

শ্রেণীকক্ষের ভিতরে শ্রেণীকক্ষ পরিকল্পনার বা পরিচালনার কথা স্বাভাবিক ভাবেই আসে। শ্রেণী-পরিকল্পনা কিন্তু পাঠ পরিকল্পনার চেয়ে অনেক কঠিন। প্রতিটি ছাত্রের মানসিক বৃদ্ধি বা বিকাশের দিকে শিক্ষককেও বিশেষ মনোযোগ দিতে হবে। প্রতিটি ছাত্রের উন্নতি-অবনতির খবর নিতে হবে এবং প্রত্যেককে প্রয়োজনমত সাহায্য ক'রতে হবে। কোন সূত্র বা নিয়ম বোঝাবার সময় লক্ষ্য রাখতে হবে যেন সকলে সেই সূত্র বা নিয়মটি ভালো ক'রে উপলব্ধি করার আগে কোন সমস্যা তাদের সামনে উপস্থিত করা না হয়। আবার প্রথম সমস্যাটি যেন অতিমাত্রায় সহজ না হয়। সেক্ষেত্রে বিষয়বস্তু সম্বন্ধে ছাত্রের মনে একটা তাচ্ছিল্য বা অবহেলার ভাব আসতে পারে,ফলে পাঠের গুরুত্বটি সম্পূর্ণ নষ্ট হবার সম্ভাবনা অনেক বেশী। পিরিয়ডের সমস্ত সময়টি যেন বিষয়বস্তুর বিভিন্ন অংশের জন্য উপযুক্ত

ভাগে ভাগ ক'রে দেওয়া হয়। সচরাচর ৪০ মিনিটে এক পিরিয়ড হয়। এই ৪০ মিনিটের মধ্যে ১০ থেকে ১৫ মিনিট নেওয়া যেতে পারে আয়োজন ও অভিযোজন স্তরের জন্য। বাকী সময়টিতে উপস্থাপন করা চলতে পারে। এ ভাবে যেমন সময় ভাগ করা যায়—তেমনি প্রত্যেক ছাত্রের জন্য যাতে সমান সময় ব্যয় করা হয়, সেদিকেও দৃষ্টি দিতে হবে। কোন একজন ছাত্রের জন্য বেশী সময় ব্যয় করা চলবে না। আবার একজন ছাত্রও যেন নিষ্ক্রিয়ভাবে শ্রেণীতে বসে থাকতে না পায়। ভালো' মাঝারী, মন্দ সবরকম ছাত্রই যাতে শ্রেণীতে মনোযোগী থাকে তার ব্যবস্থা ক'রতে হবে। ছাত্রদের প্রেষণা উদ্বুদ্ধ ক'রতে পারলে তারা স্বাভাবিক ভাবেই শ্রেণীতে মনোযোগী হবে। কোন ছাত্রের অসুবিধা হ'লে শিক্ষক তাকে ব্যক্তিগত-ভাবেও সাহায্য ক'রতে পারেন, আবার শ্রেণীতে অন্যান্য ছাত্রদের মাধ্যমে, প্রশ্নোত্তরের সাহায্যে তার অসুবিধাটি দূর করতে পারেন। এ ব্যাপারে যারা ভালো ছেলে তারা মাঝারী ও মন্দ ছেলেদের সাহায্য ক'রতে পারে। এক কথায় শিক্ষক শ্রেণীতে বিশ্বস্তভাবে ও দক্ষতার সঙ্গে এমনভাবে পাঠ-পরিচালনা ক'রবেন, যাতে ছাত্ররা প্রকৃতপক্ষে উপকৃত হ'তে পারে।

এবার পাঠটীকার কথা আলোচনা করা যাক্।

অন্যান্য বিষয়ের মত গণিতে পাঠটীকা প্রস্তুত করার সময় হার্বাটীয় সোপানগুলিরই সাহায্য নেওয়া হ'য়ে থাকে। অবশ্য হার্বাটের স্তরগুলি যেভাবে ছিল, ঠিক সেইভাবে নেওয়া হয় না। এ প্রসঙ্গে প্রথমে হার্বাটের মূল স্তরগুলি এবং তার পরিবর্তিত রূপগুলির কথা সংক্ষেপে আলোচনা করা যেতে পারে।

* হার্বাটের মূল স্তরগুলি (Formal Steps) ছিল এই প্রকার ঃ—

১। স্পষ্টতা বা Clearness.

২। সাদৃশ্য বা অনুবন্ধ বা Association.

৩। সু-সংবদ্ধতা বা System.

৪। পদ্ধতি বা অনুশীলনের ফলে উন্নতি বা Method.

এর পরিবর্তিত রূপগুলি হ'ল—

১। আয়োজন বা অবতারণা (Preparation)
২। উপস্থাপন (Presentation)
} হার্বাটের 'স্পষ্টতা' স্তরের বদলে।

৩। বিষয়-সম্মিলন (Comparison or Association)—সাদৃশ্য বা

* হার্বাটের স্তরবিন্যাস ভালোভাবে জানতে হ'লে Prof. K.K. Mookerjee প্রণীত Some Great Educators পাঠ করা বাঞ্ছনীয়।

অনুবন্ধের বদলে।

৪। সূত্র-নির্ধারণ (Generalization)—সু-সংবদ্ধতা স্তরের বদলে।

৫। প্রয়োগ বা অভিযোজন (Application)—পদ্ধতির বদলে।

এই স্তরগুলিকেই 'পঞ্চ-সোপান বলা হয়। এই পরিবর্তিত রূপ হার্বাটের প্রিয় শিষ্য জিলারের (Ziller) দেওয়া। পরে রেড (Reid) আয়োজন স্তরে পাঠের উদ্দেশ্য নামে আর একটি ছোট্ট স্তরের অবতারণা করেন।

গণিতের পাঠ-টীকা প্রস্তুত করার ব্যাপারে সচরাচর নীচের স্তরগুলি ব্যবহার করা হয়।

প্রথম স্তর ঃ—আয়োজন (Introduction)।

এই স্তরের উদ্দেশ্য হ'ল ছাত্রদের মন নূতন জ্ঞান গ্রহণ করার উপযোগী ক'রে তোলা। এই স্তরে ছাত্রের পূর্বজ্ঞান সম্বন্ধে শিক্ষক একটা ধারণা অর্জন ক'রে নিতে পারেন। পূর্বজ্ঞান সম্বন্ধে ধারণা না থাকলে নূতন জ্ঞান দেওয়া সম্ভব নয়। আয়োজন স্তরে পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে ছাত্রকে প্রশ্ন করা হয়। এতে ছাত্র যেমন প্রেষণা বোধ করে তেমনি তার নিজের ক্ষমতা সম্বন্ধেও একটা ধারণা অর্জন করে।

দ্বিতীয় স্তর ঃ উদ্দেশ্যের বর্ণনা (Statement of Aim)।

পাঠের উদ্দেশ্যটি পরিষ্কারভাবে ছাত্রদের নিকট ব্যক্ত ক'রতে হবে। উদ্দেশ্য দু'রকম হ'তে পারে প্রত্যক্ষ এবং পরোক্ষ। প্রতিটি পাঠেরই এই দু'টি উদ্দেশ্য থাকে। উদ্দেশ্যটি জানা থাকলে পাঠদানের গতি সঠিকভাবে নির্ণয় করা সম্ভব।

তৃতীয় স্তর ঃ উপস্থাপন(Presentation)।

বিষয়বস্তুটি ছাত্রদের নিকট যুক্তিযুক্তভাবে এবং মনোবিজ্ঞানসম্মতভাবে উপস্থাপিত ক'রতে হবে। পাঠের উদ্দেশ্য অনুযায়ী বিষয়বস্তু উপস্থাপিত করার পদ্ধতিটি নির্ধারণ ক'রতে হবে। শিক্ষককে এই স্তরে স্থির ক'রতে হবে, তিনি কতটুকু কাজ ক'রবেন আর ছাত্ররা কতটা কাজ ক'রবে। বাস্তব, মূর্ত্ত ও বিশেষ বিশেষ উদাহরণের মাধ্যমে শিক্ষককে অগ্রসর হ'তে হবে। বিষয়বস্তুটি দীর্ঘ হ'লে কতকগুলি ছোট ছোট ভাগে সেটিকে ভাগ ক'রে নিয়ে পড়াতে হবে। পরে সবগুলিকে একত্রিত ক'রতে হবে। সাধারণতঃ প্রশ্ন এবং উত্তরের মাধ্যমে বিষয়বস্তুটির পাঠ এগিয়ে নিয়ে গেলে ভালো হয়।

চতুর্থ স্তর ঃ সূত্র নির্দ্ধারণ (Formulation or Generalization)।

এই স্তরে শিক্ষক মূর্ত্ত স্তর থেকে বিমূর্ত্ত স্তরে অগ্রসর হবেন। তুলনা করা, সাদৃশ্য-বৈসাদৃশ্য নির্ণয় করা প্রভৃতির মাধ্যমে বিমূর্ত্ত স্তরে উপনীত হওয়া যায়।

তবে শিক্ষককে মনে রাখতে হবে যে সমস্ত উদাহরণ বা ঘটনার মধ্যে তুলনা করা হবে, সেগুলি যেন ছাত্রের জানা থাকে। আর এ রকমভাবে তুলনা করা উচিত, যাতে ছাত্রের চিন্তা-শক্তি বৃদ্ধি পায়। এর থেকে কোন একটা সাধারণ সূত্রে উপনীত হওয়া যায়। কোন সূত্র গঠন ক'রতে হ'লে সুকৌশলে প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে ছাত্রদের সহায়তায় সূত্রটি গঠন ক'রতে হবে।

পঞ্চম স্তর: অভিযোজন (Recapitulation)।

জ্ঞানকে তখনই একটা শক্তি বলা যেতে পারে যখন জ্ঞানের প্রয়োগ সম্ভব হয়। উপযুক্ত ব্যবহারের ফলেই জ্ঞান পাকা হয়। উপস্থাপন স্তরে ছাত্র যা শিখল, সে যেভাবে সূত্র নির্ধারণ ক'রল, সেগুলি যে সত্য তা যাচাই করা উচিত। অভিযোজন স্তরে ব্যবহারের মাধ্যমে জ্ঞানের সত্যতা যাচাই করা হয়। এই স্তরকে পরবর্তী স্তরে উচ্চতর জ্ঞানলাভের প্রারম্ভিক সোপান বলা যেতে পারে। বৃহত্তর এককের ক্ষেত্রে অভিযোজন বলতে সমস্ত অংশটি সম্বন্ধে অর্জিত জ্ঞানের সূক্ষ্ম সমালোচনা বোঝায়। আর ক্ষুদ্রতর এককের ক্ষেত্রে অভিযোজন বলতে পাঠ্য বিষয়ের জ্ঞান ছাত্র আয়ত্ত ক'রতে পেরেছে কিনা তার পরীক্ষা করা এবং ঐ জ্ঞানকে বাস্তব ক্ষেত্রে ব্যবহার ক'রতে সাহায্য করাতে বোঝায়।

যাই হোক্ এইভাবে বিষয়ের এবং বিভিন্ন অধ্যায়ের পাঠটীকা প্রস্তুত কর'তে হয়। পাঠটীকার কতকগুলি নমুনা দেওয়া হ'ল। পাঠটীকা প্রস্তুত করার ক্ষেত্রে যে যে স্তরগুলির প্রতি বিশেষভাবে লক্ষ্য রাখতে হবে, সেগুলির কথা আর একবার বলা হল।

॥ পাঠটীকা ॥

বিদ্যালয়...............	বিষয়...............
শ্রেণী...............	সাধারণ পাঠ...............
ছাত্র সংখ্যা.........	বিশেষ পাঠ.............
গড় বয়স...........	পাঠক্রম.................
সময়...............	(১)
তারিখ............	* (২)
শিক্ষক/শিক্ষিকা	(৩)
	* অদ্যকার পাঠ।

প্রথম স্তর: উদ্দেশ্য, (Aim)

দ্বিতীয় স্তর: উপকরণ, (Apparatus)

তৃতীয় স্তর : আয়োজন ও পাঠঘোষণা, (Preparation & Declaration)
চতুর্থ স্তর : উপস্থাপন, (Pesentation)
পঞ্চম স্তর : অভিযোজন (Application)
ষষ্ঠ স্তর : বাড়ীর কাজ, (Home-task)

এই স্তরগুলি মনে রাখলে পাঠটীকা প্রস্তুত করা সহজ হবে। বাড়ীর কাজ দেবার সময় অঙ্কের ক্ষেত্রে 'অমুক প্রশ্নমালার…নং,…নং অঙ্ক ক'রে আনবে', বা জ্যামিতির ক্ষেত্রে '…নং উপপাদ্য' লিখে আনবে, এভাবে না বলে অঙ্কগুলি বা জ্যামিতির সাধারণ সূত্রটি লিখে দিতে হবে। ছাত্র বাড়ীর কাজ ক'রে আনলে সেগুলি ঠিকমত সংশোধিত ক'রে ছাত্রকে ফেরৎ দিতে হবে।

বিঃ দ্রঃ পঞ্চম শ্রেণীতে গড় বয়স 10+ধরা হয় ; সেইভাবে অন্য শ্রেণীর গড় নির্ণয় করা হয়। ছাত্র সংখ্যা যেন 40 এর বেশী না হয় এবং সময় ধরা হয় 40—45 মিনিট।

পাঠ-টীকা নং —১

বিদ্যালয় :—
শ্রেণী—VI
ছাত্রসংখ্যা—
গড় বয়স—11+
সময়—40 মিনিট
তারিখ—
শিক্ষক—

বিষয় :—পাটীগণিত
সাধারণ পাঠ—দশমিক ভগ্নাংশ।
বিশেষ পাঠ—দশমিক ভগ্নাংশ সম্বন্ধে প্রথম পাঠ।
অদ্যকার পাঠ— ঐ

উদ্দেশ্য— ছাত্রদিগকে দশমিক ভগ্নাংশের প্রকৃতি ও নিয়মের সঙ্গে পরিচিত করা এবং তাদের চিন্তা, যুক্তি ও বিচার শক্তির বিকাশ সাধন করা, যাতে তারা ভবিষ্যতে দশমিক ভগ্নাংশ সম্বন্ধে লব্ধ জ্ঞান প্রয়োগ ক'রতে পারে।

উপকরণ—একটি স্কেল ও শ্রেণীকক্ষের সাধারণ সরঞ্জাম।

আয়োজন—ছাত্রদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষা ক'রে তাদের নূতন পাঠে আগ্রহী করবার জন্য নিম্নরূপ প্রশ্ন করা হবে—

(১) ভগ্নাংশের কয়টি অংশ? কি কি?

(২) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{9}$ ইত্যাদি ভগ্নাংশে লব ও ও হরগুলি কি কি ?

(৩) তোমাদের স্কেলটি কত ইঞ্চি লম্বা ?

(৪) প্রতি ইঞ্চি আবার কত ভাগে বিভক্ত ?

(৫) 8 জন লোককে 200 টাকা সমান ভাগে ভাগ ক'রে দিলে একজন কত পায় ?

(৬) 25 টাকা 200 টাকার কত অংশ ?

(৭) 100 টাকাকে কত ভাগে ভাগ ক'রলে এক ভাগ = 1 টাকা হবে ?

(৮) 1 কে সমান 10 ভাগ ক'রলে একভাগ কত হবে ?

(৯) $\frac{1}{10}$ কে সমান 10 ভাগে ভাগ ক'রলে এক এক ভাগ কত হয় ?

(১০) $\frac{1}{100}$ কে যদি আবার সমান 10 ভাগে ভাগ করা যায়, তবে এক ভাগ কত হবে ?

পাঠ-ঘোষণা—অতঃপর শিক্ষক মহাশয়ঃ "আজ আমরা দশমিক ভগ্নাংশ শিক্ষা ক'রব," এই বলে অদ্যকার পাঠ ঘোষণা করবেন।

উপস্থাপন—শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে কতকগুলি সরলরেখা টানবেন এবং ছাত্রদের সেগুলির দৈর্ঘ্য মাপ ক'রে খাতায় লিখে রাখতে বলবেন। মনে করা যাক্ রেখাগুলির দৈর্ঘ্য নিম্নরূপ হ'ল—

১ম রেখা $3\frac{4}{10}$ ইঞ্চি
২য় ,, $4\frac{7}{10}$,,
৩য় ,, 5 ,,
৪র্থ ,, $6\frac{6}{10}$,, + কিছু ভগ্নাংশ
৫ম ,, $7\frac{5}{10}$,, + কিছু ভগ্নাংশ

শিক্ষক মহাশয় ৪র্থ ও ৫ম রেখা দুইটির দৈর্ঘ্য আলোচনার জন্য বোর্ডে লিখবেন এবং প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে নিম্নানুরূপ ভাবে অগ্রসর হবেন—

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
৪র্থরেখাটির দৈঘ্য কত।	$6\frac{6}{10}$ ইঞ্চি + কিছু ভগ্নাংশ।
এই ভগ্নাংশটি কি জাতীয় ?	দশক স্থানীয় ভগ্নাংশ (fraction of tenth) $6\frac{6}{10}$ ইঞ্চি + শতক স্থানীয় কোন ভগ্নাংশ।
যদি স্কেলে ইঞ্চির ভাগগুলিকে 100 ভাগে ভাগ করা থাকত, তবে ভগ্নাংশটি কি ভাবে লেখা চলত ?	

মনে করা যাক দৈর্ঘ্যটি হ'তে পারত $6\frac{6}{10}$ ইঃ $+\frac{3}{100}+$ শতক স্থানীয় ভগ্নাংশের কোন ভগ্নাংশ। সে ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্যটি কি ভাবে লেখা চলত?

$6\frac{6}{10}+\frac{3}{100}+$ সহস্র স্থানীয় কোন ভগ্নাংশ বা $6+\frac{6}{10}+\frac{3}{100}+$ এমন কোন ভগ্নাংশ যার হর 1000।

অতঃপর শিক্ষক মহাশয় ভগ্নাংশগুলি কি ভাবে লেখা যেতে পারে তা বুঝিয়ে দেবেন। প্রতিটি ভগ্নাংশ এই ভাবে লেখা চলতে পারে—

$$P+\frac{Q}{10}+\frac{R}{100}+\frac{S}{1000}+\cdots\cdots$$

P, Q, R, S……প্রভৃতি 0, 1, 2, 3………9 পর্য্যন্ত যে কোন সংখ্যা হ'তে পারে।

অতঃপর শিক্ষক মহাশয় বলবেন যে প্রতি ক্ষেত্রে বার বার ভগ্নাংশের হরগুলি লিখতে হয় না বা বার বার যোগ চিহ্নও দিতে হয় না। সংক্ষিপ্ত উপায়েও ভগ্নাংশ প্রকাশ করা সম্ভব। যেমন—

$6+\frac{6}{10}+\frac{3}{100}+\frac{7}{1000}$ এই ভগ্নাংশটি বিভিন্নভাবে লেখা যায়। যথা

$\frac{6}{637}$, $6\frac{637}{1000}$, 6·6″ 3″ 7″ বা 6·637″

এর মধ্যে 6·637 এই রূপটিই ব্যাপকভাবে গ্রহণ করা হ'য়েছে। কোন ভগ্নাংশকে এই ভাবে লেখার নামই দশমিক প্রথা এবং ভগ্নাংশটি সব সময় 1 এর থেকে কম, অংশগুলিও 10 বা 10 এর কোন গুণিতকের অংশ।

এর পর শিক্ষক মহাশয় দশমিক বিন্দু (·) সম্বন্ধে ছাত্রদের ধারণা দেবেন। এর জন্য $\frac{6}{100}$, $\frac{7}{1000}$ ইত্যাদি জাতীয় ভগ্নাংশের সাহায্যে তিনি অগ্রসর হ'তে পারেন। তারপর কি ভাবে দশমিক ভগ্নাংশ পড়তে হয় তা বুঝিয়ে দিতে হবে। 3·75 কে তিন দশমিক পঁচাত্তর না বলে কেন তিন দশমিক সাত পাঁচ বলা হয়, তা বুঝিয়ে দিতে হবে। এরপর একটি ছকের সাহায্যে দশমিকের স্থানাঙ্কগুলি সম্বন্ধে একটা ধারণা দেওয়া যেতে পারে। যেমন 5555·555 এই ভগ্নাংশটিকে এই ভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে—

সহস্র	শতক	দশক	একক	দশাংশ	শতাংশ	সহস্রাংশ
5	5	5	5	5	5	5

তারপর দশমিক বিন্দুর সঙ্গে 10 এর সম্বন্ধটি ছাত্রদের বুঝিয়ে দিতে হবে। 10 দিয়ে গুণ ক'রলে দশমিক বিন্দু ডান দিকে এক ঘর সরে যায় অর্থাৎ এর মান দশগুণ বেড়ে যায়। আবার 10 দিয়ে ভাগ ক'রলে দশমিক বিন্দু বাম দিকে এক ঘর সরে আসে, অর্থাৎ এর মান দশগুণ কমে যায়।

এর পর অভিযোজন স্তর। তারপর বাড়ীর কাজ দেওয়া চলবে।

পাঠ-টীকা নং—২

বিদ্যালয়—
শ্রেণী—VII
ছাত্র সংখ্যা—
গড় বয়স—12+
সময়—40 মিনিট
তারিখ—
শিক্ষক—

বিষয়—পাটীগণিত।
সাধারণ পাঠ—লাভ ক্ষতি।
পাঠক্রম—লাভ ক্ষতি সংক্রান্ত সমস্যা সমূহের সমাধান।
অদ্যকার পাঠ—ঐ

উদ্দেশ্য—ছাত্রদিগকে পাটীগণিতের লাভ ক্ষতি সংক্রান্ত সমাধানে জ্ঞান আহরণ ক'রতে সহায়তা করা এবং তাদের চিন্তাশক্তি, কল্পনাশক্তি ও বিচার শক্তির বিকাশ সাধন ক'রে সক্রিয়ভাবে অদ্যকার পাঠে আকৃষ্ট করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের প্রয়োজনীয় উপকরণাদি।

আয়োজন—অদ্যকার পাঠে ছাত্রদিগকে মনোযোগী করবার জন্য শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে শ্রেণীকক্ষে নিম্নানুরূপ প্রশ্নাবলীর অবতারণা ক'রবেন।

(১) একটি কলম দশ টাকায় কিনলে আর পনের টাকায় বিক্রী ক'রলে, তুমি কম না বেশী পেলে?

(২) কলমটি বিক্রী ক'রে তুমি কয় টাকা বেশী পেলে?

(৩) এই পাঁচ টাকা বেশী পাওয়ায় তোমার কি হল?

(৪) বিক্রী ক'রে এই দশ টাকার চেয়ে কম পেলে তোমার কি হ'ত?

পাঠ ঘোষণা—"অদ্য আমরা লাভ ক্ষতি সংক্রান্ত সমস্যাসমূহ সম্বন্ধে আলোচনা

ক'রব" :—এই বলে শিক্ষক মহাশয় শ্রেণী কক্ষে অদ্যকার পাঠ ঘোষণা ক'রবেন।

উপস্থাপন—শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীর মধ্যে ছাত্রদের সহযোগিতায় একটি দোকানের অনুরূপ পরিস্থিতির সৃষ্টি ক'রবেন। তাতে কলম বিক্রয় হবে। শিক্ষক মহাশয় প্রথমে দুজন ছাত্রকে ডাকবেন। তাদের মধ্যে একজন ছাত্র কলমের দোকানের ক্রেতা হবে ও অপরজন বিক্রতা হবে। ক্রেতা ছাত্র বিক্রেতা ছাত্রকে জিজ্ঞাসা ক'রবে "তোমার এই কলমটির মূল্য কত"? তখন বিক্রেতা ছাত্র উত্তর দেবে "এই কলমটির দাম পাঁচ টাকা'। তাহার পর ক্রেতা ছাত্র পাঁচ টাকা দিয়ে কলমটি নেবে।

তারপর ক্রেতা ছাত্রটি বিক্রেতা ছাত্র হবে এবং শিক্ষক মহাশয় অপর একটি ছাত্রকে ডাকবেন। এই ছাত্রটি বর্ত্তমানে ক্রেতা হবে। এবার এই ক্রেতা ছাত্রটি বিক্রেতা ছাত্রকে জিজ্ঞাসা ক'রবে তোমার এই কলমটির মূল্য কত? তখন এই বিক্রেতা ছাত্রটি বলবে, ''এই কলমটির মূল্য 6 টাকা"। এরপর ক্রেতা ছাত্রটি 6 টাকা মূল্য দিয়ে কলমটি ক্রয় ক'রবে।

তখন শিক্ষক মহাশয় বলবেন এই কলমটি পূর্বে ক্রয় করা হ'য়েছিল পাঁচ টাকায় ও বিক্রী করা হ'ল, ছয় টাকায় তা হ'লে কত টাকা বেশীতে বিক্রয় করা হ'য়েছে? তার পর শিক্ষক মহাশয় কতকগুলি সাধারণ প্রশ্ন শ্রেণীকক্ষে অবতারণা ক'রবেন এবং ছাত্রদের সহযোগিতায় উত্তর তৈরী ক'রবেন।

প্রশ্ন	উত্তর
(1) কোন জিনিসের ক্রয়মূল্য অপেক্ষা বিক্রয় মূল্য বেশী হ'লে কি হয়?	(1) লাভ হয়।
(2) কোন জিনিসের বিক্রয় মূল্য অপেক্ষা ক্রয় মূল্য বেশী হ'লে কি হয়?	(2) ক্ষতি হয়।
(3) একজন দোকানদার একটি পুস্তক 10 টাকায় ক্রয় ক'রে পরে ঐ পুস্তক 15 টাকায় বিক্রয় ক'রেছিল।	
(i) পুস্তকটির ক্রয় মূল্য কত?	(i) 10 টাকা
(ii) পুস্তকটির বিক্রয় মূল্য কত?	(ii) 15 টাকা

(iii) তাহা হ'লে বিক্রয় মূল্য বেশী না ক্রয় মূল্য বেশী ? — (iii)) বিক্রয় মূল্য বেশী।

(iv) বিক্রয় মূল্য বেশী হ'লে কি হয় ? — (iv) লাভ হয়।

(v) পুস্তকটি বিক্রয় ক'রে কত লাভ হ'য়েছে ? — (v) $15-10=5$ টাকা। পাঁচ টাকা লাভ হ'য়েছে।

অভিযোজন—ছাত্রদের অদ্যকার নবলব্ধজ্ঞান পরীক্ষা করবার জন্য শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীকক্ষে নিম্নানুরূপ প্রশ্নাবলীর অবতারনা কর'বেন এবং প্রয়োজনবোধে ছাত্রদিগকে ব্যক্তিগতভাবে সাহায্য ক'রবেন।

(1) কোন জিনিসের ক্রয়মূল্য অপেক্ষা বিক্রয় মূল্য বেশী হ'লে কি হয় ?

(2) কোন জিনিসের বিক্রয় মূল্য অপেক্ষা ক্রয় মূল্য বেশী হ'লে কি হয় ?

(3) কোন ব্যবসায়ী 15টি গরু 200 টাকায় ক্রয় ক'রেছিল। কিন্তু 5টি গরু হঠাৎ মরে গেল। তারপর সে প্রত্যেকটি গরু 15 টাকা ক'রে বিক্রয় ক'রেছিল। তা হ'লে ত'ার কত লাভ বা ক্ষতি হ'য়েছিল ?

বাড়ীর কাজ—শিক্ষক মহাশয় বাড়ীতে ছাত্রদিগকে ক'রে আনবার জন্য নিম্নানুরূপ অঙ্কটি বোর্ডে লিখে দিবেন।

কোন জিনিসের ক্রয়মূল্য 50 টাকা, কিন্তু বিক্রয়ের সময় তাহার মূল্য হ'ল 59·20 টাকা। তা হ'লে জিনিসটা বিক্রয় ক'রে কত লাভ হ'ল ?

পাঠ-টীকা নং—৩

বিদ্যালয়—

শ্রেণী—VIII

ছাত্র সংখ্যা—

গড় বয়স—13+

সময় 40 মিনিট

শিক্ষক—

তাং—

বিষয়—বীজগণিত

সাধারণ পাঠ—সূত্র (Formula)

বিশেষ পাঠ—$(a+b)^3$

অদ্যকার পাঠ—ঐ

উদ্দেশ্য—(1) $(a+b)^3$ সূত্র নির্ণয় ক'রতে ছাত্রদিগকে সহায়তা করা।

(2) ত্রি আয়তন বস্তু সম্বন্ধে ধারণা দেওয়া ও বীজগণিত শিক্ষার মাধ্যমে ছাত্রদের চিন্তা শক্তি, বিচার শক্তি, ও যুক্তিশক্তির বিকাশ সাধনে সাহায্য করা।

উপকরণ—ত্রি আয়তন (ঘনক) বস্তুর একটি মডেল ও শ্রেণীকক্ষের প্রয়োজনীয় সরঞ্জাম।

আয়োজন—পাঠে ছাত্রদের আগ্রহ সৃষ্টি ক'রবার জন্য তাদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হবে।

(1) $a\times a$ এর গুণফল কত? (2) $a^2\times b$ এর গুণফল কত?

(3) $a^2b+a^2b+a^2b=$ কত হবে? (4) $a\times a\times a$ এর গুণফল কত?

(5) a এর বর্গ কত? (6) a এর ঘন কত?

(7) $(a+b)(a+b)$ আর কিভাবে লেখা যায়?

(8) $(a+b)(a+b)(a+b)$ আর কি ভাবে লেখা যায়?

(9) $(a+b)^3=$ কত হবে?

পাঠ ঘোষণা—'আজ আমরা $(a+b)^3$ সূত্র নির্ণয় সম্বন্ধে আলোচনা ক'রব' এই বলে পাঠ ঘোষণা করা হবে।

উপস্থাপন—ছাত্রদের সক্রিয় সহযোগিতায় প্রশ্ন-উত্তরের মাধ্যমে পাঠ পরিচালনা করা হবে।

বিষয়

(1) $(x+2)(x+2)=(x+2)^2.=x^2+2x.2+4$

(2) $(x+2)(x+2)(x+2)=(x+2)^2(x+2)=(x+2)^3$
$=x^3+3x^2.2+3.x.4+8$

(3) $(x+3)(x+3)(x+3)=(x+3)^2(x+3)=(x+3)^3$
$=(x^2+6x+9)(x+3)=x^3+3(x)^2.3+3(x)(3)^2+(3)^3$

(4) $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)^2(a+b)=(a+b)^3$
$=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=(a)^3+3(a)^2b+3(a)(b)^2+b^3$

এখন ছাত্রদের সহায়তায় $(a+b)^3$ এর সূত্র বোর্ডে লিখে দেওয়া হবে।
(প্রথম পদ + দ্বিতীয় পদ)^3 = (প্রথম পদ)^3 + 3(প্রথম পদ)^2. দ্বিতীয় পদ + 3. প্রথম পদ. (দ্বিতীয় পদ)^2 + (দ্বিতীয় পদ)^3

পদ্ধতি

(1) $(x+2)(x+2)$ এর গুণফল কত ?

(2) $(x+2)(x+2)(x+2)$ এর গুণফল কত ?

(3) $(x+3)(x+3)(x+3)$ এর গুণফল কত ?

(4) $(a+b)(a+b)(a+b)$ এর গুণফল কত ?

অভিযোজন – ছাত্রদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষার জন্য নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হবে।

(1) $(x+4)$ এর ঘণফল নির্ণয় কর।

(2) $(x+5)$ এর ঘণফল কত।

(3) মান নির্ণয় কর, $(a+1)^3$, $(abc+1)^3$

গৃহ কাজ—নিম্নলিখিত অঙ্কগুলি ছাত্রদিগকে বাড়ী থেকে ক'রে আনতে বলা হবে।

(1) $(x+a)^3=$ কত হবে ?

(2) $(3x+4y)$ এর ঘনফল নির্ণয় কর।

(3) $(a+5)^3=$ কত ?

(4) মান নির্ণয় কর :—$(ab+bc)^3$, $(cd+ab)^3$, $(x+4)^3$

পাঠ-টীকা নং—৪

বিদ্যালয়—
শ্রেণী—VIII
ছাত্র সংখ্যা—
গড় বয়স—13+
সময়—40 মিনিট
তারিখ—
শিক্ষক—

বিষয়—গণিত
সাধারণ পাঠ—জ্যামিতি
বিশেষ পাঠ—ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।
অদ্যকার পাঠ—ঐ

উদ্দেশ্য—শিক্ষার্থীদের তিনটি কোণের সমষ্টি নির্ণয়ে সহায়তা করা এবং তাদের চিন্তা, যুক্তি ও বিচার শক্তির বিকাশ সাধনে সহায়তা করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের প্রয়োজনীয় সরঞ্জাম, জ্যামিতি অঙ্কনের যন্ত্র এবং একটি ত্রিভুজের মডেল।

আয়োজন—শিক্ষার্থীদের কৌতূহল ও আগ্রহ জাগ্রত ক'রে পাঠাভিমুখী করবার

জন্য আনুষঙ্গিক পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে শিক্ষক মহাশয় নিম্নানুরূপ প্রশ্ন ক'রবেন।

১) একটি সরলরেখার উপর অপর একটি সরল রেখা দণ্ডায়মান হ'লে সন্নিহিত কোণ দু'টির সমষ্টি কত?

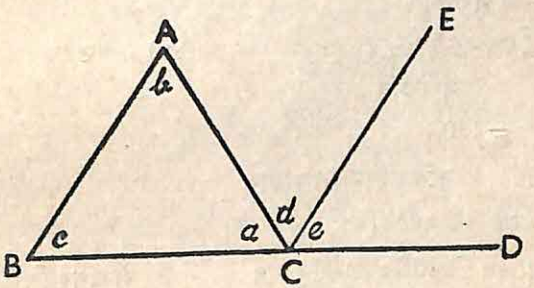
২) দু'টি সমান্তরাল সরলরেখাকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ ক'রলে যে (1) একান্তর কোণগুলি উৎপন্ন হয় তাহাদের কি সম্বন্ধ? (2) যে অনুরূপ কোণগুলি উৎপন্ন হয় তাহাদের মধ্যেই বা কি সম্বন্ধ?

৩) সরল কোণের পরিমাপ কত ডিগ্রী?

৪) ত্রিভুজের কয়টি কোণ? কোনগুলির সমষ্টি কত?

৫) চাঁদা ব্যতীত কি ভাবে ত্রিভুজের কোন সমষ্টি পরিমাপ করা যায়।

পাঠ ঘোষণা : আজ আমরা ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি নির্ণয় ক'রবার পদ্ধতি সম্বন্ধে কিছু আলোচনা ক'রব।



বিষয়	পদ্ধতি
উপস্থাপন—	
১) একটি ত্রিভুজ।	১) চিত্রটি কি?
(২) ABC ত্রিভুজ।	(২) ত্রিভুজটির কি নাম দেওয়া যেতে পারে?
(৩) তিনটি কোণ—a, b, c,	(৩) ABC ত্রিভুজের কয়টি কোণ এবং কি কি?
(৪) $\angle a+\angle b+\angle c=2$ সমকোণ।	(৪) কি প্রমাণ ক'রতে হবে?
(৫) CE সরলরেখা BAর সমান্তরাল	(৫) C বিন্দুতে ABর সমান্তরাল

ক'রে আঁকা যায়।	ক'রে কোন সরলরেখা আঁকা যায়?
(৬) d এবং e কোণ।	(৬) C বিন্দুতে কি কি নতুন কোণ উৎপন্ন হয়?
(৭) $\angle b = \angle d$ কারণ $\angle b$ ও $\angle d$ একান্তর। একান্তর কোণগুলি পরস্পর সমান।	(৭) CE ও BA সমান্তরাল এবং AC ছেদক হ'লে কোন কোণগুলি সমান হবে? কেন?
৮) $\angle c = \angle e$ কারণ $\angle c$ ও $\angle e$ অনুরূপ কোণ। অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান।	৮) আবার CE ও BA সমান্তরাল এবং BCD ছেদক হ'লে কোন কোণগুলি সমান হবে? কেন?
৯) $\angle d + \angle e = \angle b + \angle c$	৯) $\angle d + \angle e =$ কত?
১০) $\angle d + \angle e + \angle a$ $= \angle b + \angle c + \angle a$ $= 2$ সমকোণ	১০) উভয়দিকে $\angle a$ কোণ যোগ ক'রলে কি হয়?
১১) $\angle a + \angle b + \angle c$ $= 2$ সমকোণ $= 180^\circ$ ∴ ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।	১১) অতএব $\angle a + \angle b + \angle c =$ কত?
মডেল ত্রিভুজটির তিনটি কোণ কাটিয়া বোর্ডে একটি বিন্দুতে স্থাপন ক'রবেন এবং তিনটির সমষ্টিতে একটি সরলরেখা যাবে। পাওয়া এক সরলকোণের পরিমাণ দুই সমকোণ।	অতঃপর শিক্ষক মহাশয় ত্রিভুজের মডেলটি নিয়ে বিশ্লেষণ ক'রবেন।

অভিযোজন—শিক্ষার্থীদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষা করবার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নানুরূপ প্রশ্ন ক'রবেন।

১) $\angle e = \angle c$ কেন?

২) $\angle b + \angle c = \angle d + \angle e$ কেন?

৩) ত্রিভুজের যে কোন একটি বাহু বর্ধিত ক'রলে যে বহিঃস্থ কোণ

উৎপন্ন হয় তা অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দু'টির সমষ্টির সমান, প্রমাণ কর।

৪) ত্রিভুজের তিনটি কোণের পরিমাণ কত ডিগ্রী ?

বাড়ীর কাজ—শিক্ষক মহাশয় নিম্নলিখিত প্রশ্ন শিক্ষার্থীদের বাড়ী থেকে তৈরী ক'রে আনতে বলবেন।

১) একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন ক'রে তাদের প্রত্যক কোণের পরিমাপ কর।

২) একটি সমকোণী ত্রিভুজের কোনসমষ্টি দুই সমকোণ। প্রমাণ কর এবং দেখাও যে অঙ্কিত স্থূলকোণী ত্রিভুজ সমকোণী ত্রিভুজের কোনগুলির সমষ্টি পরস্পর সমান।

পাঠটীকা নং—৫

বিদ্যালয়—
শ্রেণী—IX
ছাত্র সংখ্যা—
গড় বয়স—14+
সময়—40 মিনিট
তারিখ—
শিক্ষক—

বিষয়—জ্যামিতি
সাধারণ পাঠ—পিথাগোরাস উপপাদ্যের বিস্তৃতি।

একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজে স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র, ঐ কোণের সন্নিহিত অন্য দুই বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ে এবং উহাদের এক বাহু ও উহার উপর অন্য বাহুর লম্ব-অভিক্ষেপ, এই দুই এর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টি সমান।

উদ্দেশ্য—ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সঙ্গে অপর বাহুগুলির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের কি সম্বন্ধ আছে তা শেখানো।

ছাত্রদের মৌলিক চিন্তা ও বিচার শক্তির উন্মেষ সাধন করা ও গণিত শাস্ত্র পাঠে তাদের আগ্রহ বৃদ্ধি করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণ সমূহ।

আয়োজন—ছাত্রদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষার্থে ও তাদের পাঠাভিমুখী ক'রার জন্য নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হবে।

(১) AB^2 বলতে কি বুঝায়

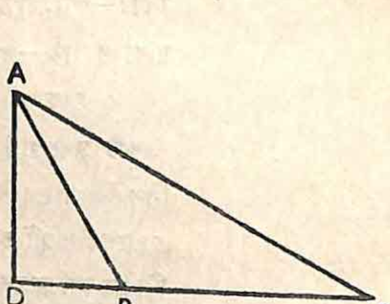
(২) $AB.BC$ দ্বারা কি সূচিত হয়?

(৩) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সঙ্গে উহার অপর বাহুগুলির মধ্যে কি সম্বন্ধ আছে বলে মনে কর।

(৪) ঐ সম্বন্ধটি কে আবিষ্কার করেন?

(৫) লম্ব অভিক্ষেপ বলতে কি বুঝ?

ABC ত্রিভুজের $\angle ABC=$ স্থূলকোণ, A বিন্দু থেকে CB এর বর্ধিত অংশের উপর AD লম্ব টানা হ'য়েছে। AC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সহিত অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং BC বাহু ও ঐ বাহুর উপর AB বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ BD-র অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের মধ্যে কি সম্বন্ধ আছে তা আজ আমরা নির্ণয় করব।



উপস্থাপন—অদ্যকার পাঠ্য বিষয়ের সম্বন্ধটি নির্ণয় করবার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নানুরূপ প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে ছাত্রদের সহযোগিতায় অগ্রসর হবেন।

প্রশ্ন	উত্তর
১) চিত্রে স্থূলকোণ কোনটি?	১) $ABC=$ স্থূলকোণ
২) ADC সমকোণী ত্রিভুজের $AC^2=$ কত?	২) $AC^2=AD^2+CD^2$
৩) $CD^2=$ কত?	৩) $CD^2=(BD+BC)^2$ $=BC^2+BD^2+2BC.BD$
৪) $AD^2+CD^2=$ কত হবে?	৪) $AD^2+CD^2=AD^2+BD^2$

$+BC^2+2BD.BC=AB^2$
$+BC^2+2BC.BD$

৫) এখন $AC^2=$ কত?

৫) $AC^2=AB^2+BC^2+2BD.BC$

৬) BC বাহুর উপর AB বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ কি?

৬) BD

৭) $2BD.BC$ বলতে কি বুঝায়?

৭) BD এবং BC বাহু বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুন

৮) $AC^2=AB^2+BC^2+2BD.BC$ এই সম্বন্ধটি থেকে তোমার কি সিদ্ধান্ত হল?

৮) স্থূলকোণী ত্রিভুজে স্থূলকোণের সম্মুখীন বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র, উহার অপর দুই বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের এবং উহাদের যে কোন একটি বাহুও তদুপরি অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুনের সমষ্টির সমান হবে।

উপরোক্ত সিদ্ধান্তটি ছাত্রদিগকে তাদের নিজ খাতায় লিখে রাখতে বলা হবে।

অতঃপর শিক্ষক মহাশয় নিম্নলিখিত সম্বন্ধটির উপর ছাত্রদের দৃষ্টি আকর্ষণ করবেন।

কোন ত্রিভুজে $\angle C$ সমকোণ হ'লে $AB^2=AB^2+BC^2$

$\angle C$ স্থূলকোণ হ'লে $AB^2>AC^2+BC^2$

অভিযোজন—নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষা ক'রবার জন্য ছাত্রদিগকে নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হবে এবং প্রয়োজন শিক্ষক মহাশয় হ'লে তাদের ব্যক্তিগতভাবে সাহায্য করবেন।

1. Prove that a triangle whose sides are 2.3 and 4 inches is an............

2. In an isosceles triangle ABC, $AC=BC=4''$
$\angle ACB=120°$. Find the length of AB.

বাড়ীর কাজ—ছাত্রদিগকে নিম্নলিখিত প্রশ্নটির সমাধান বাড়ী থেকে ক'রে আনতে

বলা হবে।

1. Prove that in an isosceles triangle of which the vertical angle is 120°, the square of the base is three times on either side.

পাঠ-টীকা নং—৬

বিদ্যালয়—
শ্রেণী—IX
ছাত্র সংখ্যা—
গড় বয়স—14+
সময়—40 মিনিট
তারিখ—
শিক্ষক—

বিষয়—বীজগণিত
সাধারণ পাঠ—ঘাত নির্ণয়
বিশেষ পাঠ—* ১) বিস্তৃতি নির্ণয়
২) সরল
৩) মান নির্ণয়
৪) সাংখ্য-সহগের সমষ্টি

* অদ্যকার পাঠ

উদ্দেশ্য—১) ছাত্রদিগকে রাশির ঘাত নির্ণয়ে সাহায্য করা।
২) ছাত্রদের চিন্তাশক্তি বৃদ্ধি করা।
৩) গণিতশাস্ত্র পাঠে তাদের উৎসাহিত করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণসমূহ।

আয়োজন—ছাত্রদের পূর্ব জ্ঞান পরীক্ষার্থে ও তাদের অদ্যকার পাঠাভিমুখী ক'রবার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নরূপ প্রশ্ন ক'রবেন।

১) $(a) =$ কত?
২) $(a)^3$ বলিতে কি বুঝ?
৩) $(+x)^2 =$ কত?
৪) $(-x)^2 =$ কত?
৫) $(-a)^4 =$ কত?
৬) $(-x)^5 =$ কত?
৭) $(a+b)^2 =$ কত?
৮) $(a-b)^2 =$ কত?

পাঠঘোষণা—অদ্য আমরা ঘাত নির্ণয়ের নিয়মগুলি আলোচনা ক'রব।

উপস্থাপন—শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের সহযোগিতায় নিম্নানুরূপ অঙ্কগুলি ক'রে দেখাবেন।

Raised to the required power

a) $(-2a^3b^2)^5$

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
১) $(-2)^5 =$ কত ?	১) -32
২) $(a^3)^5 =$ কত ?	২) a^{15}
৩) $(b^2)^5 =$ কত ?	৩) b^{10}

Expand $(x-y)^7$

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
১) বিস্তৃতির মোট সংখ্যা কত ?	১) 8
২) বিস্তৃতির প্রথম পদ = কত ?	২) x^7
৩) দ্বিতীয় পদ = কত ?	৩) $\frac{-7\times 1}{1}x^6y = -7x^6y$
৪) তৃতীয় পদ = কত ?	৪) $\frac{7\times 6}{2}x^5y^2 = 21x^5y^2$
৫) চতুর্থ পদ = কত ?	৫) $\frac{-21\times 5}{3}x^4y^3 = -35x^4y^3$
৬) পঞ্চম পদ = কত ?	৬) $\frac{35\times 4}{4}x^3y^4 = 35x^3y^4$
৭) ষষ্ঠ পদ = কত ?	৭) $\frac{-35\times 3}{5}x^2y^5 = -21x^2y^5$
৮) সপ্তম পদ = কত ?	$\frac{21\times 2}{}\ y^6 = 7xy^6$
৯) শেষ পদ = কত ?	৯) $\frac{-7\times 1}{7}y^7 = -y^7$

এবার অঙ্কটি শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে ক'রবেন এবং ছাত্রদের লিখে নিতে ব'লবেন।

অভিযোজন—অদ্যকার পাঠ ছাত্রেরা কতটা অনুধাবন ক'রেছে তা জানবার জন্য নিম্নানুরূপ অঙ্কগুলি ক'রতে দেওয়া হবে এবং প্রয়োজন হ'লে তাদের ব্যক্তিগতভাবে সাহায্য করা হবে।

Expand the following

(a) $(a+b)^6$,

(b) $(1-x)^6$,

(c) $(x^2+1)^5$

বাড়ীর কাজ—ছাত্রদের নিম্নলিখিত অঙ্কগুলি বাড়ী থেকে ক'রে আনতে বলা হবে।

Expand the following

1. $(2a+b)^5$
2. $(a^2-b^2)^4$

পাঠ-টীকা নং—৭

বিদ্যালয়—
শ্রেণী—IX
ছাত্রসংখ্যা—
গড় বয়স—14+
সময়—40 মিনিট
তারিখ—
শিক্ষক—

বিষয়—ত্রিকোণমিতি
সাধারণ পাঠ—সূক্ষ্ম কোণের ত্রিকোণানুপাত
বিশেষ পাঠ—* (১) ত্রিকোণানুপাত গুলির সংজ্ঞা
(২) ত্রিকোণানুপাত গুলির মধ্যে প্রধান সম্বন্ধ
(৩) ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্বন্ধীয় অভেদাবলী
*অদ্যকার পাঠ

উদ্দেশ্য—(১) ছাত্রদিগকে ত্রিকোণানুপাতগুলির সহিত পরিচয় করিয়ে দেওয়া, যাতে তারা ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী এবং ত্রিভুজের সমাধান করার সময় ঐ অনুপাতগুলির ব্যবহার ক'রতে পারে।

(২) ছাত্রদের মৌলিক চিন্তা ও বিচার শক্তির উন্মেষ সাধনে সহায়তা করা।

(৩) গণিত শাস্ত্রপাঠে আগ্রহ বৃদ্ধি করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণ সমূহ।

আয়োজন—ছাত্রদিগকে পাঠাভিমুখী ক'রার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করবেন এবং প্রয়োজন হলে তাদের সাহায্য ক'রবেন।

(১) অনুপাত ও সমানুপাত বলতে কি বুঝায়?

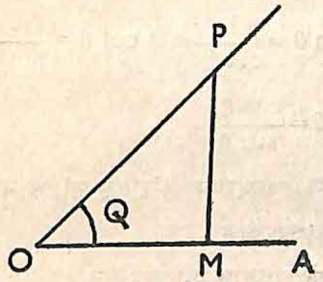
(২) একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করে উহার লম্ব, ভূমি এবং অতিভুজ চিহ্নিত কর।

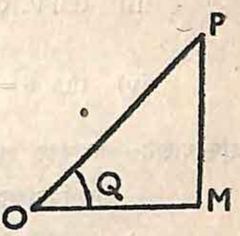
(৩) সমকোণী' ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রত্রয়ের মধ্যে কি

সম্বন্ধ আছে ?

পাঠ ঘোষনা—আজ আমরা ত্রিকোণানুপাতগুলির সংজ্ঞা এবং ঐ অনুপাতগুলির মধ্যে কি সম্বন্ধ আছে তাহা নির্ণয় ক'রব।

উপস্থাপন—শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে AOB একটি কোণ অঙ্কন ক'রে OBর উপর যে কোন বিন্দু P থেকে OAর উপর PM লম্ব অঙ্কন ক'রবেন এবং বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির সংজ্ঞা নির্দেশ ক'রবেন এবং ছাত্রদিগকে তা অভ্যাস করাবেন।





কোণানুপাতগুলির পরস্পর সম্বন্ধ নির্ণয় করবার জন্য শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে POM একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন ক'রে নিম্নরূপ প্রশ্ন করবেন।

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
১) $\sin\theta =$ কত ?	১) $\sin\theta = \frac{PM}{OP}$
২) $\operatorname{cosec}\theta =$ কত ?	২) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM}$
৩) $\sin\theta . \operatorname{cosec}\theta =$ কত ?	৩) $\sin\theta . \operatorname{cosec}\theta = 1 \ldots\ldots (a)$

অনুরূপে শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের সহযোগিতায় প্রমাণ ক'রবেন যে,

$$\cos\theta . \sec\theta = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

এবং $\cot\theta . \tan\theta = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$

তারপর ছাত্রদিগকে $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. = কত জিজ্ঞাসা করা হ'লে তারা চিত্র থেকে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান বসিয়ে সিদ্ধান্ত ক'রবে যে :—

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

সময়—40 মিঃ x তম পদ নির্ণয়

অনুরূপভাবে তারা $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ইহা প্রমাণ ক'রবে। এখন শিক্ষক মহাশয় নিম্নলিখিত সম্বন্ধগুলি বোর্ডে লিখে দেবেন এবং ছাত্রদের নিজ নিজ খাতায় লিখে নিতে ব'লবেন।

i) $\sin\theta.\ \text{cosec}=1\ \therefore\ \sin\theta=\frac{1}{\text{cosec}\,\theta}$ এবং $\text{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\theta}$

ii) $\cos\theta.\ \sec\theta=1\ \therefore\ \cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$

iii) $\tan\theta.\ \cot\theta=1\ \therefore\ \tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$ এবং $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$

iv) $\tan\ \theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ এবং $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

অভিযোজন—অদ্যকার পাঠ শিক্ষার্থী কতটা অনুধাবন ক'রেছে তা জানবার জন্য নিম্নানুরূপ প্রশ্নের সাহায্য লওয়া হবে।

১) কোন কোণের কোট্যানজেণ্ট অনুপাত বলতে কি বুঝ ?

২) $\cos\theta$ এবং $\sec\theta$-র মধ্যে কি সম্পর্ক ?

৩) $\tan\theta.\ \ \cos\theta=$ কত ?

৪) $\cot\theta.\ \ \sec\theta.\ \ \sin\theta=$ কত ?

বাড়ীর কাজ—নবলব্ধ জ্ঞানের অভ্যাসের জন্য ছাত্রদিগকে নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর বাড়ী থেকে ক'রে আনতে বলা হবে।

১) $\tan\theta.\ \ \text{cosec}\,\theta=$ কত ?

২) $\frac{\sec\theta}{\text{cosec}\,\theta}=$ কত ?

৩) $\text{cosec}\,\theta.\ \cos\theta.\ \tan\theta=$ কত ?

পাঠ-টীকা নং—৮

বিদ্যালয়— বিষয়—বীজগণিত

শ্রেণী—X সাধারণ পাঠ—প্রগতি

ছাত্র সংখ্যা— বিশেষ পাঠ—(১) সাধারণ অন্তর নির্ণয়

গড় বয়স—15+ (২) সমান্তর শ্রেণীর

তারিখ—
শিক্ষক—

(৩) সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয়
* (৪) সমান্তর শ্রেণীর যে কোন সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়
(৫) বিবিধ
* অদ্যকার পাঠ

উদ্দেশ্য—(১) সমান্তর শ্রেণীর যে কোন সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় ক'রতে সাহায্য করা
(২) ছাত্রদের মৌলিক চিন্তা ও বিচার শক্তির উন্মেষ সাধনে সহায়তা করা
(৩) গণিত শাস্ত্রপাঠে আগ্রহ বৃদ্ধি করা।

উপকরণ—শ্রেণী কক্ষের সাধারণ উপকরণ সমূহ।

আয়োজন—ছাত্রদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষার্থে এবং তাদের পাঠাভিমুখী করবার জন্য নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হবে এবং প্রয়োজন হ'লে তাদের সাহায্য করা হবে।

(১) সমান্তর শ্রেণী বলতে কি বুঝায়?
(২) সাধারণ অন্তর বলতে কি বুঝায়?
(৩) xতম পদ বলতে কি বুঝায়?

পাঠঘোষণা—অদ্য আমরা সমান্তর শ্রেণীর যে কোন সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় ক'রব।

উপস্থাপন—অদ্যকার পাঠ্য বিষয়ে সম্বন্ধটি নির্ণয় ক'রার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নলিখিত ভাবে অগ্রসর হবেন।

শিক্ষক মহাশয় সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b ধরবেন, উহার যোগফল S এবং শেষ পদ l ধরিবেন।

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
১) $S=$ কত?	১) $S=a+(a+b)+(a+2b)\cdots(l-2b)+(l-b)+l\cdots(1)$
২) S কে উল্টাইয়া লিখলে কত হবে?	২) $S=l+(l-b)+(l-2b)\cdots+(a-2b)+$

৩) (1) ও (2) যোগ করে কি পাই ?

$(a-b)+a\cdots(2)$

৩) $2S=(a+l)+(a+l)\cdots(a+l)$

$=(a+l)+(a+b)+\cdots x$ সংখ্যক পর্যন্ত

$=x(a+l) \quad \therefore \quad S=\frac{x}{2}(a+l)$

অভিযোজন—অদ্যকার পাঠ শিক্ষার্থীগণ কতটা অনুধাবন ক'রেছে তাহা জানবার জন্য নিম্নরূপ প্রশ্ন করা হ'বে প্রয়োজন হ'লে ব্যক্তিগত ভাবে সাহায্য করা হবে।

1. Find the sum of the series $5+7+9+\cdots+65$
2. Find, without assuming any formula, the sum of $1+3+5\cdots\cdots$to 40 terms.
3. The first term of an A. P is 9 and the last term is 96. If the sum be 1575, find the common difference.
4. Find the numbers of terms of the series $17, 5, -7\cdots$whose sum is -78

বাড়ীর কাজ—নবলব্ধ জ্ঞান অভ্যাসের জন্য ছাত্রদিগকে নিম্নলিখিত অঙ্কগুলি বাড়ী থেকে ক'রে আনতে বলা হবে।

1. The sum of 10 terms of an A. P. is 120 and the sum of 15 terms is 255 ; find the sum of n terms.
2. The sum of n terms of an A. P. is 40, the common difference is 2, and the last term is 13. Find n

পাঠ টীকা নং—৯

বিদ্যালয়—

শ্রেণী—X

ছাত্র সংখ্যা—

গড় বয়স—15+

সময় 40 মিঃ

বিষয়—বীজগণিত

সাধারণ পাঠ—অপনয়ন

বিশেষ পাঠ * ১) অপনয়নের সাধারণ নিয়ম।

২) একটি রাশি অপনয়ন

তারিখ—　　　　　　　　　　　　　　৩) দুইটি রাশি অপনয়ন

শিক্ষক—　　　　　　　　　　　　　　৪) তিনটি রাশি অপনয়ন

* অদ্যকার পাঠ

উদ্দেশ্য—(১) ছাত্রদিগকে অপনয়ন সম্বন্ধীয় প্রশ্নাবলীর উত্তর ক'রতে সাহায্য করা।

(২) ছাত্রদের চিন্তাশক্তি বৃদ্ধি করা।

(৩) গণিত শাস্ত্রে তাদের উৎসাহিত করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণ সমূহ

আয়োজন—ছাত্রদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষার্থে ও তাদের অদ্যকার পাঠাভিমুখী করার জন্য নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হবে এবং তাদের নিকট থেকে মৌখিক উত্তর গ্রহণ করা হবে।

১) সমীকরণ বলতে কি বুঝায়?

২) অপনয়ন অর্থে কি বুঝায়?

পাঠঘোষণা—অদ্য আমরা অপনয়নের সাধারণ নিয়মগুলি আলোচনা ক'রব।

উপস্থাপন—শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের সহযোগিতায় নিম্নরূপ অঙ্কগুলি ক'রে দেখাবেন।

a) Eliminate x from the equations :—

$a_1x+b_1=o \cdots$(i)　　　　$a_2x+b_2=o\cdots$(ii)

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
১) (*i*) সমীকরণ থেকে $x=$ কত পাই?	১) $x=-\frac{b_1}{a_1}$
২) (*ii*) সমীকরণ থেকে $x=$ কত পাই?	২) $x=-\frac{b_2}{a_2}$
৩) (*iii*) x এর উভয় মান থেকে আমরা কি পাই?	৩) $-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2}$ $\therefore a_1b_2-a_2b_1=0$

এইবার অঙ্কটি শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে ক'রবেন এবং ছাত্রদের লিখে নিতে বলবেন।

b) Eliminate x and y from the equations :—

$$a_1x+b_1y=o\ldots(i)=a_2x+b_2y=o\cdots(ii)$$

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
১) প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে y দ্বারা ভাগ ক'রলে কি পাব?	১) $a_1\frac{x}{y}+b_1=0\cdots(iii)$

$$a_2\frac{x}{y}+b_2=0\cdots(iv)$$

২) (*iii*) সমীকরণ থেকে $\frac{x}{y}=$ কত পাই ? — ২) $\frac{x}{y}=-\frac{b_1}{a_1}$

৩) $\frac{x}{y}$-এর মান (*iv*) সমীকরণে বসিয়ে কি পাই ? — ৩) $a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)+b_2=0$

$$a_1b_2-a_2b_1=0$$

এইবার শিক্ষক মহাশয় অঙ্কটি বোর্ডে ক'রবেন এবং ছাত্রদের লিখে নিতে বলবেন।

(*c*) Eliminate m and n from the equations :—

$mx+ny=a,\ nx-my=b,\ m^2+n^2=1$

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
১) প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণকে বর্গ ক'রে কি পাই ?	১) $mx^2+n^2y^2+2mnxy=a^2\cdots(1)$ $m^2y^2+n^2x^2-2mnxy=b^2\cdots(2)$
২) (1) ও (2) যোগ ক'রে কি পাই ?	২) $(m^2+n^2)x^2+(m^2+n^2)y^2=a^2+b^2$ $\therefore x^2+y^2=a^2+b$

এইবার শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে অঙ্কটি ক'রবেন এবং ছাত্রদের লিখে নিতে বলবেন।

অভিযোজন—অদ্যকার পাঠ ছাত্ররা কতটা অনুধাবন ক'রেছে তা জানবার জন্য নিম্নরূপ অঙ্কগুলি ক'রতে দেওয়া হবে এবং প্রয়োজন হ'লে তাদের ব্যক্তিগতভাবে সাহায্য করা হবে।

Eliminate x from the following equations :—

1. $x+b=0,\ 3x+2a=a$
2. $x+\frac{1}{x}=a+b,\qquad x-\frac{1}{x}=a-b$
3. $x^2+x+a=o,\quad bx+c=0$

Eliminate x and y from the following equations :—

4. $2x+ay=0,\quad bx+3y=0$
5. $x+y=a,\quad x^2+y^2=b^2,\ x^4+y^4=c^4$

বাড়ীর কাজ—ছাত্রদিগকে নিম্নলিখিত অঙ্কগুলি বাড়ী থেকে ক'রে আনতে বলা হবে।

Eliminate x and y from the following equations :—

a) $x-y=a$, $x^2+y^2=b^2$, $xy=c$

পাঠ-টীকা নং—১০

বিদ্যালয়ের নাম—

শ্রেণী—X

ছাত্রসংখ্যা—

গড় বয়স—15+

সময়—40 মিঃ

শিক্ষক—

তারিখ—

বিষয়—বীজগণিত

সাধারণ পাঠ—লগারিদম্

বিশেষ পাঠ—লগারিদম্ এর উপর প্রাথমিক পাঠ।

অদ্যকার পাঠ— ঐ

উদ্দেশ্য—(1) লগারিদম্ ও ইহার ব্যবহারিক জ্ঞানানুশীলনে ছাত্রদের সহায়তা করা।

2) লগারিদম্ ও ইহার ব্যবহারিক জ্ঞানার্জনে ছাত্রদের বিচার শক্তি, ও চিন্তাশক্তির উন্মেষসাধনে সহায়তা করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের প্রয়োজনীয় সাজসরঞ্জাম;

আয়োজন—ছাত্রদের মন পাঠাভিমুখী করার জন্য তাহাদের পূর্ব জ্ঞানের ভিত্তিতে শিক্ষক মহাশয় নিম্নানুরূপ প্রশ্নের মাধ্যমে সম্ভাব্য উত্তর পাবার চেষ্টা ক'রবেন।

1) বর্গ বা স্কোয়ার (square) বলতে কি বুঝায়?

2) স্কোয়ারের ঘাত কত? 3) 2 এর কিউব কত? 4) 2 ও 3 এর বিশেষ নাম কি কি? 5) 8 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ ক'রলে কি কি মৌলিক সংখ্যা পাওয়া যায়? 6) $2^3=8$, এই অভেদে 8 এর সহিত 2 এর কি সম্বন্ধ? 7) 8 এর সহিত 3 এর কি সম্বন্ধ?

পাঠঘোষণা—আজ আমরা লগারিদম্ এর প্রাথমিক পাঠ সম্বন্ধে আলোচনা ক'রব।

উপস্থাপন—

'ক' শীর্ষ' বিষয়	পদ্ধতি
$2^3=8$	1) 3 ও 8 এর সম্বন্ধ নির্ণয় ক'রতে

1) এখানে 3 ও 8 এর সম্বন্ধ নির্ণয় ক'রতে হ'লে লগারিদম্ এর সাহায্য নিতে হবে।
2) এখানে 2 কে বলা হয় নিধান (Base)
3) 3 কে বলা হয় ঘাতের সূচক (power of Index)
4) কোন নিধানকে (Base) কোন ঘাতে উন্নীত ক'রতে হ'লে যে রাশির সহিত সমান হয়, ঐ ঘাতের সূচককে ঐ রাশির প্রদত্ত নিধানের জন্য লগারিদ্‌ম বলে।
5) $3=\log 2^8$

'খ' শীর্ষ

$$3^2=9$$

1) 3
2) 2
3) 9 এর,

'গ' শীর্ষ

$$a = m$$

1) a
2) n
3) m এর
1) x অথবা y ধরা হয়
2) $x=\log a^m$
$y=\log a^n$ ধরতে হবে।
3) $a^x=m,\ a^y=n$
4) ঘাতের যোগ হয়
5) a^{x+y}
6) $a^{x+y}=mn$

হ'লে কি ক'রতে হবে ?
2) 2 কে কি বলা হয় ?
3) 3 কে কি বলা হয় ?
4) লগারিদম্ কাকে বলে ?
5) এ কি ভাবে লেখা হয় ?
1) নিধান কত ?
2) এর ঘাতের সূচক কত ?
3) 2 কার লগারিদম্ ?
1) নিধান কত ?
2) এর ঘাতের সূচক কত ?
3) n কার লগারিদম্ ?
1) বীজগণিতে যখন কোন লুপ্ত সংখ্যা বা অজানা রাশি থাকে তখন সাধারণতঃ কি করা হয় ?
2) $\log a^{mn}=\log a^m+\log a^n$ প্রমাণ ক'রতে হ'লে কি ক'রতে হবে ?
3) m ও n এর মান কি হবে ?
4) সমান নিধান বিশিষ্ট রাশি গুণ করার সময় ঘাতের কি পরিবর্তন হয় ?
5) $a^x \times a^y$ এর গুণফল কত ?
6) নূতন অভেদ কি দাঁড়াল ?
7) উভয় পক্ষে লগ বসালে কি পাওয়া যায় ?
8) x ও y এর মান বসালে কি পাওয়া যায় ?
1) $\log a\left(\frac{m}{n}\right)=\log a^m-\log a^n$

7) $\log a^{mn} = x + y$

8) $\log a^{mn} = \log a^m + \log a^n$

1) $x = \log a^m$

$y = \log a^n$

2) $a^x = m$

$a^y = n$

3) বিয়োগ হবে।

4) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

5) $a^{x-y} = \frac{m}{n}$

6) $\log a\frac{m}{n} = x - y$

7) $\log a\frac{m}{n} = \log a^m - \log a^n$

কি ভাবে প্রমাণ ক'রবে ?

2) m ও n এর মান কি হবে ?

3) সমান খাত বিশিষ্ট রাশির ভাগ ক'রবার সময় ঘাতের কি পরিবর্তন হবে ?

4) a^x ও a^y এর ভাগফল কত ?

5) অভেদটি কি দাঁড়াল

6) উভয় পক্ষে লগ্ বসালে কি পাওয়া যায়

7) x ও y এর মান বসালে কি পাওয়া যায়।

ছাত্রদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষা করার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নরূপ প্রশ্ন ক'রেন।

অভিযোজন—1) $a^0 = 1$ হ'লে, 0 কার লগ্ হবে ?

2) $5^2 = 25$ হ'লে, 2 কার লগ্ হবে ?

3) $9^2 = 81$ হ'লে, 81 এর লগ্ কত হবে ?

4) $\log_2 81 =$ কত ?

বাড়ীর কাজ—1) log 324 এর মান বাহির কর, যখন নিধান $= 3\sqrt{2}$

2) দেখাও যে $7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2$

3) যদি $\log \frac{x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $xyz = 1$

পাঠ টিকা—১১

বিদ্যালয়—

শ্রেণী :—XI

ছাত্র সংখ্যা :—

বিষয়—ত্রিকোণমিতি

সাধারণ পাঠ—ত্রিভুজের গুণাবলী

বিশেষ পাঠ—কোন ত্রিভুজের বাহু ও বিপরীত

গড় বয়স :—16+ কোণের সাইনের সম্বন্ধ বা অনুপাত নির্ণয়।

সময় :—40 মিনিট

শিক্ষক :— অদ্যকার পাঠ—ঐ

তারিখ :—

উদ্দেশ্য—ত্রিভুজের বাহুগুলির ও বিপরীত কোনগুলির সাইনের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয়ে সহায়তা করা এবং ছাত্রদের চিন্তাশক্তি, কল্পনাশক্তি ও বিচার ক্ষমতার বিকাশ সাধন করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের প্রয়োজনীয় সরঞ্জামাদি।

আয়োজন—অদ্যকার পাঠে ছাত্রদিগকে আকৃষ্ট ক'রার জন্য শিক্ষক মহাশয় তাদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে শ্রেণীকক্ষে নিম্নানুরূপ প্রশ্নের অবতারণা ক'রবেন :

১। ত্রিভুজের বাহু কয়টি ?

২। ত্রিভুজের কোণ কয়টি ?

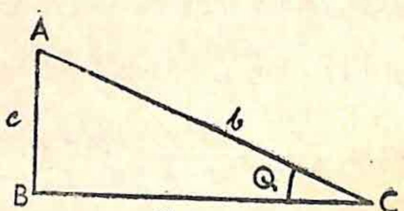
৩। ত্রিভুজের বাহুগুলিকে সংক্ষেপে কিভাবে প্রকাশ করা হয় ?

৪। ত্রিভুজের কোণগুলিকে সংক্ষেপে কিভাবে প্রকাশ করা হয় ?

৫। ত্রিভুজের বাহুগুলির সঙ্গে কোণগুলির কোন সম্পর্ক আছে কি ?

পাঠ ঘোষণা—"অদ্য আমরা কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি বিপরীত কোণের সাইনগুলির সমানুপাতী—এই সমস্যার সমাধান সম্পর্কে আলোচনা ক'রব"—এই বলে শিক্ষক মহাশয় পাঠ ঘোষণা ক'রবেন।

উপস্থাপন—প্রথমে শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে একটি সমকোণী ত্রিভুজ



অঙ্কন ক'রবেন এবং ছাত্রদের সহায়তার কয়েকটি সাধারণ প্রশ্নের উত্তর তৈরী ক'রবেন :

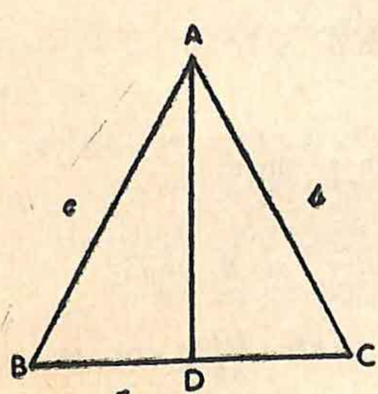
প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
1. *ABC* ত্রিভুজের কোন্ কোণটি এক সমকোণ ?	1. $\angle ABC = 1$ সমকোণ।

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
2. ঐত্রিভুজের অতিভুজ কোন্‌টি ?	2. AC বাহু অতিভুজ।
3. লম্ব কোন্‌টি ?	3. AB বাহু লম্ব।
4. ভূমি কোন্‌টি ?	4. BC বাহু ভূমি।
5. θ কোণের সাইনকে ত্রিভুজের কি কি বাহুর অনুপাতে প্রকাশ করা যায় ?	5. $\sin\theta = \dfrac{AB}{AC}$
6. θ কোণের কোসাইনকে কি ভাবে প্রকাশ করা যায় ?	6. $\cos\theta = \dfrac{BC}{AC}$
7. θ কোণের ট্যানজেন্টকে কি ভাবে প্রকাশ করা যায় ?	7. $\tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$.

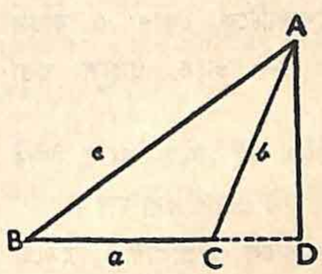
এর পর শিক্ষক মহাশয় বলবেন যে, "আমরা দেখতে পেলাম ত্রিভুজের কোনগুলির সহিত বাহুগুলির একটা সম্পর্ক আছে। এখন আমরা প্রমাণ ক'রব যে কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি বিপরীত কোণগুলির সাইনের সমানুপাতী অর্থাৎ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}."$$

ইহার পর শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে নিম্নানুরূপ তিনটি চিত্র অঙ্কন ক'রবেন

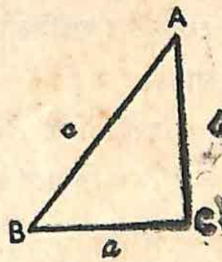


১ নং চিত্র



২ নং চিত্র

৩ নং চিত্র →



এবং ছাত্রদের সহায়তায় উপরোক্ত সমস্যাটির সমাধান সম্পর্কে আলোচনা ক'রবেন।

প্রশ্ন

উপরের চিত্রে ত্রিভুজগুলির কোন্‌টি কি জাতীয় ত্রিভুজ ?

A বিন্দু থেকে কাহার উপর লম্ব অঙ্কিত করা হ'য়েছে।

প্রথম চিত্রে *ABD* ত্রিভুজে sin *ABD* কে কি ভাবে প্রকাশ করা যায় ?

এর থেকে *AD*-র মান কি ভাবে নির্ণয় করা যেতে পারে ?

ঐ চিত্রে *ACD* ত্রিভুজে sin *ACD* কে কি ভাবে প্রকাশ করা যায় ?

এর থেকে *AD*-র মান কিভাবে নির্ণয় করা যেতে পারে ?

*AD*র যে দু'টি বিভিন্ন মান পাওয়া গেল, সে দু'টি কি কি এবং কেমন ?

সমীকরণটিকে কোণ ও বাহুর অনুপাতে কি ভাবে প্রকাশ করা যায় ?

এইভাবে *B* হইতে *AC*র উপর লম্ব টানিয়া কি প্রমাণ করা যায় ?

তাহা হ'লে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজে কোণ ও বাহুগুলির অনুপাত কি রকম পাওয়া গেল ?

দ্বিতীয় চিত্রে *ABD* ত্রিভুজে sin *ABD* কে কিভাবে প্রকাশ করা যায় ?

ACD ত্রিভুজে sin *ACD*কে কি ভাবে প্রকাশ করা যায় ?

সম্ভাব্য উত্তর

১নং চিত্রে *ABC* সূক্ষ্মকোণী, ২নং চিত্রে স্থূলকোণী এবং ৩নং চিত্রে সমকোণী ত্রিভুজ।

১নং চিত্রে *BC*র উপর, ২নং চিত্রে *BC*র বর্দ্ধিতাংশের উপর এবং ৩নং চিত্রে *A* বাহু নিজেই লম্ব।

$$\sin ABD=\frac{AD}{AB}$$

$AD=AB \sin ABD$ বা c

$$\sin ACD=\frac{AD}{AC}$$

$AD=AC \sin ACD$ বা $b \sin c$.

$AD=c \sin B$ এবং $AD=b \sin c$ এবং $c \sin B=b \sin c$

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

$\sin ABD=\frac{AD}{AB}$ বা $AD=AB \sin ABD=c \sin B.$

$\sin ACD=\frac{AD}{AC}$ বা $AD=AC \sin ACD=b \sin (\pi-c)=b \sin c.$

প্রশ্ন

*AD*র এই দু'টি মান হ'তে কি সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় ?

এভাবে *B* হতে *AC*র উপর লম্ব টানিয়া কি প্রমাণ করা যায় ?

তাহা হ'লে স্থূলকোণী ত্রিভুজে কোণ ও বাহুগুলির অনুপাত কি রকম পাওয়া গেল ?

তৃতীয় চিত্রে *ABC* ত্রিভুজে sin *A*-কে কি ভাবে প্রকাশ করা যায় ?

sin *B* = কত ?

sin *c* = কত ?

তা'হলে sin *A*, sin *B* ও sin *C*'র' মানের মধ্যে কি সম্বন্ধ আছে ?

তা হ'লে সমকোণী ত্রিভুজে কোণ ও বাহুগুলির মধ্যে কি রকম অনুপাত পাওয়া গেল ?

এর থেকে কি সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া সম্ভব ?

সম্ভাব্য উত্তর

$c \sin B = b \sin c$ বা $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$.

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ বা $\frac{a}{\sin A} = C.$

$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$ বা $\frac{b}{\sin B} = C.$

$\sin C = \sin 90° = 1.$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = c = \frac{c}{\sin C}$

$[\therefore \sin C = 1]$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$

যে কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি বিপরীত কোণগুলির সাইনের সমানুপাতী।

অভিযোজন—ছাত্রদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষা করার নিমিত্ত শিক্ষকমহাশয় শ্রেণীকক্ষে নিম্নানুরূপ প্রশ্নাবলীর অবতারণা ক'রবেন এবং প্রয়োজন বোধে ছাত্রদিগকে ব্যক্তিগতভাবে সাহায্য ক'রবেন।

(১) যে কোন ত্রিভুজের কোণগুলির সহিত বাহুগুলির কি রকম সম্পর্ক আছে ?

(২) কোন কোণের সাইন বলতে কি বোঝায় ?

(৩) ত্রিভুজের কোণগুলির সহিত উহাদের বিপরীত বাহুগুলির কি রকম সম্পর্ক আছে ?

বাড়ীর কাজ—শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদিগকে বাড়ী থেকে উপরোক্ত সমস্যাটির সমাধান লিখে আনতে বলবেন।

সংকেত

বিষয়—জ্যামিতি

বিশেষ পাঠ ঃ—একই সরলরেখায় অবস্থিতি নয়, এমন তিনটি বিন্দুর ভিতর দিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন ক'রতে হবে।

আয়োজন—ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বৃত্ত ইত্যাদি অঙ্কন করে কোনটির কি নাম তা জিজ্ঞাসা করা চলবে। শেষ প্রশ্ন হবে—

তেপান্তরের মাঠে, তাল তেঁতুল বটে
সমান দূরে রেখে, গুপ্তধনে দেখে।

উপস্থাপন—এই স্তরে প্রথমে ছড়াটির উপর ভিত্তি ক'রে গুপ্তধনের স্থান নির্ণয় ক'রতে হবে। যেমন ঃ

গুপ্তধন থেকে তাল ও তেঁতুল গাছের দূরত্ব কেমন?

যদি দু'টি গাছকে একটি সরলরেখা দ্বারা যোগ করা যায়, তবে ঐ রেখার উপর কোন বিন্দু দুটি গাছ থেকে সমান দূরে অবস্থিত?

লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর কোন বিন্দুর দূরত্ব কেমন?

তেমনি তেঁতুল ও বটের দূরত্ব ও সমদূরবর্তী বিন্দু?

দুটি সরলরেখার (তাল—তেঁতুল, তেঁতুল—বট) লম্বদ্বিখণ্ডক দুটি যে বিন্দুতে ছেদ করেছে—সেই বিন্দু থেকে গাছ তিনটির দূরত্ব ?

গুপ্তধন কোথায় আছে?

এরপর জ্যামিতিক অঙ্কন ও প্রমাণ। [এ উপপাদ্যটি ব্যবহারিক প্রয়োগের সাহায্যেও বোঝানো সম্ভব]

বিষয়—বীজগণিত

বিশেষ পাঠ—সহজ সমীকরণ

উপস্থাপন—এই স্তরে দাঁড়ি পাল্লা, চায়ের প্যাকেট, বাটখারা প্রভৃতির সাহায্যে ভারসাম্যের নীতিটি বোঝানো সম্ভব। দু'টি পাল্লাতে সমান সমান ওজন যোগ ক'রলে বা পাল্লাগুলি থেকে সমান ওজনের বাটখারা বাদ দিলে ভারসাম্য বজায় থাকে—এই দৃষ্টান্ত থেকেই সমীকরণের নিয়ম বোঝানো সম্ভব।

বিষয়—পাটীগণিত

বিশেষ পাঠ—চার দেওয়ালের ক্ষেত্রফল ঃ

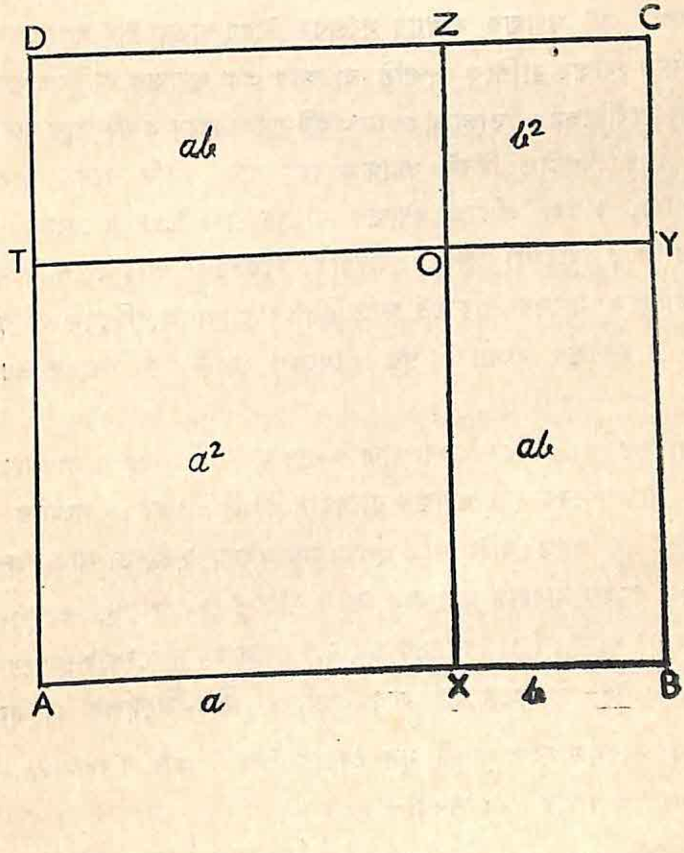
উপস্থাপন—কার্ডবোর্ডের মডেল বা চকের বাক্সের সাহায্যে চারটি আয়তক্ষেত্র পাওয়া যাবে। সেগুলির ক্ষেত্রফলের যোগফলই চার দেওয়ালের ক্ষেত্রফলের সমান হবে।

দৈর্ঘ্যের দিকের দেওয়াল	প্রস্থের দিকের দেওয়াল	দৈর্ঘ্যের দিকের দেওয়াল	প্রস্থের দিকের দেওয়াল

বিষয় –বীজগণিত

বিশেষ পাঠ–$(a+b)^2$.

উপস্থাপন—কার্ডবোর্ডের মডেলের সাহায্যে ও ছবি এঁকে এভাবে বোঝানো সম্ভব।



॥ পরিশিষ্ট ॥

ক বিভাগ

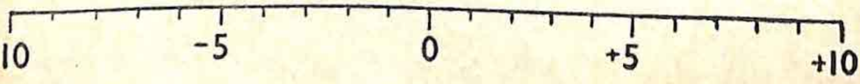
বীজগণিত সম্বন্ধীয়

দিক্ নির্দেশক সংখ্যা (Directed Number) ঃ

গণিত শাস্ত্রের উদ্ভবের পর প্রায় এক হাজার বৎসরের মধ্যে গণিতবিদেরা দিক নির্দেশক সংখ্যা ব্যবহার করতে শেখেন নি। সংখ্যার গুণ ও ভগ্নাংশের ব্যবহার তাঁরা শিখেছিলেন। ধীরে ধীরে জমা ও খরচ বোঝবার জন্য ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্নের উদ্ভব হ'ল। এই ঋণাত্মক সংখ্যার থেকেই দিক নির্দেশক সংখ্যার ধারণা অর্জিত হয়।

ভারতবর্ষে এই ঋণাত্মক সংখ্যায় সর্বপ্রথম উল্লেখ পাওয়া যায় ব্রহ্মগুপ্তের লেখার মধ্যে। তিনি ধনাত্মক রাশিকে সম্পত্তি বা আয় এবং ঋণাত্মক রাশিকে ঋণ বা ব্যয় বলে আখ্যা দিয়েছিলেন। তাছাড়া কোন একটি সরলরেখার একটি প্রান্ত যদি ধনাত্মক হয়, তবে তার বিপরীত দিকটি ঋণাত্মক হবে বলে তিনি ধরে নিয়েছিলেন। Diophantus, ভাস্কর, এঁরাও ঋণাত্মক রাশির কথা উল্লেখ ক'রেছেন। হিন্দুরা ঋণাত্মক রাশিকে বিয়োজ্য হিসাবে ব্যবহার করতেন। আরবদেশে ফিবোনেক্কিও ঋণাত্মক রাশিকে লাভের পরিবর্তে ক্ষতি হিসাবে ব্যাখ্যা করেছিলেন। ষ্টিফেল-এর মত ছিল যে ঋণাত্মক সংখ্যা 0 (শূন্য) থেকেও ছোট এবং এ ধারণা এখনও চলে আসছে।

সাধারণত পাটীগণিতে কেবলমাত্র ধনাত্মক (positive) সংখ্যাই ব্যবহার করা হয়। বীজগণিতেই ছাত্র ঋণাত্মক রাশির সঙ্গে পরিচিত হয়। সংখ্যার সাহায্যে বিভিন্ন ক্ষেত্রে যে সমস্ত জটিল কাজ সুসপন্ন করা সম্ভব হ'চ্ছে, তা আর সম্ভব হত না যদি ঋণাত্মক সংখ্যা ব্যবহার করা না হ'ত। কাজেই দেখা যাচ্ছে, সংখ্যার ব্যবহার দু'রকমের হ'তে পারে ঃ (১) ধনাত্মক ও (২) ঋণাত্মক। নির্দেশ অনুসারে সংখ্যাটি কি জাতীয় তা উপলব্ধি করতে হয় বলে এগুলিকে **দিক-নির্দেশক সংখ্যা** বলে। দিক-নির্দেশক সংখ্যাগুলিকে একটি মূল রেখার উপর (*axis of reference*)বিন্দুর সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যেমন ঃ—



কাজেই দেখা যাচ্ছে, নির্দেশক সংখ্যাগুলি একই সঙ্গে দিক (direction) এবং বিস্তার বা প্রসার (magnitude) সূচিত করে। এই সংখ্যাগুলিকে সাধারণতঃ বন্ধনীর মধ্যে রেখে প্রকাশ করা হয়, যেমন ঃ—$(+3)$, (-5), $(+x)$, $(-y)$, ইত্যাদি। যে সরলরেখার সাহায্যে নির্দেশক সংখ্যাগুলি সূচিত করা হয়, তাকে Vector বলে।

নির্দেশক সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা দিতে হ'লে বাস্তব উদাহরণের সাহায্য নিলেই ভালো হয়। ঋণাত্মক রাশির ধারণাটি ছাত্রেরা সহজে বুঝে উঠতে পারে না। এজন্য নির্দেশক সংখ্যা শিক্ষা দেবার সময় কেবলমাত্র কম-বেশীর ধারণাটিই না শিখিয়ে লাভ-ক্ষতি, উত্তর-দক্ষিণ, আগে-পরে, অক্ষাংশ-দ্রাঘিমাংশ, এ সমস্ত ধারণাও ব্যবহার করা উচিৎ। এর ফলেই ঋণাত্মক রাশি সম্বন্ধে ছাত্র পরিষ্কার জ্ঞান অর্জন ক'রতে পারবে। কয়েকটা উদাহরণ দিলেই ব্যাপারটা সহজ হবে।

5 টাকা লাভ $=(+5)$, তাহ'লে 5 টাকা ক্ষতি $=(-5)$,

উত্তর দিকে 3 মাইল $=(+3)$, তাহ'লে দক্ষিণ দিকে 3 মাইল $=(-3)$

10 দিন আগে $=(-10)$, তা হলে 10 দিন পরে $=(+10)$ ইত্যাদি।

এরপর ছোট ছোট প্রশ্নের সাহায্যে ছাত্রদের নির্দেশক সংখ্যার জ্ঞান অর্জিত হ'য়েছে কিনা তা পরীক্ষা করা যেতে পারে। যেমন ঃ—

(1) আমি প্রথম ঘণ্টায় উত্তর দিকে 4 মাইল গেলাম এবং তার পরের ঘণ্টায় দক্ষিণ দিকে 3 মাইল ফিরে এলাম। যেখান থেকে যাত্রা ক'রেছিলাম, সেখান থেকে এখন আমি কতদূর ?

(2) আমি প্রথম ঘণ্টায় উত্তর দিকে 4 মাইল গেলাম এবং তার পরের ঘণ্টায় উত্তর দিকে আরো 3 মাইল গেলাম। যাত্রার স্থান থেকে এখন আমি কতদূরে আছি ?

এখন অমরা দু'রকমের সংখ্যার সঙ্গে পরিচিত হ'লাম এবং $+3-$ চিহ্নের বিভিন্ন ব্যবহার ও লক্ষ্য করলাম। এই দু'টি চিহ্ন সম্পর্কে সংক্ষিপ্ত মতামত হ'ল ঃ—

(ক) $+$ এবং $-$ চিহ্ন দু'টি বিভিন্ন জাতীয় সংখ্যা সূচিত করে, ধনাত্মক ও ঋণাত্মক। সখ্যা দু'টিকে (a, a^1) বলে চিহ্নিত ক'রলে $a=-a^1$ এবং $a^1=-a$ হবে।

(খ) $+$ এবং $-$ চিহ্ন দিক নির্দেশ ক'রে থাকে।

(গ) $+$ এবং $-$ চিহ্ন পরস্পর বিপরীত। সমান সমান সংখ্যার বিপরীত সংখ্যাগুলির যোগফল 0 হয়। অর্থাৎ $(+a)+(-a)=0$

(ঘ) +এবং − চিহ্ন কার্য্যপ্রণালীও সূচিত করে। +চিহ্ন বলে দেয় যে সংখ্যাগুলি যোগ করা হচ্ছে (Resultant) এবং − চিহ্ন বলে দেয় যে সেগুলিকে পৃথক করা হ'চ্ছে (Component)।

কেবলমাত্র ধনাত্মক রাশির গুণ করার সময় চিহ্ন ব্যবহার করা অপরিহার্য্য হ'য়ে পড়ে। একেই বলা হয় "Rule of Sings," যেটিকে বীজগণিতে এভাবে প্রকাশ করা হয়ঃ—

$$(+a)\times(+b=+ab, \qquad (-a\times(+b)=-ab,$$
$$(+a)\times(-b)=-ab. \qquad (-a)\times(-b)=+ab.$$

এখন প্রশ্ন হ'ল—এই নিয়ম চারটিকে কিভাবে প্রমাণ করা যেতে পারে? সত্য কথা বলতে কি, এর প্রমাণ করা যায় না। Young এর মতে, "There can be no such thing as an 'a priori' proof of these laws of Sings ; they are pure conventions, finding their justification on the logical side in their consistency with previous assumptions and on the practical side in their serviceableness." (Fundamental concepts of Algebra and Geometry—J. W. Young)

যাহোক প্রমাণ করা সম্ভব না হ'লেও নিয়মগুলি ব্যাখা করা সম্ভব। চিহ্ন সম্বন্ধীয় নিয়মগুমি দৈর্ঘ্য-প্রস্থ, লাভ-ক্ষতি প্রভৃতির সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যেতে পারে। একটা উদাহরণ দিয়ে বোঝান যাক্।

(১) কোন একটি স্কুলে 3 জন ছাত্র ভর্ত্তি হ'ল। এরা প্রত্যেকে 3 টাকা ক'রে বেতন দেয়। ছাত্র তিনটি ভর্ত্তি হওয়াতে স্কুলের ছাত্রসংখ্যা বেড়ে গেল। সুতরাং ছাত্রসংখ্যা (নূতন ভর্ত্তি) হল (+3)। তারা বেতন দেয়, অর্থাৎ স্কুলের আয় হয়। সুতরাং বেতনকেও আমরা (+3) বলতে পারি। এখন এই তিনজন ছাত্রের জন্য স্কুলের মোট আয় হ'চ্ছে 9 টাকা যা এই ভাবে প্রকাশ করা যায়ঃ—

$$(+3)\times(+3)=+9$$

(২) যদি ঐ তিন জন ছাত্র ভর্ত্তি হ'ত; কিন্তু কোন বেতন দিত না—(অর্থাৎ ফ্রী) তাহলে নূতন ছাত্র হ'ত (+3)। ছাত্ররা ফ্রী থাকাতে স্কুলের আয় হ'ত না বরং ক্ষতি হ'ত এবং তা প্রকাশ করা করা যেত (−3) এভাবে। এই তিন জন ছাত্রের মোট ক্ষতি হ'ত 9 টাকা এবং তা এভাবে প্রকাশ করা যায়।

$$(+3)\times(-3)=-9$$

[লাভ যদি + হয়, ক্ষতি তবে − হবে।

(৩) 3 টাকা ক'রে বেতন দিত, এমন তিনজন ছাত্র যদি স্কুল ছেড়ে চলে যেত, তাহ'লে স্কুলের ছাত্র তিনজন কমে যেত। ছাত্ররা তিন টাকা করে বেতন দিত ; সুতরাং তারা চলে যাওয়াতে স্কুলের 9 টাকা ক্ষতি হ'ত। এখানে ছাত্র সংখ্যা (−3) এবং বেতন (+3)।

সুতরাং $(-3)\times(+3)=-9$

(৪) ফ্রী ছিল, এমন তিনজন ছাত্র যদি স্কুল ছেড়ে চলে যায়, সেক্ষেত্রে প্রকৃতপক্ষে স্কুলের 9 টাকা লাভই হবে। এখানে ছাত্রসংখ্যা (−3) এবং যেহেতু ছাত্ররা ফ্রী ছিল, সেই জন্য বেতন (−3)

সুতরাং $(-3)\times(-3)=+9$ হবে।

এইভাবে কতকগুলি উদাহরণের সাহায্যে ছাত্রদের গুণ যেমন শেখানো যাবে বিপরীত পদ্ধতিতে ভাগও তেমনি শেখানো সম্ভব। বেশ কিছু সংখ্যক উদাহরণের পর তারা একটি সাধারণ সূত্র তৈরী ক'রে নিতে পারে। যেমন—

$$\frac{+\text{ চিহ্ন}}{+\text{ চিহ্ন}}=+\text{চিহ্ন},\ \frac{+\text{ চিহ্ন}}{-\text{চিহ্ন}}=-\text{ চিহ্ন},\ \frac{-\text{ চিহ্ন}}{+\text{চিহ্ন}}=-\text{চিহ্ন},$$

$$\frac{-\text{ চিহ্ন}}{-\text{চিহ্ন}}-+\text{চিহ্ন}$$

সূত্র (Formulae) ঃ—বীজগণিতের ক্ষেত্রে সূত্রের স্থান বেশ গুরুত্বপূর্ণ। সূত্রের সাহায্যে খুব সংক্ষিপ্ত উপায়ে কোন বড় তথ্যকে প্রকাশ করা সম্ভব (Compressed Information)। কোন একটি বিশেষ শ্রেণীভুক্ত সমস্যার সমাধানের ক্ষেত্রে সূত্রকে একটি সাধারণ নিয়মের বিবৃতি বলা যেতে পারে। সূত্র ব্যবহারের ফলে চিন্তাশক্তি ও সময়ের অপব্যয় বন্ধ করা যায়।

সূত্র শিখনের সময় বিশেষ যত্ন নিতে হবে। ছাত্ররা যেন অন্ধভাবে সূত্রগুলি মুখস্থ করা ও যান্ত্রিকভাব সেগুলির প্রয়োগ করার থেকে বিরত থাকে। তারা যেন নিজেরাই সূত্রগুলি আবিষ্কার ক'রতে পারে। এতে তারা যেমন আনন্দ লাভ ক'রবে তেমনি তাদের আগ্রহও বৃদ্ধি পাবে। তাছাড়া আবিষ্কার ক'রেছে বলে সূত্রগুলির বাস্তব উপকারিতা সম্বন্ধে ও তারা অবহিত থাকবে।

সূত্র শিক্ষা দেবার সময় শিক্ষককেও বিশেষ লক্ষ্য রাখতে হবে। $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, এই সূত্রটি একেবারে ছাত্রদের সামনে উপস্থাপিত না ক'রে পাটীগণিতের সাহায্যে বর্গের ধারণা দেওয়া যেতে পারে। তারপর $a+b$কে $a+b$ দ্বারা গুণ ক'রতে বলা যেতে পারে। উপযুক্ত প্রশ্নের সাহায্যে শিক্ষক ছাত্রদের

এই সিদ্ধান্তে উপনীত করতে পারবেন যে দু'টি রাশির যোফলের বর্গ = প্রথম রাশির বর্গ + রাশি দু'টির গুণফলের দ্বিগুণ + দ্বিতীয় রাশির বর্গ। সূত্র শিক্ষা দিবার পর সূত্রের প্রয়োগ ও প্রয়োজনীয়তা সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে হবে। সূত্রের সাহায্যে হিসাব পত্র বা গণনার কি রকম সুবিধা হয়, তার দু'একটা উদাহরণ দিলে ভালো হয়। যেমন—

$(517)^2 = (500+17)^2$ এই ভাবে $(a+b)^2$ এর সূত্র এবং $(285)^2 = (300 - 15)^2$ এই ভাবে $(a-b)^2$ এর সূত্রে প্রয়োগ করা যায়।

উৎপাদক (Factors) :—পাটীগণিতে অনুপাত সম্বন্ধীয় সমস্যা সমাধানের সময় প্রাসঙ্গিক ভাবেই উৎপাদক ব্যবহার করা হয়। কিন্তু বীজগণিতে উৎপাদকের একটা গুরুত্বপূর্ণ স্থান আছে। কিন্তু অধিকাংশ ছাত্রের নিকট উৎপাদক ভীতির বস্তু! এর কারণ হিসাবে বলা যেতে পারে যে ছাত্রেরা প্রথম থেকেই উৎপাদকের আকৃতিটি (Form) উপলব্ধি করার চেষ্টা করে না। বিভিন্ন উৎপাদকের মধ্যে যে একটা আকৃতিগত মিল আছে, তা খুঁজে দেখার চেষ্টাও তারা করে না। বিভিন্ন উৎপাদকের বিভিন্ন নাম দিয়ে জটিলতার সৃষ্টি করা হয়। $ma+nb$ য়ে জাতীয় উৎপাদক, $5x+5y$, $(x+2y)(2a+1)+(2x+y)(2a+1)$, $a(2a+1)+b(2a+1)$ ইত্যাদি ও সেই জাতীয় উৎপাদক। তবে দেখা গেছে middle-term বা trinomial জাতীয় উৎপাদকে ছাত্রদের আগ্রহ অপেক্ষাকৃত বেশী। সেইজন্য এইজাতীয় উৎপাদকই ছাত্রদের ভালোভাবে শেখানো উচিত। তাছাড়া এ জাতীয় উৎপাদক সমাধানের ক্ষেত্রেও বিশেষ কার্য্যকরী।

বিভিন্ন মডেল, নক্শা বা চিত্রের সাহায্যে ছাত্রদের উৎপাদক সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জনে সহায়তা করা সম্ভব। $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $ac+bc=(a+b)c$, $ax-bx=(a-b)x$ ইত্যাদি দ্বিতীয় উৎপাদকের মডেল ও নক্শা করা সম্ভব। প্রথমে common factor দিয়ে শুরু করা বাঞ্ছনীয়। তারপর ধীরে ধীরে middle term factor, Harder factor ইত্যাদি শুরু করা যেতে পারে। লক্ষ্য রাখতে হবে, ছাত্ররা যেন নির্ভুলভাবে উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে শেখে। উৎপাদক নির্ণয় করা হ'য়ে গেলে মিল করার পদ্ধতিটিও তাদের শিখিয়ে দিতে হবে।

সমীকরণ (Equations) :—বীজগণিত-শিখন পদ্ধতিতে সমীকরণের কথা আগেই বলা হ'য়েছে। প্রকৃতপক্ষে বীজগণিতে সমীকরণের গুরুত্ব অনেকখানি। বীজগণিতের কঙ্কালে সমীকরণই রক্তমাংস যোগ ক'রে সে'টিকে প্রাণবন্ত ক'রে তুলতে সক্ষম। সমীকরণ শেখাবার জন্য দাঁড়িপাল্লার সাহায্যে ভারসাম্য নিয়মটি (balance

method) খুবই উপযোগী। কোন একটি দাঁড়ি-পাল্লার একদিকে চায়ের প্যাকেট বা অন্য কিছু রেখে অপর দিকে ওজন রেখে কি ভাবে ভারসাম্য বজায় রাখা হ'চ্ছে তার দৃষ্টান্তের সাহায্যে সমীকরণ শেখানো সহজ হয়। বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন জিনিসের ওজনের পর ঐ জাতীয় সহজ মৌখিক বা লিখিত সমস্যার সমাধান ক'রতে দেওয়া উচিত। অবশ্য সমস্যার সমাধান করতে গিয়ে ছাত্র যেন প্রত্যেকটি স্তর সুস্পষ্ট ভাবে বুঝতে পারে এবং যুক্তির সাহায্যে বোঝাতেও পারে। স্তরগুলিতে 'কেন' (why) এবং সুতরাং (so) এর ব্যবহার যেন তার কাছে অর্থপূর্ণ হয়। কোন সমীকরণের সমাধান হ'য়ে যাবার পর যে সমাধানটি পাওয়া গেল, তা সমীকরণে বসিয়ে দেখতে হবে যে সত্যিই সমাধান ঠিক হ'য়েছে কি না।

সমীকরণ কথাটির অর্থ হল—সমান করা। সমীকরণের সমাধান ক'রতে গেলে দু'টি দিককে সমান ক'রতে হবে। যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ-যাই করা হোক্ না কেন, দু'টি দিকেই যেন একই প্রণালী অনুসরণ করা হয়। আর একটি জিনিস সমীকরণের ক্ষেত্রে বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। তা হ'ল **অথবা** ও = চিহ্নের ব্যবহার। সমীকরণের প্রতিটি লাইনে একটিমাত্র = চিহ্ন থাকা বাঞ্ছনীয় এবং বিভিন্ন লাইনের চিহ্নগুলি যেন পর পর সাজানো থাকে। প্রথমে সহজ সমীকরণে ছাত্রদের অভ্যস্ত ক'রে নিতে হবে। তবেই তাদের পক্ষে জটিল সমীকরণের সমাধান করা সম্ভব হবে। মৌখিক ভাবেও ছাত্রকে সমাধান করার সুযোগ দিতে হবে। যখন লিখিত ভাবে সমাধান করা হবে, তখন প্রতিটি স্তর যেন লিপিবদ্ধ করা হয়। যেমন:—

$6x = 36$ এই সমীকরণে একেবারে $x = 6$ লিখলে চলবে না। লিখতে হবে: উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা ভাগ করিয়া:—

$$\frac{6x}{6} = \frac{36}{6}$$

$$\text{or, } x = 6.$$

এ ভাবে সমাধান করার অনেক সুবিধা আছে এবং ভুল হবার সম্ভাবনা কম। প্রতিটি স্তর না লিখে মৌখিকভাবে সমাধান ক'রতে গেলে ভুল হবার সম্ভাবনা বেশী থাকে। যেমন:—$4x = 6$, তাড়াতাড়িতে $x = 2$ লিখে দেওয়া অসম্ভব নয়।

সমীকরণ শেখাতে গিয়ে প্রথমেই ছাত্রদের কতকগুলি ধারণার সঙ্গে পরিচিত ক'রে দেওয়া হয়। সেগুলি হ'ল:—দিক পরিবর্তন হ'লেই চিহ্নের পরিবর্তন এবং বজ্রগুণনের (cross multiplication) ধারণা। এগুলি পরিকল্পিত পদ্ধতিতে শেখাবার কোন প্রয়োজনীয়তা নেই। ছাত্র নিজে নিজেই ক'রতে গিয়ে এ-গুলি

শিখে যাবে। ভগ্নাংশযুক্ত সমীকরণের সমাধান যখন পাওয়া যায়, তখন তা সমীকরণে বসিয়ে মিল ক'রে দেখতে হয় সমাধান ঠিক হ'য়েছে কি না? মিল করার সময় সমীকরণটির বাম দিক ও ডান দিকের মান পৃথক ভাবে বের ক'রে দেখতে হয় সেই মান হু'টি সমান হ'চ্ছে কি না। যে ভাবে সমীকরণটি দেওয়া থাকে, সেটিকে ঠিক সেইভাবে রেখে সমাধানের মান বসিয়ে মিল করা উচিত নয়। এর কারণ হ'ল-যা প্রমাণ ক'রতে হবে, সেটিকেই প্রথম লাইনে সত্য বলে ধরে নেওয়া হচ্ছে, এবং সমাধান করার পদ্ধতির মধ্যে যদি কোন ভুল হ'য়ে থাকে, তবে সেই ভুলটির পুনরাবৃত্তি করা হ'চ্ছে। কারণ এ ভাবে মিল করা আর সমাধান করা তো এক জাতীয় পদ্ধতিই! তাছাড়া সমীকরণটি মিল করতে গিয়ে হয়তো এই রকম একটি স্তর পাওয়া গেল :

$$\frac{4-1}{3}+4=9-\frac{2\,(12-2)}{5}$$

$$\text{or } 1+4=9-4$$

$$\text{or } 5=5$$

(অর্থাৎ সমাধানটি ঠিক হ'য়েছে)

কিন্তু এখানে যুক্তি কি? যুক্তি হ'ল 5 = 5 হ'য়েছে। এ জাতীয় যুক্তি দেখানো যুক্তিহীন!

সহ-সমীকরণ (Simultaneous Equations) :—সমীকরণ মাত্রেই কোন সমস্যা দিয়ে আরম্ভ করা ভালো। সহ-সমীকরণও সমস্যা দিয়ে আরম্ভ করলে ভালো হয়। যখন হু'টি অজানা সংখ্যা নির্ণয় করতে হয়, তখন একটি সমীকরণে সমাধান সম্ভব নয়। তার জন্য হুটি সমীকরণ প্রয়োজন। সহ-সমীকরণ হু'ভাবে সমাধান করা যায়। একটিকে বলা হয় **Substitution Method**, আর অপরটি হ'ল **Elimination Method**। হু'টি পদ্ধতিরই উদাহরণ দেওয়া হ'ল। ধরা যাক্ সমীকরণ হু'টি হ'ল :—

$$7x-8y=\ 6\text{.........(i)}$$

$$6x+7y=19\text{.........(ii)}$$

প্রথমে Substitution **Method** এর সাহায্যেই সমাধান করা যাক্। এই পদ্ধতিতে প্রথমে হু'টি সমীকরণের মধ্যে যে কোন একটির থেকে অজ্ঞাত রাশিদুটির একটি মান অপরটির দ্বারা প্রকাশ করা হয়। পরে অন্য সমীকরণটিতে প্রথমে ঐ অজ্ঞাত রাশির স্থলে এই মান বসিয়ে একটি সমীকরণ গঠন করা হয় এবং পরে সেটি

সমাধান করে অজ্ঞাত রাশিটির মান নির্ণয় করা হয়। এরপর এই সমীকরণ দুটির যে কোন একটিতে এই মান বসিয়ে অবশিষ্ট অজ্ঞাত রাশিটি নির্ণয় করা হয়। যেমন:—

(i)নং সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$x=\frac{6+8y}{7},$$

(ii)নং সমীকরণে x এর বদলে এই মান অর্থাৎ $\frac{6+8y}{7}$ বসাতে হবে।

ফলে সমীকরণটি দাঁড়াবে: $\frac{6(6+8y)}{7}+7y=19$

অর্থাৎ $y=1$.

এবার y এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে x এর মান নির্ণয় ক'রতে হবে।

এবার Elimination Method এর সাহায্যে সমাধান। Elimination কথাটি ল্যাটিন Limen (=threshold, উঠান) কথা থেকে উদ্ভূত। এই পদ্ধতিতে প্রত্যেক সমীকরণ থেকে অজ্ঞাত রাশি দু'টির যে কোন একটিকে বাদ দেওয়া হয়। এর জন্য দুটি অজ্ঞাত রাশির যে কোন একটির সহগ দুটিকে সমান ক'রে (ভাগ বা গুণের সাহায্যে) তারপর যোগ বা বিয়োগ করা হয়। যেমন:—

(i) নং সমীকরণকে 6 দ্বারা গুণ করলে x এর সহগ হবে 42, আবার (ii) নং সমীকরণে x এর সহগ 42 করতে হলে তাকে 7 দ্বারা গুণ করতে হবে। তারপর বিয়োগ করলেই x বাদ যাবে এবং y এর মান পাওয়া যাবে। তারপর যে কোন একটি সমীকরণে y এর মান বসালেই xএর মানও পাওয়া যাবে।

দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equation): দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে কোন একটি সমস্যার সমাধান করতে গিয়ে কোন একটি সমীকরণের সাহায্য নিতে হবে। প্রথমে এমন ভাবে সমস্যাটি নির্বাচিত করতে হবে যেন সমীকরণটির Middle term উৎপাদকের সাহায্যে সমাধান করা সম্ভব হয়। দেখা গেল, হয়তো সমীকরণটি এই রকম হ'ল: $x^2-12x-64=0$

সুতরাং এখানে যে সমীকরণটি পাওয়া গেল, তার অজ্ঞাত রাশির বর্গ, অর্থাৎ দ্বিতীয় ঘাত বিশিষ্ট পদ আছে। এই রকম সমীকরণকেই দ্বিঘাত সমীকরণ বলে। এই জাতীয় সমীকরণ সমাধান করতে হলে প্রথমে সহজ সমীকরণ নিয়ে অগ্রসর হতে হবে। যেমন:—

যদি $x^2-16=0$ হয়, তবে $x=$ কত? এখানে দেখা যায় x এর মান দুটি, $+4$ অথবা -4

আবার $x^2-16=0$ কে অন্য ভাবেও লেখা যায়। যেমন:—

$$(x+4)(x-4)=0$$

দু'টি রাশির গুণফল যদি '0' হয়, তবে তাদের ভিতর অন্ততঃ একটি '0' হবেই। সুতরাং হয় $(x+4)=0$ অর্থাৎ $x=-4$, নয়তো $x-4=0$, অর্থাৎ $x=+4$

আবার যখন $3x^2+5x-12=0$ এই জাতীয় সমীকরণ উৎপাদকের সাহায্যে সমাধান করতে হয়, তখন বিশেষ যত্ন নেওয়া প্রয়োজন; কারণ

$$3x^2+5x-12=0$$

অথবা $(3x-4)(x+3)=0$

কাজেই হয় $3x-4=0$, নয়তো $x+3=0$, এই স্তরটি লেখা একান্ত প্রয়োজন। ছাত্ররা এতে অভ্যস্ত হয়ে গেলে এই নীতি অনুসরণ করে কতকগুলি দৃষ্টান্ত দিলে ভালো হয়। যেমন:—

যদি $ab=0$ হয় এবং $a=1$ হয়, তবে $b=$ কত?

যদি $(m+n)x=0$ হয়, তবে $x=$ কত?

যদি $(x-1)(y+2)=0$ হয়, $x=2$ হয়, তবে $y=$ কত? ইত্যাদি

এই প্রসঙ্গে ছাত্রদের আর একটি জিনিস শিখিয়ে দিতে হবে। তা হল:—

যদি $X\times Y\times Z=0$ হয় তবে হয় X, নয়তো Y নয়তো $Z=0$ হবে। কিন্তু $X+Y+Z=0$ হ'লে এ রকম কিছু বলা যাবে না

দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করার আর একটি উপায় হচ্ছে একটি সংখ্যাকে সম্পূর্ণ বর্গ করা। যখন সমীকরণটিকে সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না তখনই এই নিয়মটি অনুসরণ করা উচিৎ। যেমন $x^2+4x=12$

অথবা $x^2+4x+4=12+4$ অথবা $(x+2)^2=16=(4)^2$ ইত্যাদি।

এই পূর্ণবর্গ নির্ণয় করার জন্য চর্চার প্রয়োজন হয়। যেমন x^2+4x এর সঙ্গে আর কোন্ রাশি যোগ করলে তা পূর্ণবর্গ হবে, তা নির্ণয় করতে হলে চিন্তার প্রয়োজন। জ্যামিতি ও লেখ চিত্রের সাহায্যে ও এই রকম সমীকরণের সমাধান করা সম্ভব। অবশ্য জ্যামিতির সাহায্যে সমাধান করা একটু কষ্টকর।

দ্বিঘাত সমীকরণের দু ভাবে সমাধান করা সম্ভব। যেমন:

(১) $(x-y)^2-c=0$

$$\therefore (x-y+\sqrt{c})(x-y-\sqrt{c})=0$$

অর্থাৎ হয় $x-y+\sqrt{c}=0$ নয়তো $x-y-\sqrt{c}=0$ হবে।

(২) $(x-y)^2=c$

$\therefore x-y=\pm\sqrt{c}$. অর্থাৎ $x=y\pm\sqrt{c}$.

দুটি পদ্ধতির মধ্যে দ্বিতীয়টিই অপেক্ষাকৃত সহজ। অবশ্য ছাত্রদের দুটি পদ্ধতির সাহায্যেই সমাধান করতে শেখানো উচিত। বীজগণিতে অনেক নিয়মই শিখতে হয়। কিন্তু ঐ নিয়মগুলি শেখাই বীজগণিতের মূল উদ্দেশ্য নয়। ঐ নিয়মগুলির সাহায্য নিয়ে কিভাবে সহজে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করা যেতে পারে তা শেখাই বীজগণিতের উদ্দেশ্য হওয়া উচিত। বিদ্যালয়ে যে বীজগণিত শেখান হয়, তারও উদ্দেশ্য হল সমস্যা সমাধান করা। এই সমস্যার সমাধান করার জন্য আবার সমীকরণ অপরিহার্য্য। এই জন্যই সমীকরণকে বীজগণিতের কেন্দ্রীয় অধ্যায় বলা হ'য়ে থাকে। এই প্রসঙ্গে Young এর বক্তব্য হ'ল : "The central topic of algebra is, beyond question, the equation and its applications. It is this that puts flesh and blood upon the dry bones of the Skeleton of algebraic routine, and the latter should not be developed all in a lump, but as needcd for the solution of equations," (The Teaching of Mathematics. J. W. A Young pp, 302). * * *

"The goal of school algebra is the equation" (Ibid—pp. 303)

অমূলদ সংখ্যা (Irrational Numbers) :—গণিতে আমরা দু'রকমের সংখ্যা ব্যবহৃত হ'তে দেখি—স্বাভাবিক ও অস্বাভাবিক। বিভিন্ন জাতীয় সমস্যা ও তার সমাধানের মধ্য দিয়ে ধীরে ধীরে সংখ্যার ধারণার প্রসার লাভ ঘটেছে। প্রথম দিকে 1, 2, 3, 4 প্রভৃতি সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা গ'ড়ে ওঠে এবং সেগুলিকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হ'ত, প্রকৃতপক্ষে তখন সংখ্যা বলতে ঐ সমস্ত স্বাভাবিক সংখ্যাকেই বোঝাত এবং এও ধারণা করা হ'ত যে সংখ্যা মাত্রই বস্তুবাচক। মূর্ত্ত জিনিসের সাহায্য নিয়েই সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা গ'ড়ে ওঠে। ক্রমশঃ বিমূর্ত্ত সংখ্যার ধারণা জন্মায়। স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির সাহায্যে যোগ ও গুণের কাজ সব সময় করা যেতে পারে ঠিকই, কিন্তু বিয়োগ ও ভাগের কাজ সব সময় করা যায় না। একটি স্বাভাবিক সংখ্যাকে অপর একটি স্বাভাবিক সংখ্যা দিয়ে ভাগ ক'রলে ভাগফল সবসময় পূর্ণ হয় না। এর ফলে সৃষ্টি হ'ল ভগ্নাংশের। তেমনি কতকগুলি ক্ষেত্রে বিয়োগের কাজে জটিলতা দেখা দেবার ফলে ঋণাত্মক সংখ্যার উদ্ভব হ'ল। কিন্তু প্রচলিত সংখ্যার ধারণা নিয়ে

ঋণাত্মক সংখ্যা ব্যাখ্যা করা যেত না। তখন সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণাকে আরো বিস্তৃত করার প্রয়োজনীয়তা দেখা গেল। সংখ্যাকে দিক্ নির্দেশক বলে অভিহিত করা শুরু হ'ল। এই জাতীয় সংখ্যাগুলিকে (দিক-নির্দেশক) একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি মূলবিন্দু (orgin) থেকে দু'টি বিপরীত দিকে বিভিন্ন দূরত্বে অবস্থিত বিন্দু বলে মনে করা হ'ল। যাবতীয় স্বাভাবিক সংখ্যা, ভগ্নাংশ, ধণাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যাকে এই সরলরেখার উপর অবস্থিত বিন্দুর সাহায্যে প্রকাশ করা হ'ল। কিন্তু সংখ্যাটি জানা থাকলে তাকে সরলরেখার উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুতে কল্পনা ক'রতে পারলেও সরলরেখার উপরিস্থ সমস্ত বিন্দুকেই কিন্তু 'স্বাভাবিক বা ভগ্নাংশসূচক সংখ্যাদ্বারা প্রকাশ করা সম্ভব হ'ত না। একটা উদাহরণ দিলে ব্যাপারটি পরিষ্কার হবে। একক বর্গের কর্ণের (2এব বর্গমূল $\sqrt{2}$) দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্বে অবস্থিত যে বিন্দু সে'টিকে কোন স্বাভাবিক সংখ্যা বা ভগ্নাংশের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় না। মূলবিন্দু থেকে দু'দিকে অবস্থিত সমস্ত বিন্দুকেই যদি এক একটি সংখ্যা কল্পনা করা হয়, তবে যে সমস্ত বিন্দু $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ প্রভৃতিকে পরিমাপ করে, তারাও এক একটি সংখ্যা সূচিত করে। আমরা আগেই সংখ্যাগুলিকে সরলরেখার উপর অবস্থিত বিন্দু বলে কল্পনা ক'রে নিয়েছি। কাজেই এক্ষেত্রে $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$ প্রভৃতিকে সংখ্যা বলেই ধরে নিতে হবে কারণ ঐগুলিও কোন না কোন বিন্দুর উপর অবস্থিত। তাহ'লে দেখা গেল, প্রথম দিকে সংখ্যা সম্বন্ধে যে সঙ্কীর্ণ ধারণা ছিল, এখন তা আরো বিস্তৃত হ'য়ে গেল। এখন আমরা দু'রকমের সংখ্যা দেখতে পাচ্ছি। এক রকম হ'ল স্বাভাবিক সংখ্যা ও ভগ্নাংশ এবং আর এক রকম হ'ল $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$ ইত্যাদি জাতীয় সংখ্যা যাদের রৈখিক দৈর্ঘ্যে প্রকাশ করা সম্ভব, কিন্তু স্বাভাবিক সংখ্যা বা ভগ্নাংশের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় না। প্রথম জাতীয় সংখ্যাগুলিকে বলা হয় **মূলদ সংখ্যা** (Rational Number) এবং দ্বিতীয় জাতীয় সংখ্যাগুলিকে বলা হয় **অমূলদ সংখ্যা (Irrational Number)**। মূলদ সংখ্যাকে স্বাভাবিক সংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায়, কিন্তু অমূলদ সংখ্যাকে স্বাভাবিক সংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায় না। অবশ্য এদের অনুপাত হিসাবে প্রকাশ না করা গেলেও অমূলদ সংখ্যার কাছাকাছি অবস্থিত মূলদ সংখ্যার সাহায্যে এগুলিকে প্রকাশ করা যায়। $\sqrt{2}$ এই রকম একটি দৃষ্টান্ত। $\sqrt{2}$ কোন ভগ্নাংশ দিয়ে প্রকাশ না ক'রে আমরা $\sqrt{2}$র কাছাকাছি কোন মূলদ সংখ্যা নিয়ে ক্রমশঃ এগিয়ে যেতে পারি। যে মান পাওয়া যাবে, তা নিকটস্থ মূলদ সংখ্যার চেয়ে বড় হবে কিন্তু $\sqrt{2}$র চেয়ে ছোট হবে। যেমন :—**1·4,**

1·41, 1 414 ইত্যাদি। তেমনি আমাদের প্রচলিত ধারণা অনুযায়ী কোন রাশির বর্গ কখন ঋণাত্মক হয় না। কিন্তু i^2 (Imaginary quantity) এর মান ঋণাত্মক হওয়াতে এ'টিকেও অস্বাভাবিক বা অমূলদ সংখ্যা বলা যেতে পারে। বর্গ, ঘন প্রভৃতির অবঘাতন (evolution) যদি সবসময় সম্ভাবনাময় ক'রতে হয়, তবে অমূলদ সংখ্যার একান্ত প্রয়োজন।

যে সমস্ত গ্রীক পীথাগোরসের মতবাদে বিশ্বাসী ছিলেন, তাঁরা এ কথাও বিশ্বাস ক'রতেন যে কোনও বর্গক্ষেত্রে কর্ণের সঠিক মাপ পাওয়া যায় না। তাঁরা শেষ পর্যন্ত এই সিদ্ধান্তে উপনীত হ'য়েছিলেন যে সংখ্যামাত্রেরই দু'টি প্রকার ভেদ আছে। সে'টি হয় মূলদ হবে, নতুবা অমূলদ হবে। আর এই অমূলদ সংখ্যা হ'ল এমন সংখ্যা যাকে দু'টি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা সম্ভব হয় না। পূর্ণ সংখ্যা বা সামান্য ভগ্নাংশ.ক জ্যামিতিতে একটি রেখার উপর **একটি বিন্দুর অবস্থিতি** দিয়ে প্রকাশ করা যায়। কিন্তু অমূলদ সংখ্যা প্রকাশ করা যেতে পারে **দৈর্ঘ্যের সাহায্যে**। প্রত্যেকটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ হ'চ্ছে বাহুর $\sqrt{2}$ গুণ। কোন ভগ্নাংশের সাহায্যেই $\sqrt{2}$র সঠিক মান নির্ণয় করা সম্ভব নয়। $\sqrt{2}$ এর ঠিক কাছাকাছি পৌছাবার জন্য পর পর ভগ্নাংশ নিয়ে একটু একটু ক'রে ক্রমে বাড়ানো যেতে পারে। কিন্তু সে ক্ষেত্রেও $\sqrt{2}$র সঠিক মান পাওয়া যায় না। এই রকম অনুপাতকে গ্রীকরা অমেয় বা অপরিমেয় (in commensurable) বলে আখ্যা দিয়েছিলেন। প্রকৃত সংখ্যারাশি বলতে যা বোঝায়, তা হ'ল এই সমস্ত অমেয় সংখ্যা, ভগ্নাংশ, পূর্ণ সংখ্যা প্রভৃতির সমষ্টি। বীজগণিতে আর একটি কথার বা আর এক শ্রেণীর সংখ্যা প্রচলিত আছে যে'টিকে বলা যেতে পারে Surd। কথাটির কি ক'রে উৎপত্তি হ'ল, তার ইতিহাস পড়লে জানা যায় Al-khowarizmi মূলদ সংখ্যাদের বলতেন 'audible' বা শ্রুতিগোচর; আর Surd দের সম্বন্ধে বলতেন inaudible বা শ্রবণাতীত। এই inaudible শব্দ থেকেই Surd শব্দটি এসেছে বলে মনে হয়। আবার Surd কথাটির অর্থ হ'ল মূক (dumb)। অনেকে যেমন, আরব ও হিব্রুরা আবার এই Surd কে বলতেন 'non-expressible numbers' বা এমন সমস্ত সংখ্যা যা প্রকাশ করা যায় না।

করণী (Surds) :—যে কোন সংখ্যার বর্গমূল বলতে আমরা এমন একটি সংখ্যা বুঝি যার বর্গ ক'রলেই প্রদত্ত সংখ্যাটি ফিরে পাওয়া যাবে। যেমন $\sqrt{16} = \pm 4$, $\sqrt{36} = \pm 6$ ইত্যাদি; কিন্তু সঠিক বর্গমূল পাওয়া যাবে, এ জাতীয় সংখ্যার সংখ্যা খুব বেশী নয়। অনেক সংখ্যাই আছে যার সঠিক বর্গমূল পাওয়া যায়

না। যেমন $\sqrt{2}$। এটির বর্গমূল অনন্ত কাল ধরে ক'রে গেলেও বর্গমূলের সঠিক মান পাওয়া যাবে না। এই জাতীয় সংখ্যাকে-যাদের অন্য কোন আকারে বা রূপে সঠিকভাবে প্রকাশ করা যায় না—তাদের **করণী (Surd)** বলা হয়। Surd কথাটির অর্থ হ'ল মূক (dumb)। কথাটির উৎপত্তি ও অর্থ সম্বন্ধে একটু আগেই (অমূলদ সংখ্যায়) আলোচনা করা হ'য়েছে। করণীকে যদিও মূলদ সংখ্যার আকারে প্রকাশ করা যায় না, তবুও কখনো কখনো এ-গুলিকে একটি মূলদ সংখ্যা ও একটি করণীর গুণফলের আকারে প্রকাশ করা সম্ভব। যেমন $\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}$ $=2\sqrt{5}$. ইত্যাদি। আবার কোন ভগ্নাংশে হরে যদি করণীসংখ্যা থাকে, তখন হরটিকে করণী-মুক্ত ক'রলে বা সে'টিকে মূলদ সংখ্যার (নিকটতম) সাহায্যে প্রকাশ ক'রলে ভগ্নাংশটির আসন্ন মান নির্ণয় করার সুবিধা হয়। এইভাবে হরকে করণীমুক্ত করার নাম হ'ল হরের **করণী নিরসন**।

লেখচিত্র (Graphs) :—বর্ত্তমান যুগে বিভিন্ন ক্ষেত্রে লেখচিত্র বহুল ব্যবহৃত। বলতে গেলে লেখচিত্র বর্ত্তমান সভ্যতার ও কৃষ্টির একটি অপরিহার্য্য অঙ্গ হ'য়ে পড়েছে। লেখচিত্র হ'ল কোন বিবৃতির একটি সুস্পষ্ট চিত্ররূপ। আব্‌হাওয়া, বৃষ্টিপাত, তাপমাত্রা, আয়-ব্যয়, জাতীয় আয়' পঞ্চবার্ষিকী পরিকল্পনার ব্যয় বরাদ্দ, জন্ম মৃত্যুর হার, পরীক্ষাতে পাশ ফেলের হিসাব ইত্যাদি সম্বন্ধে লেখচিত্র প্রায় প্রত্যহই খবরের কাগজের পাতাতেই দেখা যায়। লেখচিত্রটি এক নজর দেখেই এর আভ্যন্তরীণ বক্তব্যটুকু পরিষ্কার ভাবে বোঝা যায়। এই পৃথিবীতে বিভিন্ন দিকে প্রতিনিয়ত কোন না কোন পরিবর্তন হ'চ্ছে। সেই পরিবর্তনের রূপটিকে যখন চিত্রের মাধ্যমে ফুটিয়ে তোলা সম্ভব হয়, তখনই সেই পরিবর্তন সম্বন্ধে একটা স্পষ্ট ধারণা লাভ করা সম্ভব।

লেখচিত্র প্রথম কে বা কারা আবিষ্কার করেন, সে বিষয়ে মতবিরোধ আছে। অনেকে বলেন লেখচিত্র Descartes-ই প্রথম আবিষ্কার করেন। আবার অনেকে বলেন গ্রীক্‌রা তার বহু পূর্বেই এই সম্বন্ধে কিছু কিছু ধারণা অর্জন ক'রেছিলেন, কিন্তু বীজগণিত সম্বন্ধে তাঁদের জ্ঞান সীমিত ছিল বলে তারা বেশীদূর অগ্রসর হ'তে পারেন নি।

বীজগণিতের মূল উদ্দেশ্য হ'ল **বিশ্লেষণ** ও **সামান্যীকরণ**। লেখচিত্রের সাহায্যে এই দু'টি উদ্দেশ্যই বিশেষভাবে সাধিত হয়। লেখচিত্রের সাহায্যে অনেকগুলি দৃষ্টান্ত বা ঘটনার থেকে সামান্যীকরণের মাধ্যমে একটি নিয়ম আবিষ্কার করা সম্ভব।

প্রত্যেকটি মাধ্যমিক ও উচ্চমাধ্যমিক বিদ্যালয়ের পাঠ্যক্রমে লেখচিত্রকে অন্তর্ভুক্ত

করা হ'য়েছে। এর পশ্চাতে অবশ্য যথেষ্ট যুক্তিসঙ্গত কারণ আছে। এর মধ্যে যে কারণগুলি প্রধান কারণ বলে মনে করা হয়, সেগুলির উল্লেখ করা হ'ল।

১। লেখচিত্র মূর্ত্ত ও বাস্তব। এর ফলে বীজগণিতের প্রয়োগ কেবলমাত্র যান্ত্রিক স্তরেই সীমাবদ্ধ থাকে না। তাছাড়া লেখচিত্রের সাহায্যে কোন তথ্য বা বিবৃতির সামান্যীকরণ করা সম্ভব। এক কথায় লেখচিত্র বীজগণিত; তথা গণিত শাস্ত্রকে অবাস্তব পর্য্যায় থেকে বাস্তব পর্য্যায়ে উন্নীত করে।

২। লেখচিত্রের ব্যবহার সার্বজনীন প্রকৃতির। আমাদের দৈনন্দিন জীবনে ও বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন লেখচিত্র ব্যবহার করা হয় এবং লেখচিত্রের উপলব্ধি সাধারণ জ্ঞান ব্যবহারের পর্য্যায়ে এসে গেছে।

৩। লেখচিত্রের সাহায্যে কোন বিবৃতিকে সংক্ষেপে অথচ পরিষ্কারভাবে প্রকাশ করা সম্ভব।

৪। গণিতের যেসমস্ত অংশ জটিল বা অমূর্ত্ত, লেখচিত্রের সাহায্যে সেগুলির একটি বাস্তব ও মূর্ত্ত রূপ চোখের সামনে পরিষ্কারভাবে তুলে ধরা সম্ভব।

৫। লেখচিত্রের সাহায্যে সমস্যার বা সমীকরণের সমাধান অত্যন্ত সহজেই করা সম্ভব। সাধারণভাবে যে সমস্ত সমস্যার সমাধান করা অত্যন্ত জটিল বলে মনে হয়, লেখচিত্রের সাহায্যে সেই সমাধান অপেক্ষাকৃত সহজে করা সম্ভব।

৬। লেখচিত্রই হ'ল উচ্চতর গণিতের ভিত্তি স্বরূপ।

৭। লেখচিত্রের সাহায্যে সহজেই ছাত্রদের মনোযোগ আকর্ষণ করা সম্ভব।

৮। মনোবিজ্ঞান বলে—ছাত্ররা যত বেশী ইন্দ্রিয় ব্যবহার ক'রবে, জ্ঞান তত পরিপক্ক হ'বে। লেখচিত্র অঙ্কন করার সময় ছাত্ররা কান, চোখ, হাত ব্যবহার করে। ফলে তাদের জ্ঞান অর্জনের পথে যথেষ্ট সাহায্যই তারা পেয়ে থাকে।

৯। চোখে দেখে ও কানে শুনে যে জ্ঞান অর্জিত হয়, সেই জ্ঞানই স্থায়ী হয়। লেখচিত্রে কোন না কোন ছবি থাকে বলে পরবর্তীকালে তা মনে করা সহজ হয়।

১০। একটি রাশির পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে অপর রাশির কি রকম পরিবর্তন হয়, তা লেখচিত্রের সাহায্যে জানা যায়। হু'টি সম্বন্ধযুক্ত রাশি কিভাবে পরস্পর নির্ভরশীল হয়, তাও জানা যায় লেখচিত্রের সাহায্যে।

১১। প্রদর্শনীর (display) কাজেও লেখচিত্র ব্যবহার করা সম্ভব। নীরস তথ্য বা সংখ্যাকেও লেখচিত্রের সাহায্যে সরস ও আকর্ষনীয় ক'রে তোলা সম্ভব।

১২। কোন তথ্য, ঘটনা বা সংখ্যা সম্বন্ধীয় ফল উপলব্ধির ক্ষেত্রে লেখচিত্র যথেষ্ট সময় বাঁচায়।

১৩। লেখচিত্র সৌন্দর্য্যানুভূতি জাগ্রত করে।

১৪। গণিত যে একটি অবিচ্ছিন্ন বিষয় এবং এর বিভিন্ন অংশের মধ্যে যে সঙ্গতি আছে, তা লেখচিত্রের সাহায্যেই উপলব্ধি করা সম্ভব।

সংক্ষেপে বলা যেতে পারে লেখচিত্রের সাহায্যে খুব সহজে এবং সার্থকভাবে তথ্য উপস্থাপিত করা, তুলনামূলক বিচার করা এবং বিভিন্ন জাতীয় সম্বন্ধ তথা সহসম্বন্ধ প্রকাশ করা সম্ভব। কল্পনা শক্তির যথেষ্ট ব্যবহার, সৃজনীশক্তির মুক্ত প্রয়োগ, গণিতে উৎসাহব্যঞ্জক আগ্রহ সৃষ্টি এবং মূল ধারণাগুলির জ্ঞানমূলক উপলব্ধি এ সমস্তের বাধাহীন সুযোগ পাওয়া যায় লেখচিত্রের মাধ্যমে। এই জন্যই পাঠক্রমে লেখচিত্রের স্থান এত গুরুত্বপূর্ণ।

লেখচিত্র কখন শুরু করা যেতে পারে? সাধারণতঃ সপ্তম শ্রেণী থেকেই লেখচিত্র শেখানো যেতে পারে। তবে এই সময় দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত এবং সুপরিচিত তথ্য নিয়েই লেখচিত্র অঙ্কন শুরু করা বাঞ্ছনীয়। শ্রেণীতে ছাত্রদের দৈনিক গড় উপস্থিতি, তাপমাত্রা, বৃষ্টিপাতের পরিমাণ, ছাত্রদের গড় ওজন প্রভৃতির সাহায্যে লেখচিত্র অঙ্কন ক'রতে হবে। প্রথম প্রথম যে লেখচিত্র করানো হবে, তা বিচ্ছিন্ন তথ্যধারা (discontinuous series) নিয়ে করানো যেতে পারে। এ সমস্ত ক্ষেত্রে মধ্যবর্তী মাপের কোন প্রশ্ন ওঠে না। অর্থাৎ অনুভূমিক রেখার (horizontal) উপর কোন মাপ নেবার প্রশ্ন এখানে থাকে না। ঐ রেখার উপর সমান দূরত্বে কয়েকটি বিন্দু নিয়ে সেই সব বিন্দুতে লম্ব অঙ্কন ক'রে পরিমাণগুলি প্রকাশ ক'রতে হয়। এইভাবে বিচ্ছিন্ন লেখচিত্র থেকে ধীরে ধীরে পরিসংখ্যানমূলক (Statistical) লেখচিত্রে যেতে হয়। এই জাতীয় লেখচিত্রে একটি নির্দিষ্ট নিয়ম অনুসরণ ক'রে চ'লতে হয়। এইভাবে সহজ লেখচিত্র থেকে ক্রমশঃ জটিল লেখচিত্রের দিকে এগিয়ে যেতে হ'বে এবং তারপর লেখচিত্রের সাহায্যে বীজগণিতের সমস্যার সমাধান করার শিক্ষা ছাত্রদের দিতে হ'বে। গ্রাফ্ কাগজের সাহায্যে কিভাবে লেখচিত্র অঙ্কন ক'রতে হয়, তা ছাত্রদের বুঝিয়ে দিতে হ'বে। আবার কেবলমাত্র লেখচিত্র অঙ্কন ক'রেই তারা যেন ক্ষান্ত না হয়। লেখচিত্রগুলি ব্যাখ্যা করার মত ক্ষমতা তারা যাতে অর্জন করে, সেদিকেও বিশেষ লক্ষ্য রাখতে হ'বে। শিক্ষক একথা ছাত্রদের বুঝিয়ে দেবেন যে যদি দু'টি তথ্য বা পরিমাণ পরস্পর নির্ভরশীল হয়, তবে তাদের লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হবে, যেটি মূলবিন্দুর (origin) ভিতর দিয়ে যাবে। শ্রেণীতে গ্রাফ্ বোর্ডে শিক্ষক কতকগুলি লেখচিত্র অঙ্কন ক'রে সেগুলির বৈশিষ্ট্য ও অঙ্কন কৌশল ছাত্রদের বুঝিয়ে দিবেন।

লেখচিত্র ও সূত্র (তা সে পাটীগণিত, বীজগণিত বা জ্যামিতিরই হোক্) পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত। এই সম্বন্ধটিতে দু'টি বিভিন্ন দিক থেকে দেখা সম্ভব। কোন একটি লেখচিত্রকে পরীক্ষা করার মূল উদ্দেশ্যে হ'ল কোন সূত্র খুজে বার করা ; এবং কোন একটি সূত্র অনুসরণ ক'রে লেখচিত্র অঙ্কন ক'রে সেই অন্তর্নিহিত তথ্যগুলি নির্ণয় করা। দু'টি পরিবর্তনশীল বস্তুর মধ্যে এমন কোন সম্পর্ক থাকতে পারে যাতে একটির কোন মান দেওয়া থাকলে অন্যটিরও একটি স্থির মান পাওয়া সম্ভব। এই সব ক্ষেত্রে এই পরিবর্তনের ধারণা লেখচিত্র থেকেই পাওয়া যায়। আবার লেখচিত্রকে Ready—reckoner হিসাবেও ব্যবহার করা যায়।

কিভাবে লেখচিত্র অঙ্কন শুরু করা যেতে পারে? লেখচিত্রের ব্যবহার থেকেই ছাত্ররা দেখতে পাবে যে কোন একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় ক'রতে হ'লে দু'টি অক্ষরেখা (axis) থেকে বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় করা প্রয়োজন। প্রথমে লেখচিত্র অঙ্কন করার সময় অক্ষরেখা দু'টিকে একক দিয়ে চিহ্নিত করা যায়। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে, ওজন যদি হয়, তবে কেজিতে, সময় হ'লে সেকেণ্ডে, মিনিটে বা ঘণ্টাতে, দূরত্ব হ'লে কিলোমিটারে ইত্যাদি। পরে আর কোন একক না দিয়ে x, y, t, w প্রভৃতি দিয়ে অক্ষরেখাগুলি চিহ্নিত করা যেতে পারে।

কাগজের উপর (গ্রাফ্ কাগজ হ'লেই ভালো হয়) দু'টি রেখা লম্বভাবে টেনে অনুভূমিক রেখাকে X এবং তার উপর লম্ব রেখাটিকে Y অক্ষ বলে অভিহিত করা হয়। Y অক্ষ থেকে X অক্ষে সমান্তরাল যে দূরত্ব তাকে বলা হয় **ভুজ**' আর X অক্ষ থেকে Y অক্ষের সমান্তরাল যে দূরত্ব, তাকে বলে **কোটি**। X ও Y অক্ষ যে বিন্দুতে ছেদ করে, তাকে বলে **মূলবিন্দু**। ধীরে ধীরে ছাত্র বুঝতে পারবে যে X ও Y অক্ষে একটি মান (Scale) ঠিক ক'রে নেওয়া প্রয়োজন। গ্রাফ্ কাগজের আকৃতি ও তথ্যের বিস্তৃতি অনুযায়ী সেই মানটি ঠিক ক'রতে হবে। এই মান এমনভাবে নিতে হবে যেন মধ্যবর্তী কোন বিন্দুর অবস্থান সহজে নির্ণয় করা যায়। কিছুদিন অভ্যাস ক'রলেই এই মান নির্ণয় করা সহজ হবে। লেখচিত্র অঙ্কনের স্তরগুলিকে কয়েকটি ভাগে ভাগ করা যেতে পারে। যেমন :—

১। বাস্তব উদাহরণের লেখচিত্র, যেমন তাপমাত্রা, জনসমষ্টি, স্কুলের ছাত্রসংখ্যা প্রভৃতির লেখচিত্র।

২। সংখ্যা তালিকার লেখচিত্র, যেমন 1 মিটার কাপড়ের দাম দেওয়া থাকলে 0 মিটার থেকে 10 মিটার পর্যন্ত কাপড়ের দামের লেখচিত্র।

৩। দু'টি পরিবর্তনশীল রাশি x ও y থাকলে $y=3x+2$ বা $y=x^2$ এই

জাতীয় সমীকরণে y এর মান পরিবর্তিত হ'লে x এর মান যে হারে পরিবর্তিত হবে, তার লেখচিত্র।

৪। বিজ্ঞান বা জ্যামিতির সূত্রাবলীর লেখচিত্র।

৫। সমস্যার সমাধানের জন্য লেখচিত্র।

লেখচিত্র অঙ্কনে কতকগুলি দিকে বিশেষভাবে লক্ষ্য রা'খতে হ'বে। যেমন :—

* লেখচিত্র অঙ্কন ক'রে তার ব্যাখ্যা ক'রতে হবে।

* ছাত্রদের একথা মনে রাখতে হবে যে দু'টি সমানুপাতী চলকের (Proportional variables) লেখচিত্র হবে একটি সরলরেখা।

* লেখচিত্র অঙ্কন করার সময় গ্রাফ্ কাগজ ব্যবহার করা উচিত। X ও Y অক্ষ দু'টি বেশ মোটা দাগ দিয়ে চিহ্নিত ক'রে নিতে হবে।

* বীজগণিতের তথ্য সমন্বিত লেখচিত্র অঙ্কন করার আগে পাটীগণিতের তথ্য সমন্বিত লেখচিত্র অঙ্কন করা বাঞ্ছণীয়।

পরিবর্তনশীল রাশি দু'টির মধ্যে একটিকে 'স্বাধীন চলক' (Independent variable) অপরটিকে 'অধীন চলক' (dependent variable) ধরে নিতে হয়। স্বাধীন চলকটিকে X অক্ষে বামদিক থেকে ডানদিকে প্রসারিত ক'রে দিতে হয়।

সমস্ত লেখচিত্র মূলবিন্দুর ভিতর দিয়ে যায় না। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে 'ইলেকৃট্রি ক বিল'। আবার লেখচিত্র যে সবসময় সরলরেখা হয়, তাও নয়। $y=x^2-2x$ এই জাতীয় সমীকরণের লেখচিত্র বক্ররেখা। তেমনি ধণাত্মক ও ঋণাত্মক রাশির সাহায্যে লেখচিত্র অঙ্কন ক'রতেও ছাত্রদের শেখাতে হবে। $y=x$ এবং $y=-x$, $x=y$ এবং $x=-y$ এই জাতীয় লেখচিত্র পাশাপাশি করালে তারা লেখচিত্রগুলির স্বরূপ ও গতি (direction and side) বুঝতে পারবে। তারপর লেখচিত্রের সাহায্যে সমস্যার সমাধান তারা ক'রতে শিখবে এবং লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণের সমাধানও তারা ক'রবে।

সরলরেখা জাতীয় লেখচিত্র বিভিন্ন প্রকারের হ'তে পারে। এর জন্য সমীকরণও বিভিন্ন হবে। প্রকৃত পক্ষে যে'টিকে আমরা **স্থানাঙ্ক জ্যামিতি** (Co-ordinate Geometry) বলে থাকি, তার মূল ভিত্তিই হ'ল লেখচিত্র। লেখচিত্রের সাহায্যেই জ্যামিতিকে চোখের সামনে স্পষ্ট ক'রে তুলে ধরা হয়। সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কন করার পর বৃত্ত, পরবলয় (Parabola), অতিপরবলয় (Hyperbola) প্রভৃতির লেখচিত্র অঙ্কন করা শেখাতে হবে। এগুলি প্রথম অবস্থায় সহজ উদাহরণ নিয়ে শুরু করা উচিত। যেমন বৃত্তের জন্য $x^2+y^2=4$ (কেন্দ্র মূল বিন্দুতে) এই জাতীয়

উদাহরণ, পরবলয়ের জন্য $y=x^2$ প্রভৃতি সমীকরণ নেওয়া যেতে পারে। আবার বাস্তব উদাহরণ দিয়েও এগুলি বোঝানো সম্ভব। যেমন একটি ঢিল ছুঁড়লে তা অনেকটা পরবলয় জাতীয় পথ অতিক্রম ক'রে মাটিতে পড়ে, বা একটি ছেলে দৌড়ে গিয়ে যদি কোন উঁচু জায়গা থেকে লাফ দেয়, তবে অর্ধেক পরবলয় উৎপন্ন হয়।

$xy=k$ জাতীয় সমীকরণের সাহায্যে অতিপরবলয় জাতীয় লেখচিত্র অঙ্কন করা যায়। অতিপরবলয় জাতীয় লেখচিত্র X ও Y অক্ষ দু'টির যথেষ্ট নিকট দিয়ে যায় অথচ তাদের স্পর্শ করে না। সেইজন্য অক্ষরেখা দু'টিকে বক্র লেখচিত্রটির 'অসমপথ' (Asymptote) বলা হয়।

এই সমস্ত লেখচিত্র শেখানোর পর পরিসংখ্যানের 'স্বাভাবিক বণ্টনের লেখচিত্রটি (Normal Distribution Curve) ছাত্রদের শেখানো যেতে পারে। এর জন্য শ্রেণীর ছাত্রদের উচ্চতা, ওজন বা তাদের পরীক্ষার নম্বরকে তথ্য হিসাবে ব্যবহার করা যেতে পারে। এইভাবে অভ্যস্ত হয়ে গেলে ছাত্ররা সহজ লেখচিত্র অঙ্কন ক'রতেও পারবে, আবার কোন লেখচিত্র (যেমন Bar graph, pie-graph প্রভৃতি) দেখে ব্যাখ্যাও ক'রতে পারবে।

॥ খ—বিভাগ ॥

(জ্যামিতি সম্বন্ধীয়)

সংজ্ঞা (Definitions) :—গণিতের বিভিন্ন অংশে বিভিন্ন জাতীয় সংজ্ঞার প্রচলন দেখা যায়। জ্যামিতিতে সংজ্ঞার প্রচলন সব চেয়ে বেশী ব'লে মনে হয়। এখন প্রশ্ন হ'তে পারে সংজ্ঞা কাকে বলে ? এর উত্তরে সংক্ষেপে বলা যেতে পারে শব্দ, বাক্য বা প্রতীকের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত হ'য়ে কোন একটি বিবৃতি বা বক্তব্যের অর্থকে যে স্পষ্ট ক'রে তুলতে পারে, তাকেই সংজ্ঞা বলে। সংজ্ঞা হ'ল নিয়মানুগ ও চিরস্থায়ী একটি বর্ণনা। এ ছাড়া আরো বলা যেতে পারে যে সংজ্ঞা নিকটতম বর্গ ও নির্দিষ্ট পার্থক্যের সূচক। কোন একটির পদের সংজ্ঞা দিতে গেলে তার নিকটতম বর্গের বা ঐ শ্রেণীভুক্ত নিকটতম পদের কথা যেমন বলতে হয় তেমনি আবার নির্দিষ্ট পার্থক্য—যা ঐ শ্রেণীর অন্য পদ থেকে যে পদের সংজ্ঞা নির্ণয় করা হ'চ্ছে তাকে পৃথক ক'রে চিহ্নিত ক'রে, তার কথাও বলতে হয়। সব সময় মনে রাখতে হবে, সংজ্ঞাতে নিকটতম

বর্গের কথাই বলতে হবে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে, পঞ্চভুজের সংজ্ঞা দিতে গিয়ে "পাঁচটি বাহুর দ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্র" বললে ভুল হবে, কারণ পঞ্চভুজের নিকটতম বর্গ হ'ল বহুভুজ। এর পর দেখতে হবে, সংজ্ঞাতে যে পার্থক্যের কথা বলা হয়েছে, তা যেন প্রয়োজনের তুলনায় খুব বেশী না হয়, আবার খুব কমও না হয়। যে পার্থক্যের কথা না বললেই নয়, কেবল সেইটুকুই বলা প্রয়োজন। অবশ্য অনেক সময় বিভিন্ন কারণের জন্য পার্থক্যের সংখ্যা অনেক বেশীই হয়ে যায়। যেমন আয়তক্ষেত্রের সংজ্ঞা দিতে গিয়ে এভাবে বলা যেতে পারে যে আয়তক্ষেত্র হ'ল একটি সামান্তরিক যার প্রত্যেকটি কোণই সমকোণ। এখানে প্রত্যেকটি কোণই সমকোণ বলাতে একটু বেশী বলা হয়—কারণ সামন্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হলেই বাকী কোণগুলি সমকোণ হবেই।

সমস্ত পদেরই যে সংজ্ঞা দিতে হয়, তা নয়। এমন কতকগুলি পদ আছে যেগুলির সংজ্ঞা দেবার কোন প্রয়োজন নেই। এ জাতীয় পদকে দু'ভাগে ভাগ করা হয়। যেমন—

(১) সাধারণ শ্রেণীবাচক পদ—যথা গণিতের বিভিন্ন শাখার নাম। পাটীগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি ইত্যাদি পদের কোন সংজ্ঞা বিদ্যালয়ে শেখানোর প্রয়োজন নেই। এগুলি তাদের ক্ষমতার বাইরে।

(২) জ্যামিতি শেখনোর প্রাথমিক স্তরে যে সমস্ত পদের সঙ্গে পরিচিত হওয়া যায়, সেগুলির সংজ্ঞা দেবারও কোন প্রয়োজন নেই। তল, কোণ বিন্দু, সরলরেখা, দিক্ বা গতি ইত্যাদির সংজ্ঞা না দিয়ে বাস্তব উদাহরণের সাহায্যে এগুলির সঙ্গে পরিচিত করে দেওয়া বাঞ্ছনীয়। এর জন্য বিভিন্ন মডেল, চার্ট বা নক্সা ইত্যাদি ব্যবহার করা যেতে পারে।

সংজ্ঞা সম্বন্ধে **Pasbal** (Del' Esprit geometrique) কয়েকটি নিয়মের কথা বলে গেছেন। সেগুলি বিশেষ ভাবে উল্লেখযোগ্য। নিয়মগুলি হ'ল—

(ক) সংজ্ঞাগুলিকে যেন অত্যন্ত সহজ ভাবে উপস্থাপিত করা না হয়। সংজ্ঞাগুলি ব্যাখ্যা করার জন্য যেন সংজ্ঞার চেয়েও সহজ ভাব ও ভাষা ব্যবহার করার সুযোগ থাকে।

(খ) সংজ্ঞা না দিতে পারলে কোন অনিশ্চিত বা অস্পষ্ট পদ স্বীকার করা চলবে না।

(গ) সংজ্ঞা দিতে গিয়ে এমন সমস্ত পদ ব্যবহার করতে হবে, যেগুলি সুস্পষ্ট এবং যেগুলির নিজস্ব সংজ্ঞা বর্ত্তমান। দ্ব্যর্থ্যবোধকপদ ব্যবহার করা কখনই উচিত নয়।

সংজ্ঞা শিক্ষা দেবার পদ্ধতিটি আবার একরকম নয়। প্রথমে অবলম্বন করতে হবে **আরোহী পদ্ধতি** এবং শেষে **অবরোহী পদ্ধতি**। দৃষ্টান্ত স্বরূপ বলা যেতে পারে ত্রিভুজের সংজ্ঞা দেবার আগে ছাত্রদের সামনে কাগজ বা কাঠের তৈরী বিভিন্ন জাতীয় ত্রিভুজ উপস্থাপিত করা যেতে পারে। নানাবিধ ত্রিভুজ পর্যবেক্ষণ করে তারা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারবে যে প্রত্যেকটি ত্রিভুজে তিনটি কোণ থাকবেই। এইভাবে মুখস্থ না করেও তারা সংজ্ঞাগুলি নিজেরাই তৈরী করতে পারবে।

সংজ্ঞার শিক্ষাগত মূল্য :—

(১) সংজ্ঞা একটি বড় বিবৃতিকে ছোট (অথচ স্বয়ং-সম্পূর্ণ) করে দেয়। ফলে পড়ানোর অনেক সুবিধা হয়।

(২) সংজ্ঞার থেকে যুক্তিযুক্ত শিখনের বা যুক্তি প্রয়োগ করার ক্ষমতা অর্জিত হয়।

(৩) সংজ্ঞায় সাহায্যে ছাত্ররা অনেক নূতন পদের সঙ্গে পরিচিত হয়, আবাব অনেক পুরাতন পদের নূতন ব্যাখ্যার ফলে পদটি সম্বন্ধে তাদের ধারণা সুস্পষ্ট হয়।

(৪) সংজ্ঞায় সঙ্গে সঙ্গে চিত্র থাকে বলে তারা যা পড়ে বা শুনে, তার একটা চিত্ররূপও চোখে দেখে থাকে। ফলে শিক্ষণ পাকা হয়।

তবে প্রথম অবস্থাতে নিয়মানুগ পদ্ধতিতে জটিল সংজ্ঞা মুখস্থ না করানোই ভালো। বিভিন্ন জ্যামিতিক আকৃতি বিশিষ্ট জিনিস, মডেল ইত্যাদির সাহায্যে বাস্তব জ্ঞান দিলে ফল ভালো হয়।

সংজ্ঞার শ্রেণী বিভাগ :—সংজ্ঞাগুলিকে অনেকে অনেক ভাগে ভাগ করেছেন। কেউ কেউ বলেন সংজ্ঞা হবে তিন রকমের। যথা :—(১) প্রাথমিক সংজ্ঞা (২) সাধারণ সংজ্ঞা (৩) বিবিধ সংজ্ঞা। যাই হোক, বিভিন্ন ক্ষেত্রে আমরা যে সমস্ত সংজ্ঞার সঙ্গে পরিচিত হয়ে থাকি, সেগুলি বিশ্লেষণ করলে আমরা সংজ্ঞার শ্রেণীবিভাগ এইভাবে করতে পারি :—

(১) **দার্শনিক সংজ্ঞা** :—বিন্দু, সরলরেখা ইত্যাদির সংজ্ঞা দেওয়া কঠিন। যেমন বিন্দু সম্বন্ধে বলা হয় যার কোন আয়তন নেই, কিন্তু অবস্থিতি আছে তাকে বিন্দু বলে। এরকম সংজ্ঞা বোঝাও শক্ত, বোঝানো আরো শক্ত। বিদ্যালয়ে এ জাতীয় সংজ্ঞা সম্বন্ধে একটা প্রাথমিক জ্ঞান দিলেই যথেষ্ট হবে। বিশ্ববিদ্যালয় স্তরে গিয়ে ছাত্র এর দার্শনিক তত্ত্ব উপলব্ধি করবে।

(২) **ব্যাখ্যামূলক সংজ্ঞা :**—এই সংজ্ঞাগুলি প্রায়ই কোন না কোন পদকে

ব্যাখ্যা করে থাকে। যেমন সূক্ষ্মকোণ, স্থূলকোণ, পূরক ও সম্পূরক কোণ, ব্যাস ইত্যাদি। এগুলি প্রায় '**বিশেষণ**' জাতীয়।

লক্ষ্য ক'রলে দেখা যাবে, দু'রকম বিশেষণ প্রয়োগ করা হয়। যথা—

(ক) **গুণ বা স্থানবাচক বিশেষণ** :=যথা, সূক্ষ্ম, স্থূল, বিপরীত ইত্যাদি।

(খ) **পরিমাণ-বাচক বিশেষণ** :—যথা, পূরক, সম্পূরক, সর্বসম ইত্যাদি।

(৩) **যুক্তিযুক্ত সংজ্ঞা** :—এই জাতীয় সংজ্ঞা দেবার সময় যুক্তির অবতারণা করা হয়। যথা :—সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, সামান্তরিক, বর্গক্ষেত্র প্রভৃতি। কেন হচ্ছে? —এ প্রশ্নটাই এখানে বড় হয়। ছাত্ররা সাধারণতঃ এ জাতীয় সংজ্ঞাই মুখস্থ ক'রে থাকে। যুক্তিযুক্ত সংজ্ঞা সর্বত্র একভাবেই প্রকাশ করা উচিত।

প্রয়োজনাতিরিক্ত সংজ্ঞা :—(Redundant Definition) :—অনেক সময় ছাত্ররা কোন সংজ্ঞা বর্ণনা করার সময় প্রয়োজনাতিরিক্ত পদ ব্যবহার ক'রে থাকে। অবশ্য এটা তারা না বুঝেই করে থাকে। সংজ্ঞা দিতে গিয়ে যে সংক্ষিপ্ততম বর্ণনা দেওয়া প্রয়োজন, তার ক্ষমতা তারা তখনও আয়ত্ত করে উঠতে পারে না। নিয়মিত অভ্যাসের ফলেই এ ক্ষমতা অর্জিত হয়। যাই হোক্—ছাত্ররা যদি কোন প্রয়োজনাতিরিক্ত সংজ্ঞা দিয়ে থাকে, তবে তা বাতিল করার কোন প্রশ্ন ওঠে না। ক্রমে ক্রমে তারা সংজ্ঞার সংক্ষিপ্ত রূপ দিতে শিখে যাবে। ছাত্রের দিক থেকে সংজ্ঞার প্রয়োজনীয়তা লক্ষ্য ক'রতে হবে। ছাত্রের নিকট সংজ্ঞাটি সম্পূর্ণ গ্রহণযোগ্য বলে মনে হ'লে তা গ্রহণ ক'রতে হবে—যদিও শিক্ষকের দিক থেকে লক্ষ্য ক'রলে সংজ্ঞাটি অসম্পূর্ণ বলে মনে হতে পারে।

সংজ্ঞা সম্বন্ধে আর কয়েকটি কথা ব'লে বক্তব্য শেষ করব। প্রথমটি হ'ল—সংজ্ঞা যেন অপরিবর্তনীয় না হয়। সংজ্ঞার মধ্যে পরিবর্তন, পরিবর্দ্ধন, সংযোজন ও বিয়োজনের কিছু ব্যবস্থা থাকলে ভালো হয়। আর দ্বিতীয় কথা হ'ল—কোন একটি সংজ্ঞা একবার স্বীকৃত হ'লে সেটি যেন আর সম্পূর্ণরূপে পরিত্যাগ করা না হয়। সংজ্ঞার থেকেই যেন সামান্যীকরণ করার সুযোগ পাওয়া যায়।

স্বতঃসিদ্ধ (Axioms) :—জ্যামিতিতে সম্পাদ্য ও উপপাদ্য ছাড়াও স্বতঃসিদ্ধ নামে আর এক রকম বিবৃতির সাক্ষাৎ পাওয়া যায়। স্বতঃসিদ্ধের উৎপত্তি ও প্রকৃতি সম্বন্ধে তিনটি বিভিন্ন মত পাওয়া যায়। সেগুলি হ'ল—

১। প্রকৃত অভিজ্ঞতা ছাড়াই ধারণাগুলিকে সত্য বলে স্বীকার করা, অর্থাৎ সত্য যেখানে নিজেই প্রকট (A priori truth—Kant)।

২। পরীক্ষামূলকভাবে সত্য প্রমাণ করা (Experimental fact—J. S.

Mill) এবং

৩। চলিত রীতি অনুযায়ী সত্য ব'লে ধরে নেওয়া (Convention—Modern mathematician)।

বর্ত্তমানে অবশ্য স্বতঃসিদ্ধকে "স্বতঃ প্রমাণিত সত্য" বলে ধরে নেওয়া হয় না। স্বতঃসিদ্ধ বলতে বোঝায় এমন একটি বিবৃতিকে যেটিকে প্রমাণ না করেও অন্য একটি প্রমাণের স্থবিধার জন্য বা তার ভিত্তি হিসাবে ব্যবহার করার জন্য সত্য বলে স্বীকার করে নেওয়া হয়। এদিক দিয়ে দেখতে গেলে স্বতঃসিদ্ধের সংজ্ঞার সঙ্গে শর্ত্ত (postulate) ও প্রকল্পের (hypothesis) সংজ্ঞার বিশেষ কোন প্রভেদ নেই। প্রভেদ যা আছে—তা তাদের ব্যবহারে আছে।

স্বতঃসিদ্ধ কেমন হবে? স্বতঃসিদ্ধগুলির অন্ততঃ তিনটি গুণ থাকা বাঞ্ছনীয়। সেগুলি হ'ল—

(ক) স্বতঃসিদ্ধগুলি **সম্পূর্ণ** (complete) হবে।

(খ) এগুলি **সঙ্গতি** (consistent) রক্ষা করে চলবে। এর অর্থ হ'ল একটি স্বতঃসিদ্ধ অপর একটি স্বতঃসিদ্ধকে অস্বীকার ক'রবে না বা তার বিরোধিতা ক'রবে না।

(গ) স্বতঃসিদ্ধগুলি **স্বাধীন** (independent) হ'বে।

মাধ্যমিকস্কুলে স্বতঃসিদ্ধ :—স্বতঃসিদ্ধ সম্বন্ধে এতক্ষণ যা বলা হ'ল, মাধ্যমিক স্কুলে স্বতঃসিদ্ধের সংজ্ঞা নির্ণয় ও ব্যবহারে তার চেয়েও বেশী কিছু বলা হয়ে থাকে। এখানে স্বতঃসিদ্ধকে "নীতিগতভাবে স্থির বা নিশ্চয়" ব'লে ধরে নেওয়া হয়। অর্থাৎ মাধ্যমিক স্কুলের ছাত্রদের নিকট স্বতঃসিদ্ধ বলতে এমন একটি নিশ্চিত ও ধ্রুব সত্য বোঝায় যার প্রমাণের কোন প্রয়োজন নেই। এর জন্য ঐ স্তরে এমন সমস্ত বিবৃতিকেই স্বতঃসিদ্ধ বলে শেখাতে হবে, যেগুলির পৃথকভাবে **সত্যতা ও যথার্থ্যতা** আছে। ছাত্র স্কুল-জীবনে সাময়িকভাবে সেগুলিকে সত্য বলেই মেনে নিতে পারে (প্রমাণের অপেক্ষা না করেই)। পরে যখন সে এই বিষয়ে আরো বেশী করে পড়াশুনা করবে তখন সামান্যীকরণের মাধ্যমে সে এগুলির সত্যতা উপলব্ধি করতে পারবে। ছাত্ররা হয়তো স্বতঃসিদ্ধ উপস্থাপিত করতে গিয়ে প্রয়োজনের তুলনায় বেশী কিছু বলতে পারে (Redundant)। তাতে কোন ক্ষতি বা দোষ নেই কিন্তু তারা পরস্পরবিরোধী (Contradictory) স্বতঃসিদ্ধ উপস্থাপিত করলে শিক্ষককে এগিয়ে এসে তাদের ভুল শুধরে দিতে হবে।

অনুশীলনী (Exercise) :—জ্যামিতিতে অনুশীলনের একটি বিশেষ স্থান আছে। কোন উপপাদ্যের সঙ্গে এই অনুশীলনী চলতে পারে (সাধারণতঃ Extra

নামে অভিহিত)। এর উদ্দেশ্য হ'ল ছাত্র উপপাদ্যের জ্ঞানটি ঠিকমত প্রয়োগ ক'রতে পারছে কি না, তা লক্ষ্য করা। উপপাদ্যগুলি ছাত্ররা অনেক সময় মুখস্থ করে থাকে। কিন্তু অনুশীলনীর সমাধান করতে হ'লে—তার সেই মুখস্থ বিদ্যা কোন কাজে লাগে না। অর্থাৎ অনুশীলনীর চাপ থাকলে ছাত্ররা মুখস্থ করা থেকে বিরত থাকবে বলেই আশা করা যায়। সাধারণতঃ দেখা যায় ক্লাসে অভ্যাস না করানোর জন্যই হোক্—আর অন্য কোন কারণের জন্যই হোক—ছাত্ররা অনুশীলনীগুলির সমাধান ক'রতে চায় না। এ ব্যাপারে কিন্তু শিক্ষকের দায়িত্ব অনেকখানি। যাই হোক্ অনুশীলনীর সমাধান সম্বন্ধে কতকগুলি সাধারণ নির্দেশনা দেওয়া হ'ল। এগুলি অনুসরণ করতে পারলে অনেকটা সুফল পাওয়া যেতে পারে।

১। যতদূর সম্ভব সহজ ও সাধারণ ভাবে চিত্রটি আঁকতে হবে। সমস্যাটি ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় হ'লে বিষমবাহু ত্রিভুজ আঁকাই বাঞ্ছনীয়।

২। সমস্যাটি বেশ ভালো করে পড়তে হবে। এর অর্থ উপলব্ধি করে কি দেওয়া আছে এবং কি প্রমাণ করতে হবে, সে বিষয়ে নিশ্চিন্ত হতে হবে।

৩। সামতলিক চিত্রের শীর্ষে বড় হাতের অক্ষরে নাম আর বাহুগুলির নাম ছোট হাতের অক্ষরে দেওয়া উচিত। যেমন ABC একটি ত্রিভুজ যার বাহুগুলি a, b ও c ইত্যাদি।

৪। সমস্যাটির সমাধানের প্রমাণ স্থির করতে হ'লে অন্যান্য স্বতঃসিদ্ধ, সংজ্ঞা, শর্ত্ত বা পূর্ব প্রমাণিত উপপাদ্যগুলির সাহায্য নিতে হবে। দেখতে হবে, এগুলির মধ্যে কোন্ কোনটি প্রমাণে সহায়তা করে।

৫। যে যে উপপাদ্যের সাহায্য নেওয়া হচ্ছে, সেগুলির উল্লেখ করতে গিয়ে তাদের নম্বরটি উল্লেখ করলে চলবে না। উপপাদ্যটির সাধারণ সূত্রটি সংক্ষেপে বলে নিতে হবে।

এবার ছাত্রদের কি করতে হবে, তা সংক্ষেপে বলা হ'ল। প্রথমেই ছাত্রদের সমস্যাটির ভাষার একটি চিত্ররূপ দিতে হবে। চিত্রটি ঠিকমত আঁকা হলে তার নাম ঠিকভাবে দিতে হবে।

প্রাসঙ্গিক যে সমস্ত তথ্য সমস্যাটিতে দেওয়া থাকবে, সেগুলি যেন চিত্রে ঠিকভাবে অন্তর্ভুক্ত করা হয়। চিত্রটি যেন বেশ বড় ও পরিষ্কার হয়। সরলরেখা যেন ঠিক সরলরেখাই হয়, কোণের মাপ বা পরিমাণ দেওয়া থাকলে ঠিক সেইমত কোণ আঁকা হয়। চিত্রেব নাম যদি দেওয়া থাকে, তবে ঠিক সেই নামই দিতে হবে।

ছাত্ররা নিজেদের মনে অতকগুলি প্রশ্নের অবতারণা করতে পারে। যেমন :—

* উপাত্ত (data) থেকে কি জানা যায়?

* আগেকার জানা কোন্ উপপাদ্য এ বিষয়ে আমাকে সাহায্য করতে পারে?

* উপাত্তের কোন অংশে বাদ পড়ে নি তো?

এ ব্যাপারে ছাত্রদের সংশ্লেষণ, বিশ্লেষণ ও তাদের যুগ্ম পদ্ধতি ব্যবহারের শিক্ষা দিতে হবে। সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে ছাত্র জানা তথ্য থেকে অজানা সিদ্ধান্তে যেতে পারে। আবার বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে সে অজানা সিদ্ধান্ত থেকেই শুরু করে পিছিয়ে এসে জানা সত্যে পৌছাতে পারে। এর জন্য সে অজানা সিদ্ধান্তটিকে বিশ্লেষণ করে ছোট ছোট ভাগে ভাগ করে সেই ভাগফলগুলির সত্যতা প্রমাণ ক'রতে পারে। অজানার সত্যতা প্রমাণ করার জন্য সে জানা নানা সত্যের সাহায্য নিতে পারে। এর জন্য সমস্যা সমাধানে ছাত্রদের বিশ্লেষণ পদ্ধতির সাহায্য নেওয়াই উচিত। অবশ্য ফলাফল ঠিকমত লিখে রাখার জন্য সংশ্লেষণ পদ্ধতিটিই ভালো।

জ্যামিতিতে অঙ্কন (Construction) :—জ্যামিতিতে, বিশেষতঃ অঙ্কনের ক্ষেত্রে কিছু কিছু যন্ত্রপাতি ব্যবহার করার একটা ব্যবস্থা আছে। যেমন-তেমন করে যন্ত্রগুলি ব্যবহার করা চলে না। এর জন্য মনোযোগ ও অভ্যাসের প্রয়োজন। 'অভ্যাসের ফলেই দক্ষতা অর্জিত হয়'—কথাটি জ্যামিতির ক্ষেত্রে অত্যন্ত সত্য! একজন ছাত্র হয়তো কি করে অঙ্কন করতে হয়, তার মূলনীতিটি জানে, কিন্তু বাস্তব ক্ষেত্রে হয়তো দেখা যেতে পারে সে যন্ত্রপাতির সাহায্যে ঠিকমত অঙ্কন করতে পারছে না। অনভ্যাস, যন্ত্রপাতির সঙ্গে পরিচিত না হওয়া এবং খারাপ যন্ত্রপাতির জন্যও এরকম ঘটনা-ঘটা অসম্ভব কিছু নয়। এর জন্য ছাত্রদের ঠিকমত অঙ্কন করার একটা অভ্যাস গড়ে তুলতে হবে।

কিভাবে নিখুঁত অঙ্কনে ছাত্রদের অভ্যস্ত করা যায় বা তাদের সাহায্য করা যায়, সে বিষয়ে শিক্ষকেরও কিছু জানার আছে। এ ব্যাপারে তাঁর ভূমিকা ও করণীয় কাজের একটা তালিকা দেওয়া হল।

১। শিক্ষককে প্রথমেই দেখতে হবে যেন প্রত্যেকটি ছাত্রের একটি করে ভালো Instrument Box থাকে। এর সঙ্গে যে পেন্সিলটি থাকবে, সেটি যেন drawing pencil (Hard বা H) হয়। পেন্সিলটির শীষ খুব সরু করে কাটা থাকবে।

২। সমস্ত রেখা যেন বামদিক থেকে ডানদিকে টানা হয়।

৩। রেখাগুলি যেন সমান ঘনত্ব (thickness) বিশিষ্ট হয়। যতদূর সম্ভব

সরু ও স্পষ্ট করে রেখাগুলি টানতে হবে।

৪। অঙ্কনের প্রতিটি স্তর যেন পরিষ্কার ও সুস্পষ্টভাবে প্রকাশ করা হয়। যেখানে বিভিন্ন জাতীয় রেখা (যেমন প্রদত্ত রেখা, অঙ্কিত রেখা, প্রমাণের জন্য যোগ করতে হয় বা বাড়াতে হয়, এমন রেখা) ব্যবহার করতে হয়, সেখানে ভিন্ন ভিন্ন রেখার জন্য ভিন্ন ভিন্ন ঘনত্ব ব্যবহার করা উচিত। প্রমাণের জন্য যে রেখা যোগ করতে হয়, বা বাড়াতে হয়, সে রকম রেখাগুলি 'ডট্ লাইন' দিয়ে অঙ্কন করলেই ভালো হয়। যে সমস্ত রেখা অঙ্কন করা হয়, যেগুলি মুছে না ফেলাই উচিত।

৫। ছাত্ররা তাদের অঙ্কনের খাতাটি যেন কোন শক্ত জিনিসের যেমন (কার্ডবোর্ড) উপর রাখে। তা না হলে অঙ্কনের অসুবিধা হবে।

৬। কম্পাসের সাহায্যে ছবি আঁকার সময় যেন তার মাথাতে ধরা হয়।

৭। কম্পাসের দুটি 'পা' যেন সমান হয় এবং কম্পাসের মাথায় কোন 'স্ক্রু' থাকলে,, সেটি, এবং যেখানে পেন্সিল রাখা হয়, সেখানের 'স্ক্রু'টি যেন বেশ ভালো করে আঁটা হয়।

৮। কোন একটি বিন্দুর অবস্থান বোঝাবার জন্য একটি 'ডট্' (dot) না দিয়ে দুটি পরস্পরছেদী সরলরেখার সাহায্যে বোঝানো উচিত।

৯। কোন নির্দিষ্ট মাপের সরলরেখা অঙ্কন করতে হ'লে স্কেল থেকে ঐ নির্দিষ্ট মাপটি নিয়েই সরলরেখা টানা উচিত নয়। প্রথমে একটি বড় সরলরেখা টেনে নিয়ে তার পর কম্পাসের সাহায্যে নির্দিষ্ট মাপ-বিশিষ্ট অংশটি আলাদা করে নিতে হবে।

১০। কোন অবস্থাতেই ছাত্ররা যেন 'আন্দাজ' না করে। অনেক সময় দেখা যায় মাপ না করেই ছাত্ররা কোণ আঁকছে, নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট সরলরেখা টানছে বা সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করছে। এগুলি করা ঠিক নয়। তেমনি সরলরেখা টানার সময় স্কেলের সাহায্য না নিয়েই অঙ্কন করতে গিয়ে তারা সরলরেখাটিকে 'বক্র' করে ফেলে। এ সমস্ত বন্ধ করতে হবে।

অঙ্কনের অংশ :—ছাত্রদের সুবিধার জন্য জ্যামিতির অঙ্কনকে কয়েকটি স্তরে ভাগ করা যেতে পারে। যেমন :—

প্রথমত:, সম্পাদ্যের বিবৃতি (Statement),

দ্বিতীয়তঃ, যে যে অংশ দেওয়া আছে, সেগুলি উল্লেখ করা,

তৃতীয়তঃ, যা দেওয়া আছে, সেগুলিকে চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা,

চতুর্থতঃ, যা অঙ্কন করতে হবে, তার বিবৃতি,

পঞ্চমতঃ, অঙ্কনের জন্য কি কি করতে হবে, তা স্থির করা,

ষষ্ঠতঃ, অঙ্কনটি করে, কি করা হ'ল, বা কি ভাবে করা হ'ল, তার উল্লেখ করা এবং সপ্তমতঃ, অঙ্কনের প্রমাণ।

অঙ্কনের নিয়মাবলী :—সঠিক অঙ্কন প্রথমেই না ক'রে আগে একটি স্কেচ্ করে নিলে ভালো হয়। এই স্কেচে যা দেওয়া আছে, সেগুলির উল্লেখ করতে হবে। স্কেচ থেকেই ঠিক করে নিতে হবে প্রথমে কোন অংশটির অঙ্কন করতে হবে এবং এর জন্য পূর্বে শেখা কোন্ অঙ্কন পদ্ধতি বা উপপাদ্য সহায়ক হবে। অঙ্কন করার পদ্ধতিটি নির্ণীত হয়ে গেলে স্তরে স্তরে অঙ্কনটি এগিয়ে নিয়ে যেতে হবে। প্রতি ক্ষেত্রে অঙ্কনটি ঠিক হচ্ছে কি না, তা একেবারে শেষে যাচাই না করে প্রত্যেকটি স্তরের শেষে করলেই ভালো হয়। অঙ্কনের জন্য **বিশ্লেষণ পদ্ধতিটি** ব্যবহার করা সবচেয়ে সুবিধাজনক।

প্রকল্পিত অঙ্কন (Hypothetical construction) :—যখন সুবিধার জন্য চিত্রে কোনো একটি রেখা বা অন্য একটি চিত্র ব্যবহার করা হয়, কিন্তু কি ভাবে ঐ রেখা বা চিত্র অঙ্কন করা হ'ল তা বলা হয় না, তখন ঐ জাতীয় রেখা বা চিত্রের অঙ্কনকে প্রকল্পিত অঙ্কন বলা হয়। জ্যামিতিতে যখন বলা হয়—ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখাটি ত্রিভুজটিকে দুটি সমান অংশে বিভক্ত করে, তখন এই সমদ্বিখণ্ডক রেখাটির অঙ্কন হয় প্রকল্পিত। প্রকল্পিত অঙ্কন ব্যবহার করা হবে কিনা, এ বিষয়ে অনেকে অনেক জটিল যুক্তিতর্কের অবতারণা করেছেন। যাই হোক্ জ্যামিতি শিক্ষার প্রাথমিক স্তরে এ জাতীয় অঙ্কন সহজে এবং নিরাপদে ব্যবহার করা চলতে পারে।

জ্যামিতি শিক্ষণ সম্বন্ধে কয়েকটি মন্তব্য :—

১। জ্যামিতির সমস্যা দুভাবে উল্লেখ করা যায়। এক হ'ল চিত্রের ভাষারূপ (Reference to a figure), আর একটি হ'ল সম্পূর্ণ ভাষামূলক (verbal)। একটা উদাহরণ দেওয়া হল।

প্রথমটির উদাহরণ :—ABC ত্রিভুজে A, B ও C বিন্দুর থেকে বিপরীত বাহুর উপর লম্বগুলি হ'ল AD, BE এবং CF ; প্রমাণ কর লম্বগুলি সমবিন্দু।

দ্বিতীয়টির উদাহরণ :—প্রমাণ কর, কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে তার বিপরীত বাহুর উপর যে সমস্ত লম্ব টানা হয়, সেগুলি সমবিন্দু।

এ দুটির মধ্যে প্রথমটিই প্রথমে ব্যবহার করা উচিত। ভাষামূলক সমস্যা উঁচু শ্রেণীতে ব্যবহার করা যেতে পারে।

২। কোণের নামকরণ করার সময় সমোচ্চারিত বর্ণ বা জটিল বর্ণ যেন ব্যবহার

করা না হয়। যেমন—BCE বা CDE কোণ, কিংবা LXQ বা MYZ কোণ ইত্যাদি। জটিল চিত্রে বা যেখানে একাধিক কোণ ব্যবহৃত হচ্ছে, সে রকম ক্ষেত্রে রঙীন চক্ ব্যবহার করলে ভালো হয়। বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে শীর্ষবিন্দুর সাহায্যে কোণগুলির নামকরণ করা যেতে পারে।

৩। জ্যামিতির অঙ্কন বা প্রমাণে যেন 'রাফ কাজে' উৎসাহ না দেওয়া হয়।

৪। জ্যামিতিক নাম বা পদ (term) ব্যবহার করার সময় ছাত্ররা যেন বেশ বুঝে তা ব্যবহার করে। অনেক সময় দেখা যায় (=) চিহ্ন এবং (≡) চিহ্নের মধ্যে পার্থক্যই লক্ষ্য করে না। আবার কোন সম্পাদ্য বা উপপাদ্য লিখে রাখার সময় যেন তার সংক্ষিপ্ত পদ (abbreviations) ব্যবহার না করে।

△ABC ও △DEF≡এ ভাবে না লিখে যেন লিখে ABC ও DEF ত্রিভুজ সর্বসম।

৫। চিত্র যেন পরিষ্কার হয় এবং চিত্রের নামকরণ যেন সুস্পষ্ট ভাবে করা হয়। অনেক সময় ছাত্রদের লেখায় E ও F, D ও O ইত্যাদির মধ্যে কোন পার্থক্য খুঁজে পাওয়া যায় না।

৬। নিখুঁতভাবে চিত্র অঙ্কন করতে হলে যন্ত্রের প্রয়োজন আছে সত্য ; কিন্তু যন্ত্র না নিয়েও ছাত্ররা যেন প্রায় নিখুঁত চিত্র অঙ্কন করতে পারে, সেদিকেও বিশেষ দৃষ্টি দেওয়া প্রয়োজন।

৭। প্রমাণ ও চিত্র অঙ্কনে ছাত্রদের যথেষ্ট স্বাধীনতা দিতে হবে। পাঠ্যপুস্তকে যে ভাবে বা যে নামে চিত্র দেওয়া আছে তা পরিবর্তিত করা চলতে পারে এবং পাঠ্যপুস্তকের প্রমাণটি ছাড়াও অন্যভাবে ছাত্র যদি প্রমাণ করতে পারে, তবে কৃতিত্বই তার প্রাপ্য হওয়া উচিত।

৮। প্রতি ছাত্রের জ্যামিতির জন্য পৃথক একটি খাতা বাঞ্ছনীয়।

৯। চিত্রগুলি যেন সামঞ্জস্যপূর্ণ হয় সেদিক ছাত্রদের লক্ষ্য রাখতে হবে।

১০। সঠিক এবং উপযুক্ত ভাষা ব্যবহার করা জ্যামিতির ক্ষেত্রে একান্ত প্রয়োজন। প্রমাণ বা অঙ্কন বোঝাবার সময় যেন অপ্রয়োজনীয় বাক্য, ব্যাকাংশ, শব্দ বা শব্দাংশ ব্যবহার না করা হয়।

ত্রি-মাত্রিক বা ঘন জ্যামিতি (Three dimensional or Solid Geometry) ঃ—আমরা আমাদের চারদিকে যে সমস্ত জিনিস দেখি তার বেশীর ভাগই হ'ল ত্রি-মাত্রিক, এগুলির দৈর্ঘ্য প্রস্থ ছাড়াও গভীরতা বা বেধ আছে। প্রকৃতিকে সম্যকভাবে উপলব্ধি করতে হলে ঘন জ্যামিতি সম্বন্ধে জ্ঞান থাকা একান্ত

প্রয়োজনীয়। গণিতের পাঠ্যক্রমে এইজন্য ঘন জ্যামিতি অন্তর্ভুক্ত করাও শুধু প্রয়োজনীয় নয় অপরিহার্যও বটে। অবশ্য ছাত্ররা সব বয়সেই ঘন-জ্যামিতি যে উপলব্ধি করতে পারবে, তা নয়। এর জন্য উপযুক্ত পূর্বজ্ঞান ও পরিণমন প্রয়োজন। অন্যথায় তারা মুখস্থ করার চেষ্টা করবে এবং অপচেষ্টা হলেই বিষয়টিকে কঠিন মনে করে সযত্নে পরিহার করে চলতে শুরু করবে। ছাত্ররা যখন প্রথম জ্যামিতি শেখে, তখন বিন্দু, রেখা, তল ইত্যাদি অমূর্ত্ত ধারণাগুলি মূর্ত্ত বস্তুর সাহায্যে উপস্থাপিত করা হয়। ধারণাগুলিকে চিত্র, মডেল ইত্যাদির সাহায্যে রূপায়িত করা হয় বলে ছাত্রদের উপলব্ধি করতে কোন প্রকার অসুবিধা হয় না। কিন্তু ঘন জ্যামিতির চিত্র ছাত্রদের সামনে যথেষ্ট বিভ্রান্তির সৃষ্টি করে থাকে। এর চিত্রগুলি কল্পনার সাহায্যে ভরাট করে নিতে হয়। কাজেই কল্পনা শক্তি যথেষ্ট উন্নত না হ'লে ঘন-জ্যামিতি উপলব্ধি করা অত্যন্ত কঠিন হয়ে পড়ে। এইজন্য একটু উঁচু শ্রেণীতে, একটু বয়স বাড়লে তবেই ঘন জ্যামিতি শুরু করা উচিত।

কেবলমাত্র গণিতের ক্ষেত্রেই নয়, অন্যান্য অনেক বিষয়ের ক্ষেত্রেই ঘন জ্যামিতি যথেচ্ছ ভাবে ব্যবহৃত হয়। পদার্থবিগ্যার বিভিন্ন শাখাতেও ঘন জ্যামিতির প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়।

দ্বি-মাত্রিক জ্যামিতি সম্প্রসারিত রূপ থেকেই ত্রি-মাত্রিক জ্যামিতির উদ্ভব হলেও ত্রি-মাত্রিক জ্যামিতির নিজস্ব ক্ষেত্র অনেক বিস্তৃত ও ব্যাপক। ত্রি-মাত্রিক জ্যামিতি শেখার ফলে ছাত্ররা দ্বি-মাত্রিক জ্যামিতির ধারণাগুলি আরো ভালোভাবে উপলব্ধি করতে পারে। তাছাড়া সামতলিক জ্যামিতির ত্রুটী-বিচ্যুতিগুলিও ত্রি-মাত্রিক জ্যামিতির কষ্টি পাথরে সংশোধিত হয়ে যায়। প্রকৃতপক্ষে নিয়মাফিক শেখার আগেই ছাত্র ত্রি-মাত্রিক আয়তন বা ঘন-জ্যামিতির সঙ্গে পরিচিত হয়ে থাকে। সামতলিক জ্যামিতি, পরিমিতি ও বীজগণিতের মাধ্যমেই সে এগুলির সঙ্গে পরিচিত হয়। দ্বি-মাত্রিক জ্যামিতি থেকে ত্রি-মাত্রিক জ্যামিতিতে যাওয়া উচিত। ত্রি-মাত্রিক জ্যামিতি পাঠে ছাত্রদের বোধশক্তি ও তাদের সাধারণ জ্ঞান যথেষ্ট বাড়ে। বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখা প্রধানতঃ পদার্থবিদ্যার সঙ্গে ঘন জ্যামিতির সম্বন্ধ অত্যন্ত ঘনিষ্ঠ।

সামতলিক জ্যামিতির অংশ হিসাবেই ঘন জ্যামিতি শেখাতে হবে। এ রকম ভাবে শেখালে মনোবিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়ে থাকে। কোন নূতন জিনিস শেখাতে হলে তা ছাত্রদের পূর্বজ্ঞানের উপর ভিত্তি করেই শেখানো উচিত। প্রথম অবস্থাতে ছাত্রদের সামতলিক জ্যামিতি ও ঘন জ্যামিতির মধ্যে পার্থক্যটি বুঝিয়ে দিতে হবে। এর জন্য বাস্তব উদাহরণের সাহায্যও নেওয়া চলতে পারে,

আবার ছাত্রদের চিন্তা, যুক্তি ও বিচারশক্তি প্রয়োগ করার মতো ক্ষেত্র গড়ে তুলবার জন্য উপযুক্ত প্রশ্ন করা যেতে পারে। সামতলিক জ্যামিতির "এক সমতলের" শর্তটি তুলে দিয়ে কতকগুলি প্রশ্ন করলে ভালো হয়। যেমন "একই সমতলে অবস্থিত নয় এমন দুটি রেখা হয় সমান্তরাল হবে, নয়তো তারা মিলিত হবে" এ কথা বলা যায় কিনা? এভাবে তাদের বক্র রেখার একটা ধারণা দেওয়া যেতে পারে এবং রেখার তির্যকগতি (Skewness) বলতে কি বুঝায়, তাও শেখানো যেতে পারে। তেমনি "কোন সরলরেখার একটি বিন্দুতে মাত্র একটি লম্ব টানা সম্ভব"—এটি ঠিক কিনা, তা ছাত্রদের পরীক্ষা করতে বলা যেতে পারে। এগুলি সম্বন্ধে চিন্তা করতে গিয়ে ছাত্র লক্ষ্য করবে তার সামতলিক জ্যামিতির জ্ঞানের সাহায্যে সে ঠিকমত অগ্রসর হতে পারছে কি না। তখনই তার ঘন জ্যামিতি শেখার প্রয়োজন অনুভূত হবে। বাস্তব উদাহরণ বা মডেলের সাহায্যে ঘন জ্যামিতি সম্বন্ধে কিছুটা জ্ঞান অর্জন করার পর ছাত্রকে সময়, স্থান ইত্যাদি সম্বন্ধীয় বিবিধ ধারণার মাধ্যমে ঘন জ্যামিতির শিক্ষা দেওয়া চলতে পারে।

Veronese প্রমুখ গণিতজ্ঞ সামতলিক ও ঘন জ্যামিতির পাঠ একসঙ্গে দেবার পক্ষপাতী। তাঁদের মতে, এ ভাবে শিক্ষা দিলে ছাত্রদের পক্ষে উপলব্ধি করা সহজ হয় এবং জ্যামিতি যে একটি বিচ্ছিন্ন বিষয় নয়, সে সম্বন্ধেও তাদের ধারণা জন্মে।

পরিশেষে বলা যেতে পারে জ্যামিতি একটি জীবন্ত ও বিকাশমান বিষয়। গতানুগতিক ভাবে মুখস্থ না করে ছাত্র যদি এতে আবিষ্কারকের ভূমিকা গ্রহণ করে, তবে সে যথেষ্ট আনন্দ লাভ করবে। এর জন্য শিক্ষককে কিন্তু প্রথম থেকেই সচেষ্ট হতে হবে। বিদ্যালয়ে জ্যামিতির পাঠ্যক্রম শেষ করে ছাত্র যেন তার অজানা জগতের জ্ঞান ভাণ্ডারের যবনিকা উন্মোচন করতে এগিয়ে যেতে চায়। তবেই শিক্ষকের কৃতিত্ব ও সাফল্যের পরিচয় পাওয়া যাবে।

—*—

॥ গ বিভাগ ॥

বিবিধ

নাগরিকতার জ্ঞান অর্জনে পাটীগণিত (Arithmetic of Citizenship) :—বর্তমান যুগে শিক্ষা ও জীবন সমার্থক। শিক্ষাকে এখন আর

ভাবীজীবনের প্রস্তুতি হিসাবে দেখা হয় না। জীবনের প্রতিটি দিকে শিক্ষার আলোকরাশি বিচ্ছুরিত হচ্ছে। আমরা আগেই আলোচনা করেছি গণিত আমাদের দৈনন্দিন জীবনে কি ভাবে সাহায্য করে থাকে। এখন দেখা যাক নাগরিকতার জ্ঞান অর্জনে গণিত কিভাবে আমাদের সাহায্য করছে। সাধারণ সভ্য মানুষ হিসাবে গণিতের ব্যবহার বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে অপরিহার্য্য। স্কুল, কলেজ, পোষ্ট অফিস, ব্যাঙ্ক, ইন্স্যুরেন্স প্রভৃতি ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার এতো ব্যাপক যে নাগরিকতার জন্য গণিত (Arithmetic of citizenship) নামে একটি কথা প্রায়ই শোনা যায়। গণিতের যে অংশ নাগরিকের দৈনন্দিন প্রয়োজনে লাগে, সেইগুলি নিয়েই এই গণিতের বিষয়বস্তু গড়ে উঠেছে। বর্ত্তমানে বিষয়টিকে পৃথক ভাবে স্কুল পাঠ্য বিষয় করা চলতে পারে কি না। সে বিষয়ে চিন্তা করা হচ্ছে। দু'শ্রেণীর ছাত্রদের কথা চিন্তা করেই এ জাতীয় গণিতের অবতারণা করা যেতে পারে। এ রকম ছাত্র হল।

প্রথমতঃ—যাদের গণিতে কঠিনতর অংশ আয়ত্ত করার মত ক্ষমতা নেই বা আয়ত্ত করেও লাভবান হতে পারবে না।

দ্বিতীয়তঃ—যে সমস্ত ছাত্র বাণিজ্যিক বৃত্তি (Commercial Career) গ্রহণ করতে চায়। এ জাতীয় গণিতের পাঠক্রম কেমন হবে, সে বিষয়ে London Mathematical Assciation এর মতামত হ'ল—পাঠক্রমে বাণিজ্যিক দিক থেকে গুরুত্বপূর্ণ এবং নাগরিকদের দিক থেকে প্রয়োজনীয়, এমন সমস্ত বিষয় বা অধ্যায় অন্তর্ভুক্ত করতে হবে। যেমন—

১। স্থানীয় আয়ের হিসাব

২। জাতীয় আয়ের হিসাব

৩। সঞ্চয়, বিনিময়, বিনিয়োগ ইত্যাদি

৪। মূলধন ও শ্রম

৫। ইনস্যুরেন্স

৬। আয়ের হিসাবে চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ নির্ণয় ইত্যাদি।

প্রকৃত পক্ষে, এ সমস্ত অধ্যায় বেশ চিত্তাকর্ষক। বর্ত্তমানে বহুমুখী বিদ্যালয় প্রতিষ্ঠিত হওয়ার ফলে অনেক বিদ্যালয়েই বাণিজ্য বিভাগ চালু করা হ'য়েছে। যেখানে বাণিজ্য বিভাগ আছে, সেখানে পাঠক্রমের বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে অনুবন্ধ স্থাপন করা যেমন সহজ, বিষয় শিক্ষকের সঙ্গে গণিত শিক্ষকের সম্পর্ক স্থাপন করাও তেমনি সহজ। তেমনি অর্থনীতি, শিক্ষা, সমাজ বিজ্ঞান রাষ্ট্রবিজ্ঞান প্রভৃতি বিষয়ে

গণিতের বিভিন্ন তথ্য, লেখচিত্র ইত্যাদি ব্যবহার করা চলে।

পরিমিতি (Mensuration) ঃ—পরিমিতিকে বলা যেতে পারে ব্যবহারিক জ্যামিতি। আরার এটিকে জ্যামিতি ও পাটীগণিতের সমন্বয়ও বলা যেতে পারে কারণ পরিমিতির সমস্যা সমাধানে পাটীগণিতের সাহায্যই বেশী নিতে হয়, যদিও অনেক ক্ষেত্রে বীজগণিতের প্রয়োগ অপরিহার্য্য। জ্যামিতির মূলসূত্রগুলির সঙ্গে ছাত্রদের সঙ্গে পরিচয় হবার পরই তাদের পরিমিতি শেখানো যেতে পারে। ব্যবহারিক জীবনে পরিমিতির গুরুত্ব অনেক বেশী বলেই বর্ত্তমানে কোর গণিতেও এটি অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। পরিমিতিকে কিন্তু পাঠক্রমে জ্যামিতি অংশে না রেখে পাটীগণিত অংশে রাখা হয়েছে এবং ছাত্ররাও এটিকে পাটিগণিতের অংশ হিসাবে মনে করে থাকে। কিন্তু আমরা আগেই বলেছি, গণিতকে এরকম বায়ু—নিরোধক কক্ষে বিভক্ত করা যায় না। যাই হোক এখন পরিমিতি কিভাবে শেখান যেতে পারে, সে বিষয়ে আলোচনা করা যাক।

পরিমিতি শেখানো যেতে পারে দুভাবে। এক হ'ল—জ্যামিতির সাহায্যে আর দ্বিতীয়টি হ'ল বীজগণিতের সাহায্যে। প্রথমে জ্যামিতি প্রযোগ করে কিভাবে পরিমিতি শেখানো যেতে পারে, তা দেখা যাক।

জ্যমিতির পদ্ধতিতে ছাত্রদের সমস্যা সমাধানের সূত্রগুলি খুঁজে বের করতে হয় এবং সমাধানের ক্ষেত্রে জ্যামিতির প্রভাব কতটুকু, তা বিচার করতে হয়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার জন্য ছাত্ররা গ্রাফ্ কাগজে ত্রিভুজ অঙ্কিত করে বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা করে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারে। কিন্তু এই পদ্ধতিটি অত্যন্ত দীর্ঘ এবং সার্বজনীন পদ্ধতিও নয়। সেইজন্য ছাত্রদের কোন একটি সূত্র আবিষ্কার করতেই হয়। ধরা যাক তারা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে জন্য $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$এই সূত্রটি ব্যবহার করবে। সূত্রটি ব্যবহার করার আগে একটি ত্রিভুজের সাহায্যে a, b, c, s ইত্যাদির ব্যাখ্যা করা প্রয়োজন। ছাত্রের জ্যামিতির জ্ঞান ও স্বজ্ঞার উপর নির্ভর করে বিভিন্ন জটিল প্রসঙ্গের অবতারণা করা যেতে পারে। অত্যন্ত সহজ সমস্যা বা যে সমস্ত সমস্যার বীজগণিতের সাহায্যে সমাধান করা সম্ভব, সেগুলি এই পদ্ধতির আওতায় পড়ে না। এই পদ্ধতিতে এমন সমস্ত সমস্যাই রাখা হয়, যেগুলির সমাধানের জন্য কোন না কোন জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কন করা এবং জ্যামিতির কোন না কোন সূত্র প্রয়োগ করা একান্তই প্রয়োজন। পদ্ধতিটি নীচু শ্রেণীতে ততটা উপযুক্ত নয়, কিন্তু উঁচু শ্রেণীতে জ্যামিতির উপপাদ্যগুলির পরিস্ফুটনের জন্য বা পরিমিতি শেখানোর জন্য বেশ উপযুক্ত অবশ্য। যখন পাটীগণিতের

মধ্যে পরিমিতি শেখানো হয়, তখন এ পদ্ধতি অনুসরণ করা হয় না।

বীজগণিতের পদ্ধতিতে বিভিন্ন জাতীয় জ্যামিতিক চিত্রের মান নির্ণয় করার জন্য কতকগুলি, সূত্র, তত্ত্ব বা তথ্য স্বীকার করে নেওয়া হয়। অবশ্য চিত্র যদি অপেক্ষাকৃত সহজ হয়, তবে ছাত্রদের সূত্রগুলি আবিষ্কার করতে বলা ভালো কারণ এতে বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে অনুবন্ধ স্থাপন করা সহজ হয়। বীজগণিতের পদ্ধতিতে যে তথ্য বা উপাত্ত দেওয়া হয়ে থাকে, তার সাহায্যেও সূত্রের মাধ্যমে ফল প্রকাশের উপরই বেশী জোর দেওয়া হয়ে থাকে। এতে ছাত্রদের যেমন ঠিকভাবে হিসাব করার একটা অভ্যাস গড়ে ওঠে, তেমনি পাটীগণিতের বিভিন্ন প্রক্রিয়াগুলি ব্যবহার করার সে একটা সুযোগ পায়। তা ছাড়া ছাত্ররা দেখতে পায় যে কতকগুলি সাধারণ ফলকে বীজগণিতের প্রতীকের সাহায্যে সুস্পষ্ট ভাবে প্রকাশ করা সম্ভব। এই পদ্ধতিতে ছাত্ররা যে কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার জন্য $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, এই সূত্রটিকে একটি সাধারণ সূত্র বলে ব্যবহার করতে পারে।

অবশ্য এই পদ্ধতিতে ছাত্রদের কতকগুলি হিসাব যেমন ছোট ছোট গুণ, ভাগ বর্গমূল নির্ণয়, আসন্ন মান নির্ণয় প্রভৃতির ক্ষেত্রে দক্ষতা অর্জন করতে হবে। সমস্যাগুলি এমন ভাবে উপস্থাপিত করতে হবে যাতে ছাত্ররা তাদের বীজগণিতের জ্ঞানের পরিপূর্ণ প্রয়োগ করতে পারে। অবশ্য তারা যাতে যান্ত্রিকভাবে প্রতীকের ব্যবহার ও বীজগণিতের সূত্রের প্রয়োগ না করে জিনিসটি সম্যকভাবে উপলব্ধি করতে পারে, সেদিকেও সবিশেষ দৃষ্টি দিতে হবে।

পরিমিতির দৈনন্দিন জীবনে গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহারিক প্রয়োগের জন্যই এটিকে গণিত পাঠক্রমের অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। প্রকৃতপক্ষে এর ব্যবহারিক ও প্রয়োগমূলক মূল্য অত্যন্ত বেশী। কতকগুলি বিশেষ আকৃতির জ্যামিতিক বস্তু সম্বন্ধে এটি যেমন ছাত্রদের পরিচিত করে দেয়, তেমনি বিভিন্ন আয়তনের ক্ষেত্রফল ঘনফল ইত্যাদি নির্ণয় করতে গিয়ে ছাত্ররা জ্যামিতি, বীজগণিত ও পাটীগণিতের মধ্যে একটা সহজ ও স্বাভাবিক অনুবন্ধ খুঁজে পায়। পরিমিতির বিভিন্ন সমস্যার মধ্যে সমকোণী চৌপল (Rectangular parallelopiped), প্রিজম (prism), লম্বা বৃত্তাকার চোঙ (Right-circular cylinder) ; পিরামিড (pyramid) ও লম্বা বৃত্তাকার শঙ্কু (Right circular cone) ইত্যাদির ঘনফল নির্ণয়, ক্ষেত্রফল নির্ণয় প্রভৃতিই উল্লেখযোগ্য। ছাত্রদের সূত্রগুলি জানলেই চলবে কারণ প্রমাণ উচ্চ গণিতের অন্তর্ভুক্ত। অবশ্য ছাত্ররা সূত্রগুলি মুখস্থ করে এবং সম্পূর্ণ যান্ত্রিক ভাবেই সেগুলি প্রয়োগ ক'রে থাকে। যদি বাস্তব অভিজ্ঞতার

মধ্য দিয়ে ছাত্রদের শিক্ষা দেওয়া হয়, তাহলে সুফল পাওয়া যায়।

পরিসংখ্যান (Statistics :—আমাদের দৈনন্দিন জীবনে পরিমাপ একটি বিশেষ স্থান অধিকার করে আছে। প্রায় প্রতিনিয়তই আমাদের পরিমাপের সাহায্য নিতে হয়। আমরা বিভিন্ন ব্যক্তির উচ্চতা বা ওজন নির্ণয় করি ; বিভিন্ন বস্তু, স্থান বা কালের মাপ গ্রহণ করি। কিন্তু সব সময় বা সবজায়গাতে, পরিমাপের এককটি একই থাকে না। কখনও প্রয়োজন গজ' ফুট ইঞ্চি বা মিটারের, কখনও ব্যবহার করি কিলোগ্রাম, লিটার প্রভৃতি। আবার বুদ্ধি, ক্ষমতা প্রভৃতিও আমাদের পরিমাপের বিষয়বস্তু হয়ে থাকে। এই সমস্ত বিভিন্ন জাতীয় পরিমাপের জন্যই পরিসংখ্যান নামে গণিত শাস্ত্রের নূতন একটি শাখার উদ্ভব হয়েছে।

পরিসংখ্যানকে অনেকে পাটীগনিতের ফলিত রূপ বলে আখ্যা দিয়ে থাকেন কিন্তু এভাবে বললে পরিসংখ্যানকে অনেক সঙ্কুচিত করেদেওয়া হয়। পরিসংখ্যানে পাটীগণিতের প্রথম চারটি নিয়মের ব্যাপক ব্যবহার করা হয় ঠিকই, কিন্তু কেবল সেইজন্যই একে ফলিত পাটীগণিত বলা ঠিক নয়। এটিকে আমরা গণিত শাস্ত্রের একটি নূতন শাখা বলে মনে করে নিতে পারি। এই নূতন শাখাটি কিন্তু সম্ভাবনার নীতির উপর প্রতিষ্ঠিত। যেখানে আমরা খুব বড় বা অসুবিধাজনক আকার বিশিষ্ট সংখ্যার সম্মুখীন হই, তখন তাদের পরিমাণ গত বিশেষত্ব স্থির করার জন্য কোন পদ্ধতি নির্ণয় করা এবং সেই পদ্ধতিটি উপযুক্ত ও যথেষ্ট কি না তা নির্ণয় করা হল পরিসংখ্যানের কাজ। যখন কোন একটি বিশেষ ঘটনা বা অনেকগুলির ঘটনার বিভিন্ন তথ্য (অঙ্ক, সংখ্যা ইত্যাদি) দেওয়া থাকে, তখন পরিসংখ্যান এই সমস্ত তথ্যগুলি থেকে ঘটনাটির বা ঘটনাগুলির পরিমাণ গত বৈশিষ্ট্য নির্ধারণ করে দেয়। এই নির্ধারণ করার ব্যাপারে অবশ্য সম্ভবনার নীতিটি অনুসরণ করা হয়। অবশ্য পরিসংখ্যানের সঠিক ব্যবহারের জন্য যে সমস্ত মূলনীতি বা তত্ত্ব জানা প্রয়োজন, সেগুলি বেশ কঠিন ও অমূর্ত্ত বলে বিদ্যালয়ে বিষয়টি অন্তর্ভুক্ত করা যুক্তিযুক্ত নয়। আবার দৈনন্দিন জীবনেও পরিসংখ্যানের গুরুত্ব ও অবদান কম নয়। সেইজন্য বিদ্যালয়ের পাঠক্রমে পরিসংখ্যানের সহজ অংশগুলি (বর্ণনামূলক পরিসংখ্যান) শেখানোর ব্যবস্থা করা হয়েছে। কোন বৎসর ফসল কেমন হবে, সারা বৎসরের গড় বৃষ্টিপাত, ভোটে কে জিতবে, পরীক্ষাতে পাশের হার কি রকম হতে পারে এগুলি এখন ছাত্রদের সাধারণ জ্ঞানের পরিধির মধ্যে পড়েছে। এগুলির সদুত্তরের জন্য পরিসংখ্যানের সাহায্য নেওয়া যেতে পারে। তা ছাড়া বর্ত্তমানে শিক্ষা হচ্ছে জীবনকেন্দ্রিক। কজেই ছাত্রদের এমন ভাবে তৈরী করতে হবে যাতে তারা

ভবিষ্যতে উপযুক্ত নাগরিক হিসাবে পরিচিত হতে পারে।

যাই হোক এখন দেখা যাক পরিসংখ্যান কিভাবে শুরু করা যেতে পারে। পাটিগণিতের প্রথম চারটি নিয়ম এবং সেগুলির বিস্তৃত ও ব্যাপক ব্যবহারই হ'ল পরিসংখ্যান পদ্ধতিতে সংখ্যাববাচক হিসাব-নিকাশের মূল ভিত্তি। সেদিক দিয়ে দেখতে গেলে পরিসংখ্যান পাটীগণিতের সাহায্যেই শুরু করা যেতে পারে। এভাবে শুরু করলে অবশ্য পরিসংখ্যানকে পাটীগণিতের ফলিত রূপ হিসাবেই ধরে নেওয়া হয়। এর কতকগুলি সুবিধাও আছে। পরিসংখ্যানে খুব বড় বড় সংখ্যা বা রাশি নিয়ে কাজ করতে হয় বলে ছাত্রদের পরিষ্কার ভাবে ও ধৈর্য্য সহকারে কাজ করার একটা সু-অভ্যাস গড়ে ওঠে। তা ছাড়া পাটীগণিতে শেখা অনেক জিনিস তাদের প্রায়ই ব্যবহার করতে হয় বলে পাটীগণিতের চর্চা আরো বেশী হয়। অর্থাৎ পরিসংখ্যান শেখার ফলে সংখ্যামূলক হিসাব-নিকাশে ছাত্ররা বেশ পারদর্শী হয়ে থাকে। পরিসংখ্যান শেখার জন্য ছাত্রদের কতকগুলি পারিভাষিক শব্দের সঙ্গে পরিচিত হতে হয়। এই শব্দ বা পদগুলি কিন্তু বেশ পরিষ্কার ভাবে ব্যাখ্যা করে দেওয়া প্রয়োজন। এর জন্য ছাত্রদের দৈনন্দিন্য জীবনের বাস্তব উদাহরণের সাহায্য নেওয়া উচিত। পরিসংখ্যানে ব্যবহৃত পদের মধে Population হল একটি। কিন্তু এখানে Population বলতে জনসমষ্টি বোঝায় না। যা বোঝায় তা হ'ল-সাধারণ বৈশিষ্ট্যপূর্ণ কতকগুলি বস্তুর সমষ্টি যে বৈশিষ্ট্যটিকে আবার সংখ্যাবাচক মান দিয়ে প্রকাশ করা যায় এবং ঐ বৈশিষ্ট্যটি পর্য্যালোচনা করাই হ'ল পরিসংখ্যানের কাজ। Population এবং তার বৈশিষ্ট্য সম্বন্ধে ছাত্রদের উপলব্ধি আরো পরিষ্কার করার জন্য তাদের কতকগুলি প্রশ্ন করা যেতে পারে বা কতকগুলি সহজ উদাহরণের উল্লেখ করা যেতে পারে। যেমন যদি কোন একটি স্থানের সারা বৎসরের বৃষ্টিপাতের পরিমাণ পরিমাপ করতে হয় তবে Population হ'ল বৎসরের সমস্ত দিনগুলি, আর বৈশিষ্ট্য হ'ল—প্রতিদিনের বৃষ্টিপাতের পরিমাণ। তেমনি ভাবে অন্যান্য পদ যেমন ফ্রীকোয়েন্সী, বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন স্কোর, সারিবিন্যাস প্রভৃতি ছাত্রদের শেখানো যেতে পারে। Population এর পরিসংখ্যানগত মান নির্ণয়ের জন্য তাদের কিছু কিছু সূত্র শেখাতে হবে। Mean, Median, Mode, Standard Deviation ইত্যাদি সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করাবার জন্যও বাস্তব উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে। সহজ দৃষ্টান্ত নিয়ে অগ্রসর হতে পারলেই ভালো হয়। Mean শেখাবার জন্য ছাত্রদের গণিতের 'গড়' সম্বন্ধে জ্ঞানের সাহায্য নেওয়া যেতে পারে। তেমনি একটি স্কেলের সাহায্যে Median ব্যাখ্যা করা যেতে পারে। আবার শ্রেণীর ছাত্রদের মধ্যে কোন্ রঙের জামা বেশী ছাত্র পরে আসে, তার দৃষ্টান্ত দিয়ে Mode

সম্বন্ধেএকটা ধারণা দেওয়া যেতে পারে। পরিসংখ্যানে বিভিন্ন জাতীয় লেখচিত্র ব্যবহার করা হয়। এ সমস্ত লেখচিত্র আবার দৈনন্দিন জীবনেও অনেক ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়। ছাত্রদের এই লেখচিত্রের সঙ্গেও সুপরিচিত করে দিতে হবে। তারা লেখচিত্রগুলি বেশ ভালো ভাবে পর্য্যবেক্ষণ করবে আবার নিজেরা প্রয়োজনমত বিভিন্ন লেখচিত্র অঙ্কনও করবে। এভাবে ছাত্রদের পরিসংখ্যানের সহজ নিয়মগুলি শেখান যেতে পারে।

ভাষা হিসাবে গণিতের স্থান (Mathematics as a Language) :— বিজ্ঞানের, বিশেষ করে পদার্থ-বিদ্যা বা যন্ত্রবিদ্যার কোন বই খুললে প্রথমে যে জিনিসটি চোখে পড়ে, তা হ'ল গাণিতিক প্রতীকের যথেচ্ছ ব্যবহার। পদার্থ-বিদ্যার বা অন্য কোন ভৌত বিজ্ঞানের কোন নিয়ম যদি গড়ে তুলতে হয়, তবে গণিতের সাহায্য না নিয়ে কোন উপায় নেই। আমরা সাধারণতঃ যে ভাষায় কথাবার্তা বলে থাকি সে ভাষাতে ঐ সমস্ত নিয়ম প্রকাশ করা যায় না। পদার্থ-বিদ্যার কোন কোন অংশ পুরোপুরি প্রতীকের সাহায্যেই ব্যাখ্যা করা হয়ে থাকে এবং সেই অংশগুলি লিখিত ভাষার সাহায্যে প্রকাশ করা মোটেই সম্ভব নয়। কাজেই দেখা যাচ্ছে গণিতের প্রতীকগুলি প্রথমে যদিও নিছক প্রতীক হিসাবেই ব্যবহৃত হয়েছিল, পরবর্তীকালে সেগুলি ভাষার যে সমস্ত গুণ থাকা প্রয়োজন—তাও অর্জন করেছিল।

অবশ্য অন্য দৃষ্টিভঙ্গী দিয়ে বিচার করলে গণিতকে একটি ভাষা মনে করা যেতে পারে। একটি জটিল লিখিত বক্তব্যকে গণিতে প্রতীকের সাহায্যে অত্যন্ত সহজভাবে প্রকাশ করা সম্ভব। আবার লিখিত বক্তব্য অনেক সময় অস্পষ্ট বা দ্বর্থ্যক হতে পারে। এমন কি, বিভিন্ন পাঠক বক্তব্যটির বিভিন্ন অর্থ করে থাকতে পারে। কাজেই দেখা যাচ্ছে লিখিত বক্তব্যের সাহায্যে আমরা নির্ভুল, সংক্ষিপ্ত ও সার্বজনীন কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি না। অথচ বিজ্ঞানে এই জিনিসগুলি অপরিহার্য্য। কিন্তু ভাষার বদলে গণিতের প্রতীক ব্যবহার করলে উপরের সব দোষ দূর করা সম্ভব হয়। ভাষার যে গুণ নেই গণিতের প্রতীকের কিন্তু সে গুণ আছে। কাজেই গণিতকে আমরা উন্নততর ভাষা বলতে পারি।

আর এক দিক থেকে জিনিসটা দেখা যেতে পারে। বর্ত্তমান বিজ্ঞানের অভূতপূর্ব সাফল্যের জন্য নব নব দিগন্ত আমাদের সামনে উদ্ভাসিত হচ্ছে। এগুলির সঙ্গে পূর্বে আমাদের কোন পরিচয় তো ছিলই না—এগুলির কথা আমরা চিন্তা করতেও পারি নি। ভাষা নির্ভর করে বাস্তব অভিজ্ঞতার উপর। অভিজ্ঞতা অর্জনের জন্য আমরা কেবলমাত্র পঞ্চেন্দ্রিয়ের উপর নির্ভর করে থাকি বলেই আমাদের ভাষা তত

সমৃদ্ধ হতে পারে না। কাজেই নূতন যে সমস্ত পরিস্থিতির উদ্ভব হয় আমরা সেগুলিকে ভাষার সাহায্যে প্রকাশ করতে পারি না। এই সমস্ত পরিস্থিতি ব্যাখ্যা করার জন্য এগুলির সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত বিমূর্ত গাণিতিক প্রতীকের সাহায্যে নিতে হয়। কাজেই এখানেও দেখা যাচ্ছে গণিত একটি ভাষার মতই কাজ করছে। এর জন্য আমরা প্রথম দিকেই বলেছি গণিত একটি ভাষা ঠিকই, কিন্তু তা হল ভাষার সংক্ষিপ্ততম রূপ। একে ভাষার Short-hand বলা যেতে পারে।

মূর্ত্ত গণিত (Place of concretisation in Mathematics) :—অনেকের ধারণা গণিত একটি অমূর্ত্ত বিষয়। দর্শন শাস্ত্রের মত গণিত অমূর্ত্ত ধারণা নিয়ে আলোচনা করে। ফলে ছাত্ররা তো বটেই, অনেক শিক্ষক বা শিক্ষিত ব্যক্তিও গণিত সম্বন্ধে একটা ভুল ধারণা পোষণ করে থাকেন। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে গণিতকে মূর্ত্ত করার যথেষ্ট সুযোগ আছে। পাটীগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি প্রভৃতি বিভিন্ন শাখাতে মূর্ত্ত বিষয়ের সাহায্য নিয়ে অগ্রসর হওয়া সম্ভব। এ সম্বন্ধে পূর্বেই ব্যাপক আলোচনা করা হয়েছে। গণিতে বিভিন্ন প্রদীপন, বাস্তব-অভিজ্ঞতা-নির্ভর জ্ঞান, দৈনন্দিন জীবনে গণিতের প্রয়োগ, ম্যাপ, লেখচিত্র প্রভৃতি অনেকের মাধ্যমে অমূর্ত্ত গণিতকে মূর্ত্ত করে তোলা যায়, যাকে অবাস্তব মনে করা হত, তাকেই বাস্তবে রূপায়িত করা সম্ভব হয়।

গণিতের বিনোদনমূলক কাজ (Recreational Activities) :—গণিতকে অনেকে একটি নীরস বিষয় বলে মনে করে থাকেন। কিন্তু গণিতে বিনোদনমূলক কাজের যথেষ্ট সুযোগ আছে এবং সার্থকভাবে অবসর সময় যাপনের জন্য গণিতের সাহায্য নেওয়া চলতে পারে। গণিতে বিভিন্ন ধাঁধা বা মজার মজার দৃষ্টান্ত দেখা যায় সবগুলি উল্লেখ করা সম্ভব নয় বলে মাত্র কয়েকটির উল্লেখ করা হ'ল।

কতকগুলি মজার দৃষ্টান্ত :—

ক) $\frac{1}{2}$ এর $\frac{1}{2}$কে $\frac{1}{2}$ দিয়ে ভাগ করলে $\frac{1}{2}$ই হবে।

খ) কোন একটি পূর্ণ সংখ্যা থেকে তার অঙ্কগুলির যোগফল বাদ দিলে বিয়োগফলটি 9 দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য হবে।

গ) কতকগুলি সংখ্যা এমন হয়, যে গুলির যোগফল ও গুণফল একই হয়। যেমন—

2 আর 2, 3 আর $\frac{3}{2}$, 4 আর $\frac{4}{3}$, 5 আর $\frac{5}{4}$—ইত্যাদি।

কতকগুলি মনে রাখার মত সংখ্যা :—

ক) তিনবার 5 ব্যবহার করে 1 লিখতে হবে।

$5^{5-5}=5^{\circ}=1$

খ) তিনবার 7 ব্যবহার করে 0 লিখতে হবে।

$(7-7)^7$ বা $\frac{7-7}{7}$

গ) পাঁচবার 3 ব্যবহার করে 37 লিখতে হবে।

$33+3+\frac{3}{3}$

ঘ) পাঁচবার 3 ব্যবহার করে 10 লিখতে হবে।

$\frac{(3\times3\times3)+3}{3}$

কতকগুলি প্রতারণা (fallacy)

ক) প্রমাণ করতে হবে $4=5$

সমাধান : $-20=-20$

or $16-36=25-45$

or $4^2-36=5^2-45$

[উভয় দিকে $\frac{81}{4}$ যোগ করে]

$4^2-36+\frac{81}{4}=5^2-45+\frac{81}{4}$

or $\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$

or $4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$.

or $5=5$

ধাঁধা :—

কোন একটি লোককে যদি মাসের ১ তারিখে ১ পয়সা পরের দিন দ্বিগুণ, তার পরের দিন আগের দিনের দ্বিগুণ, এই হিসাবে দেওয়া হয়, তবে মাসের শেষে তাকে কত দিতে হবে? (৩০ দিনে মাস)

[পাঠক-পাঠিকাদের অনুরোধ করা হচ্ছে তাঁরা যেন দয়া করে উত্তরটি গ্রন্থকারকে পাঠিয়ে দেন]

বুদ্ধির ব্যবহার করতে হবে এমন প্রশ্ন :—

ক) সম্বন্ধ নির্ণয় :—

3 এর সঙ্গে 9 এর যে সম্বন্ধ 6 এর সঙ্গে সে সম্বন্ধ (12, 18, 24, 36)

খ) অপ্রয়োজনীয় সংখ্যা বাদ দেওয়া :—

15, 14, 13, 29, 16

গ) সংখ্যা সাজানো :—

5634, 5364, 6435, 6543, 5463 এইগুলি মনে মনে পর্যায়ক্রমে সাজাতে হবে এবং যে সংখ্যাটি মাঝখানে থাকবে বলে মনে হবে তার নীচে দাগ দিতে হবে।

ঘ) লুপ্ত সংখ্যা উদ্ধার :—

10, —, 15, 16, 20, 21, —, 26, 30.

ঙ) সারি সম্পূর্ণ করা :—

2, 5, 8, 11, —, —,

চ) সত্য মিথ্যা নির্ণয় :—

500 এর $5\% = 25$ সত্য/মিথ্যা

$x^{\circ} = 0$ সত্য/মিথ্যা

ছ) সাধারণ জ্ঞান পরীক্ষা করা :—

দুই তৃতীয়াংশের অর্ধেকের দ্বিগুণ কত হবে ?

একজন লোক যদি 10 মিনিটে ষ্টেশনে পৌছাতে পারে, তবে একসঙ্গে হাটছে এমন 10 জন লোকের কত সময় লাগবে ?

একজন ছেলের 16 বছরের মধ্যে মাত্র 4 বার জন্মদিন পালন করা হয়েছে, অথচ কোন জন্মদিন বাদ পড়ে নি। তার জন্মদিন কবে।

জ্যামিতির কতকগুলি স্বীকৃত প্রতীক

প্রতীক	অর্থ	প্রতীক	অর্থ
$\triangle$	ত্রিভুজ	$\angle$	কোণ
$\square$	আয়তক্ষেত্র	$\parallel$	পরস্পর সমান্তরাল একটি
$\perp$	লম্ব	$>$	একটি কোন আর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর
$\backsim$	অনুরূপ বা সদৃশ	$<$	একটি কোণ আর একটি কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর
$\cong$	সর্বসম		

গণিত সম্বন্ধে কোঠারী কমিশনের অভিমত।

কোঠারী কমিশন (1964-66) গণিতের পাঠক্রম, পাঠ্যপুস্তক, শিক্ষণ পদ্ধতি ইত্যাদি সম্বন্ধে কয়েকটি মূল্যবান অভিমত প্রকাশ করেছেন। নীচে সে সম্বন্ধে

সংক্ষেপে আলোচনা করা হ'ল।

কেন গণিত শেখান হবে ?—বৈজ্ঞানিক গবেষণার ভিত্তিই হ'ল গণিত। আর বর্ত্তমান যুগ হ'ল বিজ্ঞানের যুগ। কাজেই যুগের সঙ্গে তাল রাখতে হ'লে গণিতের সাহায্য না নেওয়া ছাড়া উপায় নেই। কেবলমাত্র ভৌত বিজ্ঞানের ক্ষেত্রেই নয়, জীব-বিজ্ঞান বা বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখাতেও গণিতের প্রয়োগ অপরিহার্য্য। তারপর আছে স্বয়ংক্রিয় যন্ত্রের ব্যবহার (automation)। বলতে গেলে, বর্ত্তমান যুগটাই হ'ল বৈজ্ঞানিক বিপ্লবের যুগ। এই সমস্ত বৈজ্ঞানিক পরিবর্তন ও বিপ্লব পরোক্ষভাবে প্রত্যেককেই গণিত পাঠে বাধ্য করছে। গণিতের প্রয়োজনীয়তা অপরিসীম বলে বিদ্যালয়েই উপযুক্তভাবে এর ভিত্তি স্থাপন ক'রতে হবে।

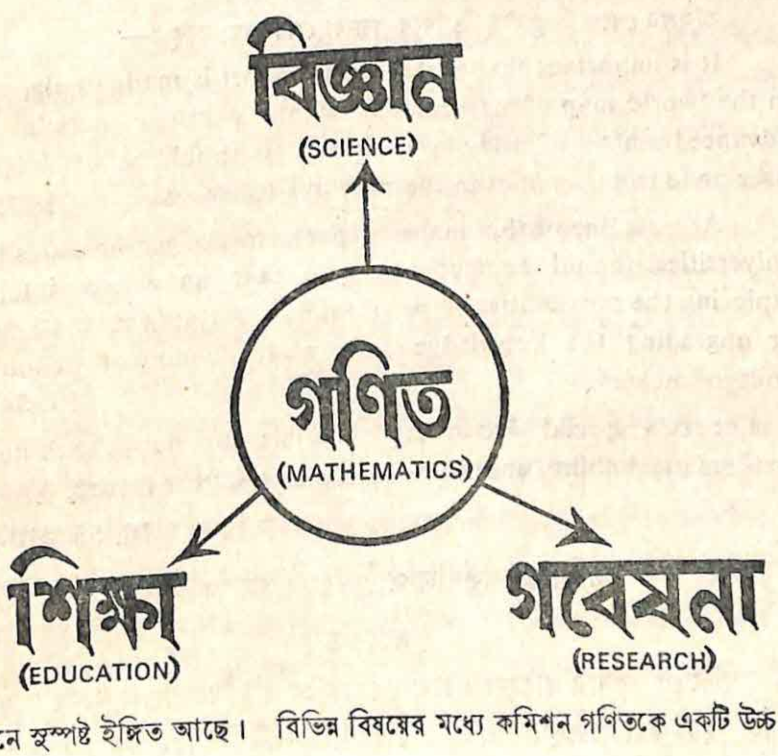
বিভিন্ন স্তরে গণিতের পাঠক্রম :—"কোঠারী কমিশন গণিতের বর্ত্তমান বিভাগ ও উপ-বিভাগগুলির সমালোচনা ক'রে বলেছেন, গণিতের মধ্যে পাটীগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি, ত্রিকোণমিতি—এই রকম সুস্পষ্ট ও পৃথক বিভাগ করা ঠিক নয়। এতে গণিতের পাঠক্রমটি যেমন অযথা বেড়ে যায়, তেমনি একই জিনিসকে বিভিন্ন বিভাগে পৃথক পৃথকভাবে পড়াতে হয় বলে সময় ও শ্রম উভয়ই নষ্ট হয়। গণিত বিষয়টিকে একটি পূর্ণাঙ্গ এবং অখণ্ড বিষয় বলে ধরে নিতে হবে, আর জোর দিতে হবে গণিতের নিয়ম, মূলনীতি, যুক্তিসম্মত বিচারকরণ প্রভৃতি শিক্ষা দেবার উপর। প্রাথমিক স্তরে (Class I to VII or I to VIII) গণিতের পাঠক্রমে থাকবে সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা, সংখ্যা গণনা ও চিহ্নের ব্যবহার, সমীকরণ, লেখ চিত্র এবং আপেক্ষিক সম্বন্ধ বিষয়ক ধারণা (functions)। জ্যামিতির পাঠক্রমটিকে যুক্তিসম্মতভাবে সাজাতে হবে। মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক স্তরেও (VIII to X এবং X to XI) পাঠক্রমের পুনর্বিন্যাস করতে হবে। কতকগুলি অধ্যায়, যেমন উৎপাদক নির্ণয়, গ. সা. গু. বা ল. সা. গু নির্ণয়, পৃথক ভাবে পড়ানোর কোন প্রয়োজনীয়তাই নেই। ত্রিকোণমিতি পড়ানো যেতে পারে বীজগণিতের সঙ্গে। অভেদাবলী, ত্রিভুজের সমাধান, উচ্চতা ও দূরত্ব সম্বন্ধীয় প্রশ্ন অনেক বাদ দেওয়া যেতে পারে। তেমনি জ্যামিতিতে সম্পাদ্য বা উপপাদ্য মুখস্থ করা, extra কষানো প্রভৃতি বন্ধ করা যেতে পারে। জ্যামিতি শিক্ষা দেবার জন্য আধুনিক পদ্ধতির (axiomatic and ystematic) সাহায্য নিতে হবে। জ্যামিতির সংজ্ঞা প্রভৃতির জন্য 'Set, language' ব্যবহার করতে হবে। এর জন্য School Mathematics Study Group (School Mathematics Study Group Series—Yale University Press, 1960) যে সমস্ত ভাষা, চিহ্ন বা প্রতীক ব্যবহারের কথা বলেছেন, সেগুলি

ব্যবহার করাই বাঞ্ছনীয়।

শিক্ষণ পদ্ধতি :—কোঠারী কমিশন গণিত শিক্ষণ পদ্ধতি সম্বন্ধে এই অভিমতই পোষণ করেন যে গতানুগতিক পদ্ধতিতে গণিত শিক্ষা দিলে তা যান্ত্রিক হবেই। সেইজন্য কমিশন গণিতে নির্ভুল হিসাবের উপর জোর না দিয়ে নির্ভুলভাবে গণিতের নীতি অনুসরণ করার উপরই বেশী জোর দিয়েছেন। গণিত শিক্ষণে যে সমস্ত আধুনিক পদ্ধতির কথা বলা হয়েছে কমিশন সেগুলি অনুসরণ করার কথা বলেছেন। তবে এগুলি যেন হঠাৎ অনুসরণ করা না হয়। এর জন্য ব্যাপক প্রস্তুতির প্রয়োজন। নূতন পদ্ধতি অনুসরণ করার আগে গণিত শিক্ষকদের উপযুক্তভাবে শিক্ষণ দিতে হবে এবং যাঁরা দীর্ঘদিন পূর্বে শিক্ষণ প্রাপ্ত হয়েছেন, তাঁদের জন্য পুনরায় শিক্ষণের ব্যবস্থা করতে হবে (refresher course)।

কমিশন এ কথাও বলেছেন—কোন একটি শ্রেণীতে একটি নির্দিষ্ট নিয়ম অনুযায়ী শিক্ষা দিতেই হবে এমন কোন কথা নেই। ছাত্রদের বয়স, বুদ্ধি ও উপলব্ধি করার ক্ষমতা অনুযায়ী শিক্ষণ পদ্ধতির পরিবর্তন করা যেতে পারে।

গণিতের স্থান :—বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে গণিতের স্থান কোথায়, সে সম্বন্ধেও



কমিশনে সুস্পষ্ট ইঙ্গিত আছে। বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে কমিশন গণিতকে একটি উচ্চ ও

গুরুত্বপূর্ণ স্থান দিয়েছেন। বিজ্ঞান শিক্ষা ও গবেষণার সঙ্গে গণিতের সম্পর্ক অত্যন্ত ঘনিষ্ঠ এবং এ কথা বলা যেতে পারে—গণিত রয়েছে এদের কেন্দ্রস্থলে।

কমিশন পরবর্তী পাঁচ থেকে দশ বৎসরের মধ্যে অন্ততঃ তিন চারটি বিশ্ববিদ্যালয়ে গণিতে উচ্চতর শিক্ষণ ও গবেষণার ব্যবস্থা করার কথা বলেছেন। তাঁদের মতে মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয় এবং Ramanujan Institute of Mathematics হ'ল এর জন্য উপযুক্ত কেন্দ্র। তাছাড়া স্কুল ও কলেজের শিক্ষকদের গণিত সম্বন্ধে আগ্রহী করার জন্য তাঁদের সুপ্ত সম্ভাবনার বিকাশের জন্য এবং তাঁদের গণিতে অধিকতর দক্ষতা অর্জনের জন্য কমিশন 'বিধিবদ্ধ শিখনের' (Programmed learning) কথাও বলেছেন। এরজন্য U.S.A থেকে প্রকাশিত প্রয়োজনীয় পুস্তকাদির সাহায্যও নেওয়া যেতে পারে। এ ছাড়া স্কুলের ছাত্রদের জন্যও আবাসিক গণিত গবেষণা কেন্দ্র প্রতিষ্ঠা করার সুপারিশ কমিশন করেছেন। আর একটি কারণে কমিশন গণিতকে এত বেশী গুরুত্ব দিয়েছেন। তা হ'ল—অন্যান্য বিষয়ে ছাত্রদের প্রতিভা বা মেধার সন্ধান ক'রতে যে পরিমাণ সময় ও পরিশ্রমের প্রয়োজন গণিতে ছাত্রদের প্রতিভা বা মেধার সন্ধান ক'রতে সময় লাগে তার চেয়ে অনেক কম।

কমিশন থেকে কিছু উদ্ধৃতি দিয়ে বক্তব্য শেষ করা যাক্ :—

It is important that a deliberate effort is made to place India on the 'world map of mathematics' within next two decades or so. Advanced centres of study in mathematics should be established at three or four universities in the next five to ten years. 16.53(410)

At least one of the major departments of mathematics in the Universities should be encouraged to take an active interest in exploring the possibilities of programmed learning in mathematics for upgrading the knowledge and understanding of School and College teachers

16. 54 (410)

One or two special Secondary Schools for pupils with unusual mathematical ability should be set up in the near future.

16. 55 (410—411)

"গণিতের বর্তমান পাঠক্রমের সমালোচনা"

(সংকেত)

গণিতের বর্তমান পাঠক্রম সম্বন্ধে বলা হয়-যে এটি দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গে সম্বন্ধ রেখেই স্থির করা হয়েছে। প্রকৃত প্রস্তাবে পাঠক্রমটি নির্ধারন করার সময় গণিতের

দৈনন্দিন জীবনে প্রয়োজনীয়তার (অর্থাৎ ব্যবহারিক মূল্য) কথাই বেশী করে চিন্তা করা হয়েছিল। পূর্বে গণিতের পাঠক্রমে এমন অনেক বিষয় অন্তর্ভুক্ত ছিল, যেগুলির ব্যবহারিক জীবনে খুব বেশী একটা প্রয়োজনীয়তা ছিল না। সেই সমস্ত বিষয় বা অধ্যায়গুলি বর্তমান পাঠক্রমে বাদ দেওয়া হয়েছে। তার বদলে এমন সমস্ত বিষয় অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে যেগুলির দৈনন্দিন জীবনে প্রয়োজনীয়তা অনেক বেশী। পাঠক্রম যাঁরা নির্ধারন করেছেন, তাঁরা বলেন-"the present course in core mathematics in our secondary school is reoriented to the use of Mathematics in daily life."

পাঠক্রমটির বিভাগ :—সমগ্র পাঠক্রমটি লক্ষ্য করলে এর কতকগুলি বিভাগ লক্ষ্য করা যায়। যেমন :—পাটীগণিত, বীজগণিত' জ্যামিতি ও পরিমিতি এবং প্রাথমিক পরিসংখ্যান (বর্ণনামূলক, descriptive)। এ পাঠক্রম অবশ্য কোরগণিতের পাঠক্রম। এখন দেখা যাক্ এ পাঠক্রমের কোন্ কোন্ অংশ আমাদের দৈনন্দিন জীবনে কাজ লাগে। পাটীগণিতের প্রয়োজনীয়তাই দৈনন্দিন জীবনে সবচেয়ে বেশী। পাটীগণিতের পাঠক্রমে সে সমস্ত বিষয়ের উপযোগিতা দৈনন্দিন জীবনে বেশী—সেগুলি হ'ল :—মেট্রিক পদ্ধতি, দশমিক, ভগ্নাংশ, গড় নির্ণয়, ঘন নির্ণয়, ঐকিক নিয়ম, সময় ও কার্য্যবিষয়ক প্রশ্নাবলী, বর্গ ও বর্গমূল নির্ণয়, ইত্যাদি। বীজগণিতের প্রয়োজনীয়তা কিন্তু তত ব্যাপক নয়। উচ্চতর শিক্ষার জন্য বীজগণিতের প্রয়োজনীয়তা অবশ্য অনেক বেশী। তবে বর্তমান পাঠক্রমে পাটীগণিতের সমস্যা সমাধানের জন্য বীজগণিত ব্যবহার করার কথা বলা হয়েছে। জ্যামিতি কিন্তু গতানুগতিক পদ্ধতি অনুযায়ীই পড়ানো হয় এবং এর ব্যবহারিক প্রয়োগের কথা চিন্তা করা হ'য় নি। তবে পরিমিতি অন্তর্ভুক্ত করাতে জ্যামিতির ব্যবহারিক প্রয়োগের একটা সুযোগ করে দেওয়া হয়েছে। পরিসংখ্যানেরও দৈনন্দিন জীবনে যথেষ্ট প্রয়োজনীয়তা আছে।

এ প্রসঙ্গে একটা কথা বলা প্রয়োজন। ব্যবহারিক প্রয়োজন সকলেরই একই হয় না। আবার পল্লী অঞ্চল ও শহর অঞ্চলে ব্যবহারিক প্রয়োজন ভিন্ন ; কাজেই একই রকম ব্যবহারিক প্রয়োগের দিকে লক্ষ্য রেখে পাঠক্রম নির্ধারণ করলে তা সকলের কাছে সমানভাবে কাজে আসে না। তাছাড়া বর্তমান ক্ষেত্রে গণিতের পরীক্ষাতে শোচনীয় ফলাফল লক্ষ্য করে এ কথা বলা যেতে পারে গণিতের পাঠক্রমটি যে ভাবেই নির্ধারিত করা হোক না কেন, এর পঠন পাঠন ঠিক বিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতিতে হচ্ছে না। কেবলমাত্র গণিতই নয় গণিতের সঙ্গে সম্বন্ধ আছে-এমন সমস্ত বিষয়েও (যেমন, পদার্থ বিদ্যা ইত্যাদি) ছাত্রদের ফলাফল বেশ সন্তোষজনক হয় না, এতে গণিত শিক্ষা দেওয়ার

উদ্দেশ্যটি অনেকাংশে ব্যর্থ হতে চলেছে।

[এর পর উচ্চ বিত্তালয়ে গণিতের স্থান ও গণিত শিক্ষণে প্রতিশেধমূলক ব্যবস্থা—অধ্যায় দুটি থেকে প্রয়োজনীয় অংশ যোগ করুন]

[গণিত সম্বন্ধে কোঠারী কমিশনের অভিমত ও গণিতের বর্তমান পাঠক্রমের সমালোচনা লিখবার জন্য শ্রীগনেশচন্দ্র কোলে (হাওড়া) অনুরোধ করেছিলেন, তাঁকে ধন্যবাদ জানচ্ছি।]

গণিতের মূলনীতি (Spirit of Mathematics) ঃ—

1. Mathematics in its widest significance is the development of all types of formal deductive reasoning.

—A. N. Whitehead.

2. Mathematics is the queen of the sciences and arithmetic is the queen of mathematics. —Gauss.

3. Every new body of discovery is mathematical in form, because there is no other guidance we can have.

—G. C. Darwin.

4. Mathematics is both the queen and the handmaiden of the science. —E. T. Bell.

5. The nearer man approaches to mathematics, the farther away he moves from animals—S. Gasson.

6. The final aim of each natural science is to resolve itself into mathematics. —Helmholtz.

7. "What use is the calculus ?"

"What use is the baby ? Wait and see',. —Newton.

8. Mathematics in earnest should be fun ; mathematics in fun may be earnest. —N. A. Court.

9. Every mathematician owes a debt to mathematics that he should repay by one hard job of Scholary writing. —

L. E. Dickson,

10. A mathematician knows how to solve a problem—he cannot solve it. —W. E. Milne.

11. God exists since mathematics is consistent and the

Devil exists since we cannot prove it.—Andre Weil

12. Mathematics is a language. —Gibbs.

13. All great battles of mathematics and physics are fought on field of characteristic Zero. —Weyl.

14. The surprising thing is that the scientist and the mathematician can collaborate and establish isomorphisms between thought and nature.—V. V. Narlikar.

15. To present mathematics as a narrow utilitarian discipline is in effect, to substitute a financial carrot for the mathematical ideal. —Budden & Wormell.

BIBLIOGRAPHY

1. J. W. A. Young : The teaching of mathematics.
2. Godfrey and Siddone : The Teaching of Elementary Mathematics.
3. P. B. Ballard : Teaching the Essentials of Arithmetic.
4. D. E. Smith : The teaching of Elementary Mathematics.
5. C. H. Butler and F. L. Wren : The Teaching of Secondary Mathematics.
6. W. L. Sumner : The Teaching of Arithmetic. and Elementary Mathematics
7. T. P. Nunn : The Teaching of Algebra.
8. E. L. Thorndike : The Psychology of Arithmetic.
9. B. N. Chadha : The Teaching of Mathematics.
10. E. T. Bell : Mathematics in Secondary Modern School.
11. R. Newman : The World of Mathematics.
12. F. W. Land : New approahes to Mathematics Teaching.
13. Shently : Teaching of Geometry.
14. Macnee : Instructions in Indian Secondary Schools.
15. Dharamvir and Aggarwala : The Teaching of Mathematics.

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রশ্নপত্র

CONTENTS & METHODS OF TEACHING MATHEMATICS

1965

Answer Question no. 9 and *two each* from Groups A and B.

Group A

1. (a) The sums of n terms of two Arithmetic Series are in the ratio of $n-1$; $n+1$; find the ratio of their 5th terms.

(b) Use principle of trigonometry to find :—

(i) the height of a cliff when trespassers near the bottom will be prosecuted.

(ii) the width of a river which cannot be crossed.

2. (a) If in the expansion of $(1+x)^{2n+1}$, the co-efficients of x^r and x^{r+1} be equal, find r.

(b) Prove that for real values of x, the expression $3x^2-6x+8$ can never be less than 5.

(c) The ratio of the areas of two similar triangles is equal to the ratio of the squares on the corresponding sides.

3. (a) A triangle ABC is given ; construct a triangle of which ABC is the pedal triangle.

(b) Draw an equilateral triangle, each side of which is 2 inches. Now construct a square equal in area to this triangle.

(c) When is (i) a straight line, (ii) a plane, said to be perpendicular to a plane ?

Prove that all straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point of it are co-planar.

4. (a) There are 12 ferry-steamers plying between Chandpal Ghat and Botanical Gardens. In how many different ways can you ferry from Chandpal Ghat to Botanical Gardens and

return by a different steamer?

(b) A cubic inch of goods is drawn into a wire 1000 yds long; find the diameter of the wire to the nearest thousandth of an inch ($\pi=3\cdot1416$).

(c) Find the locus of the middle points of all chords of a circle, passing through a fixed point (a, β).

Group B

5. Discuss with examples the value of the study of History of Mathematics in mathematical instruction in schools and the manner in which this should be incorporated in the teaching of the subject with advantage.

6. Indicate the main aims and values of teaching mathematics and the procedures by which you would ensure that these are being realised in practice.

7. "There are three distinct methods of introducting the subject of algebra; by means of 'The Four Rules', 'Problems' and 'Formulae'." Bring out with suitable examples, as necessary, the distinctive character and the advantages and disadvantages of each method.

8. Write brief padagogical notes on any four of the following :—

(a) Extraction of square root by the method of successive divisions. (b) Place of three dimensional geometry in mathematics and how to introduce it. (c) Statistics as applied arithmetic and approach to its teaching. (d) Correlation of mathematics with other subjects of the curriculum and with environment.(e) The principle of *reduction absurdum*. (f) The 'outlook' value of algebra. (g) Degree of accuracy and approximations.

Group—C

9. Draw up Notes of Lesson or a plan of the lesson on any one of the following topics, indicating the class for which your lesson is intended :—

(a) First lesson on the Theory of Logarithms.

(b) First lesson on Recurring Decimals.

(c) To find the equation to the straight line which is inclined to the x-axis at given angle and cuts off a given intercept from the y-axis.

(d) To prove that the difference of the two sides of a triangle is less than the third.

1966

Answer question No. 9 and Two Each from Groups A and

Group A

1. (a) Express $(x+4)(x-2)$ as the differencc of two squares.

(b) A person went out between 3 and 4 p. m. and returned betwecn 5 and 6 p. m. to find that the minute and hour hands of his watch had exactly changed places in the mean time. (i) When did he go out? (ii) When did he return?

(c) Construct a parallelogram equal to a given parallelogram in area an having a side equal to a given straight line.

2. (a) A train 1000 metres long overtakes a person walking at the rate of 5 kilometres an hour in the same direction, and passes him completely in 10 seconds; find the velocity of the train.

(b) From the top of a cliff 150 ft. high the angles of depression of the top and bottom of a pillar, standing on the ground are found to be 30° and 60° respectively; find the height of the pillar.

(c) Construct a circle passing through a given point and touching a given straight line at a given point.

3. (a) Show that the p^{th}, q^{th}, r^{th} terms of a series are in geometrical progression if p. q. r be in arithmetical progression.

(b) Find the area of quadrilateral the co.ordinates of whose vertices are given.

(c) Find the value of sin (A – B), when sin $A=\frac{3}{5}$ and sin $B=\frac{5}{13}$.

4. (a) In an examination 70% students passed in English,

75% in Bengali and 65% in both subjects. If altogether 25 student failed in both the subjects how many students appeared at the examination ?

(b) If $(a+b+c)x=(b+c-a)y=(c+a-b)z=(a+b-c)w$, show that.

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{z}=\frac{1}{w}=\frac{1}{x}$$

(c) The straight lines joining the middle points of the opposite sides of a quadrilateral bisect one another.

Group B

5. The present course in core mathematics in our secondary school is "intended to be reoriented to the use of Mathematics in daily life." Examine the prescribed syllabus in core mathematics to indicate those aspects of it which bear upon this aim in particular. Is the teaching and learning of the subject as effective as desired ? If not, suggest remedies for improvement.

6. Evaluation is an integral part of the total educational process. Explain this with special reference to mathematical instruction and discuss how the achievement of your pupils in mathematics could effectively evaluated.

7. What are the drawbacks of the Euclidean mode of presentation of geometry for school children ? Discuss in this connection the changes that have taken place in recent years in the organisation and treatment of the subject matter and their pedagogical implications.

8. Write pedagogical notes on *any three* of the following :

(a) Mathematics as mental training. (b) Algebra in geometry and geometry in algebra. (c) Concept of number. (d) Checks and rough estimates in arithmetic. (e) Practical work and appliances in the teaching of mathematics. (f) Origin and development of geometry.

Group C

9. Draw up Notes of Lesson on any one of the following topics, indicating the class for which your lesson is intended.

(a) Graphical representations—Histogram. Frequency Polygon. (b) Simple Simultaneous Equations involving two unknowns. (c) The bisectors of the angles of a triangle are concurrent. (d) Ratio and Proportion.

1967

1. Answer either (*a*) and (*b*) *or* (*c*) and (*d*) :

(*a*) If the roots of $lx^2+n^x+n=0$, be in the ratio $p : q$, prove that,

$$\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}\sqrt{\frac{n}{l}}=0$$

(b) From an aeroplane vertically over a straight horizontal road angles of depression of two consecutive milestones on the opposite side of the aeroplane are observed to be α and β. Show that the height in miles of the aeroplane above the road is given by

$$\frac{\tan\alpha \tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}.$$

(c) The volume of a pyramid varies jointly as its height and the area of its base ; and when the area of the base is 60 square feet and the height 14 feet, the volume is 280 cubic feet. What is the area of the base of a pyramid whose volume is 390 cubic feet and whose height is 26 feet ?

(d) If α and β are acute angles. and

$$\cos 2\alpha=\frac{3\cos 2\beta-1}{3-\cos 2\beta}$$

show that $\tan\alpha=\sqrt{2}\tan\beta$;

2. Answer *either* (a) and (b) or (c) and (d) :

(a) *ABC* is a triangle inscribed in a circle. If the tangent at *A* meets *BC* produced in *D*. prove that

$$CD : BD=AC^2 : AB^2.$$

(b) Show that $y=mx$, is a tangent to the circle

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$$

if $(g+mf)^2=c(1+m^2)$.

(c) A semi-circle is described on *AB* as diameter, and any

two chords AC and BD are drawn intersecting at P. Show that

$$AB^2 = AC.AP + BD.BP.$$

(d) Find the equation of the chord of the ellipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

which is bisected at the point $(2, -1)$

3. Answer *either* (a) and (b) *or* (c) and (d) ;

(a) A man walked from A to B at the rate of 4 miles per hour. Had he walked at the rate of $3\frac{2}{5}$ miles per hour, he would have taken 3 hours more to reach B. What is the distance between A and B ?

(b) Calculate the standard deviation for the following distribution :

Scores	70 – 79	60—69	50 – 59	40 – 49	30 – 39	20 – 29
Frequencies	3	5	8	15	5	4

(c) A dealer in horse sold two of his animals for Rs 600 each. On one of them he lost 10 per cent, and on the other he gained 10 per cent. Calculate the percentage of his gain or loss on the whole.

(d) A solid sphere of radius 4 cms. is blown into a hollow sphere of uniform thicknesss, radius of whose external surface is 5 cms. Find the thickness of the hollow sphere, given

$$61^{\frac{1}{3}} = 3{\cdot}94$$

4. Answer *any two* of the following :

(a) "The analytic method is the method of the mathematical worker, the synthetic method is that in which he usually presents his results."

Discuss with suitable illustrations from mathematics,

(b) What are the specific objectives of teaching elementary mathematics in our secondary schools ? What kinds of learning situations would you like to create in the class room and outside for the attainment of those objectives ?

(c) "The central topic of algebra is, beyond questions, the equation and its application. It is this that puts flesh and

blood upon the dry bones of the skeleton of algebraic routine."

Elucidate the statement and illustrate the methods of introducing the subject that would mainly lead to the development of the concept of equation,

(d) Write short notes on *any two* of the following :

(*i*) The preparation of a teacher of mathematics and the planning of his work.

(*ii*) The place of intuition, observation and experience in the teaching of geometry.

(*iii*) The place of the history of mathematics in the teaching of the Subject.

(*iv*) Formal training *vs*, Utilitarial standpoint in the teaching of mathematics.

5. Write notes of lesson on *any one* of the following indicating the class for which it is meant.

(*a*) The first lesson on decimal fractions.

(*b*) The first lesson on laws of indices.

(c) Construction of a triangle, when the base, the vertical angale and the length of the median which bisects the base are given.

(*d*) The first lesson on the measurements of heights distances in trigonometry.

1968

1. Answer *either* (*a*) and (*b*) *or* (*c*) and (*d*) :

(*a*) Buses run along a certain route at intervals of 10 minutes at a speed of 8 miles an hour. A man walking steadily in the same direction is overtaken by a bus every 15 minutes. What is his rate of walking ?

(*b*) Find the volume of a pyramid of which the base is a triangle whose sides are 8 cm., 15 cm., and 17 cm., and the height is 12 cm.

(*c*) In a joint business the capital invested by *A*, *B*, and

C are in the ratio 10 : 12 : 15. After four months A withdraws half of his capital. If at the end of the year there is a profit of Rs. 1212, what is the share of profit of each ?

(*d*) If $x=cy+bz$, $y=az+cx$, $z=bx+ay$, prove that

$$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}.$$

2. Answer *either* (*a*) and (*b*) *or* (c) and (*d*) :

(*a*) Find the sum of the squares of the binomial coeffcients in the expansion of $(1+x)^n$, when 'n' is a positive integer.

(*b*) If the angle A be 60°. show that in a triangle ABC,

$$b+c=2a\cos\frac{B-C}{2},$$

where a, b, c, are the sides opposite to the angles A, B, and C respectively.

(*c*) Given

$$e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\ldots\ldots\ldots,$$

show that e lies between 2 and 3.

(*d*) Find the general solutions of
$\cos x+\sin x=\cos 2x+\sin 2x$.

3. Answer *either* (*a*) and (*b*) *or* (*c*) and (*d*) :

(*a*) Two parallel straight lines meet the straight lines OP, OQ and OR at P, Q, R and P', Q', R', respectively. Prove that $PQ : QR=P'Q' : Q'R'$.

(*b*) Find the locus of the intersection of tangents to the parabola $y^2=4ax$, the angle between them being a right angle.

(*c*) A point moves so that the ratio of its distances from two fixed points is constant, prove that the locus of the moving point is a circle..

(*d*) The side BC of a triangle ABC is divided initernally at D in the ratio $n : m$ and the line AD is divided internally at G in the ratio $m+n : l$. If the co-ordinates of the angular point A,B C, be (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3) respectively, find the co-ordinates of G.

4. Answer *any two* of following :

(*a*) "The true aim of learning mathematics is the development of mental powers and not the acquirement of the knowledge of mathematical facts".

Do you agree ? Give reasons for your answer.

(*b*) Distinguish between the Inductive method and the Deductive method and indicate how you would keep these contrasted methods in view in a mathematics class.

(*c*) Bring out the links of algebra with arithmetic and geometry and state how far the fusion of these three branches of mathematices is possible in the teaching of school mathematics.

(*d*) Compare and contrast the essentials of modern methods of approach to geometry with the older method of teaching the subject and state your views regarding the effectiveness of the former for the achievement of the goals of teaching geometry.

5, Write notes of lesson on *any one* of the following indicating the class for which your lesson is intended :

(*a*) The first lesson on Percentage.

(*b*) The first lesson on the graphs of linear functions.

(*c*) To prove that the straight line drawn though the middle point of a side of a triangle, parallel to the base, bisects the remaining side.

(*d*) Trigonometrical ratios of an angle of 60°

1969

Answer Question No. 9 *and* Two Each *from* Groups A and B

Group A

1. (*a*) At an election 10% of the people on the list did not vote and 60 recorded votes were invalid. The successful candidate won by a majority of 308 votes and was suported by 47% of the electorate on the list. What was the number on the

list of voters ?

(*b*) Find the coeffcient of x^r in the expansion of
$(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots \text{to } \infty)^2$

(*c*) Prove that similar triangles are to one another as the squares on the radii of their in-circles.

2. (*a*) In an examination 42% of the candidates were private candidates and the rest regular. The percentages of pass were 62 and 30 for the regular and private candidates respectively. What per cent, of the total number of candidates passed the examination ?

(*b*) The shadow of a tower standing on a level plane is found to be 40 feet longer when the sun's altitude is 45° than when it is 60°. Find the height of the tower.

(*c*) Find the equations of the tangents to the circle

$$x^2+y^2+8x+4y-5=0,$$

from the point (3, −3).

3. (*a*) If a quadrilateral is circumscribed about a circle, prove that the sum of one pair of opposite sides is equal to the sum of the other pair.

(*b*) It is given that the illumination from source of light varies inversely as the square of the distance, how much further from the table-lamp must a book, Which is now 6 inches off, be removed so as to receive just half as much light ?

(*c*) In a traingle *ABC* if $\tan\frac{A}{2}$, $\tan\frac{B}{2}$. $\tan\frac{C}{2}$ be in **A.P.**, show that cos A, cos *B*, cos *C* are in A.P.

4. (*a*) Calculate the mean and the median for the following. equency distribution.

Scores	93 − 97	88 − 92	83 − 87	78 − 82	73 − 77	68 − 72	63 − 67
Frequencies	I2	15	20	18	15	10	8

(*b*) The sides of right-angled triangle are 3 cms. and 4 cms. respectively ; find the volume of the cone formed by the revolution of the triangle round the hypotenuse.

c) If the sum of the inclinations of any two tangents to

the hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ be constant $(=\lambda)$. find the locus of their intersection.

Group B

5. What are the specific aims of teaching arithmetic, algebra and geometry in Secondary schools ? What procedures would you follow for the attainment of those aims ?

6. Illustrate with examples the synthetic and the analytic, the inductive and deductive methods as applied to the teaching of mathematics, and point out the special value of each as a scientific approach to the subject.

7. What is meant by evaluation in education ? State how you would proceed to evaluate the mathematical ability and achievement of your pupils.

8. Answer *any two* of the following :

(*i*) What is mean by non-Euclidean geometry ? Write in brief about its origin and development.

(*ii*) What, in your opinion is the psychological approach to the introduction of algebra to the beginners ? Give reasons in support of your views.

(*iii*) Indicate with suitable examples the relation of mensuration with arithmetic, algebra, geometry and trigonometry.

Group C

9. Draw up notes of lesson on *any one* of the following topics indicating the class for which your lesson is intended :

(*i*) The first lesson on recurring decimals.

(*ii*) Construction of a triangle—the perimeter and the angles at the base are given.

(*iii*) The second lesson on quadratic equations.

(*iv*) Measurement of height of an object at an inaccessible distance by trigonometrical method.

1970

The figures in the margin indicate full marks
Answer Question No. 9 and Two each from Groups A and B

GROUP A

1. (a) Show that the expression

$$ax^2+by^2+cz^2+2ayz+2bzx+2cxy.$$

can be resolved into two linear factors if $a^3+b^3+c^3=3abc$.

(b) A statue 6 ft. high stands on a column 10 ft. high. To an observer on a level with the top of the statue, the Column and the statue subtend equel angles. Find the distance of the observer from the top of the statue.

(c) Show that the area of the triangle formed by the straight lines whose equations are $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ and $x=0$, is $\frac{1}{2}\frac{(c_1 \quad c_1)^2}{m_2 - m_1}$

2. (a) The expenses of a boarding house are partly constant and partly vary as the number of boarders. When the numbers of boarders are 450 and 920, the expenses are Rs. 1,485 and Rs. 2,895 respectively. Find the expenses for 1,000 boarders.

(b) Prove that the areas of similar triangles are proportional to the squares on corresponding sides.

(c) Calculate the mean and the standard deviation for the following frequency distribution :

Scores—	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84
Frequencies—	5	7	9	11	6	8	4

3. (a) Find the equation to that chord of the circle $x^2+y^2=81$ which is bisected at the point $(-2,3)$.

(b) Three solid spheres of gold whose radii are 1 cm., 6 cms. and 8 cms. respectively are melted into a single solid sphere of gold. Find the radius of the sphere so formod.

(c) If $\frac{\log x}{y-z}=\frac{\log y}{z-x}=\frac{\log z}{x-y}$, then prove $x^x . y^y . z^z=1$

4. (a) If the three successive coefficients in the expansion of $(1+x)^n$ be 220, 495 and 792, find n.

IX 136 (b) Prove that the feet of the perpendiculars drawn to the three sides of a triangle from any point on the circumference of its curcumcircle are collinear.

(c) If 'a', 'b' and 'c' denote the lengths of three side of a triangle while 'R' and 'r' denote the circumradius and inradius respectively of the same triangle, prove that

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{2Rr}.$$

Group B

5. Discuss the principles of teaching mathematics in secondary schools, bringing out clearly the importance of deduction, induction and intuition.

6. "Mathematics is more than a mere accumulation of technical knowledge ; it is a mode of thought, and the teacher should try to afford his pupils an opportunity of sharing in this kind of thinking, if only in a very simple and elementary way. Elucidate.

7. Compare and contrast with illustrations the method of analysis with the method of synthesis as applied to the teaching of mathematics in the higher classes of asecondary school. In this connection discuss the role of heuristic method in the class-room.

8. Write pedagogical notes on *any two* of the following :

(a) Multiplication of directed numbers.

(b) One modern method of approach to the subject of Algebra.

(c) The different stages of the Geometry course in secondary schools.

(d) The respective roles of 'unitary method' and 'ratio method' in Arithmetic.

Group C

9. Draw up Lesson Notes on *any one* of the following topics, indicating the class for which your lesson is intended :

(a) First lesson on 'Percentage' in Arithmetic.

(b) First lesson on finding the number of permutations of 'n' diflerent things taken 'r' at a time $(r<n)$.

(c) To prove that the angle at the centre of a circle is double of an angle at the circumference standing on the same arc.

(d) To find the equation of the normal at the point (x_1y_1) on the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

বর্দ্ধমান বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রশ্নপত্র

CONTENTS & METHODS OF TEACHING MATHEAMTICS

1967

Answer Question No. Five and any two of the rest.

1. It has been observed that though mathematics is a deductive science its basis is not deduction. Discuss, indicating how intuition, observation and induction play an important role in the teaching and learning of mathematics.

2. Indicate the general aims of teaching mathematics in schools, and the specific aims relating to arithmetic, algebra and geometry respectively, as far as practicable. Briefly discuss and drawbacks in our educational programme hindering the realisation of these aims.

3. Consider three main methods of approach to the teaching of algebra and discuss their relative advantages and disadvantages.

4. Write pedagogical notes on any two of the following :

(a) Evaluation of Euclid.

(b) Algebra in geometry and Vice Versa.

(c) Graphs – their types and uses.

(d) Trigonometry—how and when to introduce.

5. Write notes of lesson on any one of the following topics indicating the class for which it is suitable :—

(a) First notions of approximation.

(b) Problems leading to simultaneous equations.

(c) The angle—sum property of the interior angles of a polygon.

1968

Answer Question No. Five and Any Two of the rest.

1. It has been observed that under the Euclidean tradition the Subject to be taught in schools was not "Geometry" but "Euclid's Elements of Geometry". Comment on this remark and point out the importance of a stage of intuitive and empirical geometry as introduction to a course of formal, deductive geometry.

2. Give your suggestions for the Correlation of mathematics internally among its different branches and externally with other subjects of the school Curriculum. What are the advantages of such correlation.

3. Indicate in brief the utilitarian, cultural and disciplinery values of learning mathematics in schools and the general principles of mathematical education, including pitfalls to be avoided, towards the effective realisation of these.

4. Write pedagogical notes on *any two* of the following :—

(a) Synthetic Vs. Analytic method in geometry.

(b) Notation and numeration as foundations of arithmetic.

(c) First notions of directed numbers.

(d) Use of trigonometry to find out heights and distances.

5. Write notes of lesson on *any one* of the following topics, keeping in view skill, interest and application of knowledge as objectives, as far as practicable :—

(a) Ratio vs. Unitary Mathods of calculation.

(b) Elementary ideas of Geometry of a sphere,

(c) Graphs of Simple Equations.

1969

Answer Question No. Five and any Two of the rest.

1. It has been observed that though mathematics is a deductive science its basis is not deduction. Discuss how intuition, observation and induction play an important part in the early teaching of mathematics.

2. Compare the modern approach to the teaching of of geometry with the old, and give your views with regard to their respective effectiveness in the achievement of the goals of geometry teaching.

3. Consider, with examples, the different modes of approach to the teaching of algebra and their relative advantages and disadvantages.

4. Write pedagogical notes on *any two* of the following :—

(a) Importance of the graph.

(b) Trigonometrical ratios.

(c) First Four Rules as devices for shortening the process of counting.

(d) Solution of problems by algebraic methods.

5. Write notes of lesson on *any one* of the following topcis, keeping in view skill, interest and application of knowledge as objective as far as practicable :—

(a) Simple practice (First Lesson)

(b) Directed numbers (First Lesson)

(c) Pythagoras theorem.

———